Vorlesung 6a

Varianz und Kovarianz

Teil 1

Varianz und Standardabweichung:

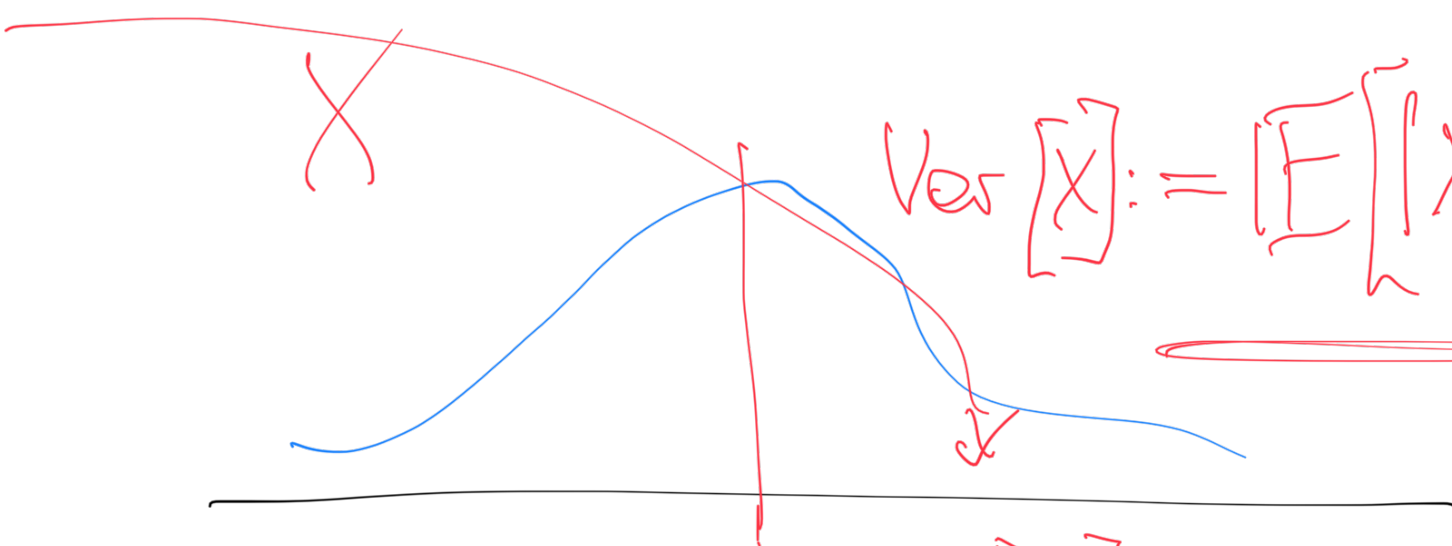
Elementare Eigenschaften

(Buch S. 24)

X sei reellwertige Zufallsvariable

mit endlichem Erwartungswert μ.

X



$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$

$\mu = \mathbb{E}[X]$

X sei reellwertige Zufallsvariable

mit endlichem Erwartungswert μ.

Die **Varianz** von X ist definiert als

$$\mathbf{Var}[X] := \mathbf{E}[(X - \mu)^2],$$

die erwartete quadratische Abweichung

der Zufallsvariablen X von ihrem Erwartungswert μ.

Statt $\mathbf{Var}[X]$ schreiben wir auch

$$\mathbf{Var}\,X$$

oder

$$\sigma_X^2$$

oder (wenn klar ist, welche Zufallsvariable gemeint ist)

$$\sigma^2.$$

$$\mathbb{E}[X+d] = \mathbb{E}[X+d\cdot 1] = \mathbb{E}[X]+d$$

Wie ändert sich die Varianz,

wenn man X um eine Konstante verschiebt?

$$\mathrm{Var}[X+d] = \mathbb{E}\left[\left(X+\cancel{d}-\mathbb{E}[X+\cancel{d}]\right)^2\right]$$

$$= \mathrm{Var}[X]$$

Wie ändert sich die Varianz,

wenn man X um eine Konstante verschiebt?

$$\mathbf{Var}[X+d] = \mathbf{E}[((X+d)-(\mu+d))^2] = \mathbf{Var}X$$

Dann bleibt die Varianz gleich!

Und wenn man X mit einer Konstanten multipliziert

("skaliert")?

Wie ändert sich die Varianz,

wenn man X um eine Konstante verschiebt?

$$\mathbf{Var}[X+d] = \mathbf{E}[((X+d)-(\mu+d))^2] = \mathbf{Var}X$$

Dann bleibt die Varianz gleich!

Und wenn man X mit einer Konstanten multipliziert

("skaliert")?

$$\mathbf{Var}[cX] = \mathbf{E}[(cX-c\mu)^2] = c^2\mathbf{Var}X$$

Der Faktor tritt **quadratisch** heraus!

Definition.

Die **Standardabweichung (Streuung)** von X

ist die Wurzel aus der Varianz:

$$\sigma := \sigma_X := \sqrt{\mathbf{Var} X}$$

$$= \sqrt{\mathbf{E}[(X-\mu)^2]}.$$

Sie gibt an, mit welcher „typischen Abweichung“ der Zufallsvariablen X von ihrem Erwartungswert man “rechnen” sollte.

Es gilt:

$$\sigma_{X+d} = \sigma_X,$$

$$\sigma_{cX} = c\,\sigma_X.$$

Man sagt: σ ist ein *Skalenparameter*.

Für Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert gilt:

$$\mathbf{Var}[X] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}\big(X = \mathbf{E}[X]\big) = 1 \, .$$

$$\mathbb{E}[\underbrace{(X-\mu)^2}_{\geq 0}] = 0 \iff$$

$$\iff \mathbb{P}\big((X-\mu)^2 = 0\big) = 1$$

Satz von Pos. des EW

$$\iff \mathbb{P}(X-\mu = 0) = 1$$

$$\iff \mathbb{P}(X = \mu) = 1$$

Für Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert gilt:

$$\mathbf{Var}[X] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}\big(X = \mathbf{E}[X]\big) = 1 \,.$$

Die Äquivalenz sieht man aus der Gleichheit

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]$$

zusammen mit dem

Satz über die Positivität des Erwartungswertes.

Für Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert gilt:

$$\mathbf{Var}[X] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}\big(X = \mathbf{E}[X]\big) = 1 \ .$$

Die Äquivalenz sieht man aus der Gleichheit

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]$$

zusammen mit dem

Satz über die Positivität des Erwartungswertes.

Wenn es einen Ausgang (in diesem Fall eine Zahl) $\bar{a}$ gibt mit

$$\mathbf{P}\big(X = \bar{a}\big) = 1$$

sagt man auch:

X ist *fast sicher* konstant.

Wie der Erwartungswert ist auch die Varianz von X

durch die Verteilung von X bestimmt:

$\rho(a)$, $a \in S'$

$$\sum_{a \in S'} (a-\mu)^2 \rho(a) = \mathrm{Var}[\rho]$$

$\rho(da) = f(a)\, da$, $a \in S'$ $(\subseteq \mathbb{R})$

$$\int_{S'} (a-\mu)^2 f(a)\, da = \mathrm{Var}[\rho]$$

Wie der Erwartungswert ist auch die Varianz von X

durch die Verteilung von X bestimmt:

Hat X Erwartungswert μ, so gilt

im diskteten Fall

(mit den Verteilungsgewichten $\rho(a),\ a \in S \subset \mathbb{R}$)

$$\mathbf{Var}\, X = \sum_{a \in S} (a - \mu)^2 \, \rho(a)$$

und falls X Dichte $f(a)da, a \in \mathbb{R}$, besitzt:

$$\mathbf{Var}\, X = \int_{\mathbb{R}} (a - \mu)^2 \, f(a) da \, .$$

Einfache Beispiele

Beispiel 1:

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

$X = Z_1 + Z_2 + Z_3$ ist die “Anzahl Köpfe”, $\mathbf{E}[X] = \frac{3}{2}$.

$$\frac{1}{8}\left(0-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(3-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \ldots$$

Beispiel 1:

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

$X = Z_1 + Z_2 + Z_3$ ist die “Anzahl Köpfe”, $\mathbf{E}[X] = \frac{3}{2}$.

$$\mathbf{Var}\,[X]$$

$$= \frac{1}{8}(0 - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{8}(1 - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{8}(2 - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{8}(3 - \frac{3}{2})^2$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{9+3+3+9}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$$

Beispiel 2:

Eine p-Münze wird einmal geworfen.

$$\mathbf{P}(Z = 1) = p, \quad \mathbf{P}(Z = 0) = q$$

$$p(1-p)^2 + q(0-p)^2 =$$

$$= pq^2 + qp^2 = pq(p+q) = pq.$$

Beispiel 2:

Eine p-Münze wird einmal geworfen.

$$\mathbf{P}(Z=1)=p, \quad \mathbf{P}(Z=0)=q$$

$$\mathbf{Var}[Z]$$

$$= q(0-p)^2 + p(1-p)^2 = qp^2 + p^{\cancel{2}}\, q^2$$

$$= pq(p+q) = pq.$$

Beispiel 3:

Anzahl der Erfolge beim zweimaligen p-Münzwurf.

$$\mathbf{Var}[Z_1 + Z_2] = ?$$

$$\mathbb{E}\left[(Z_1 + Z_2 - 2p)^2\right] = \mathbb{E}\left[((Z_1 - p) + (Z_2 - p))^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[(Z_1 - p)^2 + (Z_2 - p)^2 + 2(Z_1 - p)(Z_2 - p)\right]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}\left[(Z_1 - p)^2\right]}_{= \mathrm{Var}[Z_1]} + \underbrace{\mathbb{E}\left[(Z_2 - p)^2\right]}_{= \mathrm{Var}(Z_2)} + \underbrace{2\mathbb{E}\left[(Z_1 - p)(Z_2 - p)\right]}_{= 2\underbrace{\mathbb{E}[Z_1 - p]}_{=0}\mathbb{E}[Z_2 - p]}$$

Beispiel 3:

Anzahl der Erfolge beim zweimaligen p-Münzwurf.

$$\mathbf{Var}[Z_1 + Z_2] = ?$$

Wir rechnen mit Zufallsvariablen:

$$\mathbf{E}[(Z_1 + Z_2 - 2p)^2] = \mathbf{E}[(Z_1 - p + Z_2 - p)^2]$$
$$= \mathbf{E}[(Z_1 - p)^2 + (Z_2 - p)^2 + 2(Z_1 - p)(Z_2 - p)]$$
$$= \mathbf{E}[(Z_1 - p)^2] + \mathbf{E}[(Z_2 - p)^2] + 2\mathbf{E}[(Z_1 - p)(Z_2 - p)].$$

Beispiel 3:

Anzahl der Erfolge beim zweimaligen p-Münzwurf.

$$\mathbf{Var}[Z_1 + Z_2] = ?$$

Wir rechnen mit Zufallsvariablen:

$$\mathbf{E}[(Z_1 + Z_2 - 2p)^2] = \mathbf{E}[(Z_1 - p + Z_2 - p)^2]$$
$$= \mathbf{E}[(Z_1 - p)^2 + (Z_2 - p)^2 + 2(Z_1 - p)(Z_2 - p)]$$
$$= \mathbf{E}[(Z_1 - p)^2] + \mathbf{E}[(Z_2 - p)^2] + 2\mathbf{E}[(Z_1 - p)(Z_2 - p)].$$

Der letzte Term verschwindet wegen der Produktformel (V5b2), denn Z_1 und Z_2 sind unabhängig. Also:

$$\mathbf{Var}[Z_1 + Z_2] = \mathbf{Var}[Z_1] + \mathbf{Var}[Z_2] = 2pq.$$