

Vorlesung 6a

Varianz und Kovarianz

Teil 1

Varianz und Standardabweichung: Elementare Eigenschaften

(Buch S. 24)

X sei reellwertige Zufallsvariable
mit endlichem Erwartungswert μ .

X sei reellwertige Zufallsvariable
mit endlichem Erwartungswert μ .

Die **Varianz** von X ist definiert als

$$\text{Var}[X] := \mathbf{E}[(X - \mu)^2],$$

die erwartete quadratische Abweichung
der Zufallsvariablen X von ihrem Erwartungswert μ .

Statt $\text{Var}[X]$ schreiben wir auch

$\text{Var}X$

oder

σ_X^2

oder (wenn klar ist, welche Zufallsvariable gemeint ist)

σ^2 .

$$\mathbb{E}[X + d] = \mathbb{E}[X + d \cdot 1] = \mathbb{E}[X] + d$$

Wie ändert sich die Varianz,

wenn man X um eine Konstante verschiebt?

$$\text{Var}[X + d] = \mathbb{E}[(X + d - \mathbb{E}[X + d])^2]$$

$$= \text{Var}[X]$$

Wie ändert sich die Varianz,
wenn man X um eine Konstante verschiebt?

$$\mathbf{Var}[X + d] = \mathbf{E}[\left((X + d) - (\mu + d)\right)^2] = \mathbf{Var} X$$

Dann bleibt die Varianz gleich!

Und wenn man X mit einer Konstanten multipliziert
("skaliert")?

Wie ändert sich die Varianz,
wenn man X um eine Konstante verschiebt?

$$\mathbf{Var}[X + d] = \mathbf{E}[\left((X + d) - (\mu + d)\right)^2] = \mathbf{Var}X$$

Dann bleibt die Varianz gleich!

Und wenn man X mit einer Konstanten multipliziert
("skaliert")?

$$\mathbf{Var}[cX] = \mathbf{E}[\left(cX - c\mu\right)^2] = c^2 \mathbf{Var}X$$

Der Faktor tritt **quadratisch** heraus!

Definition.

Die **Standardabweichung (Streuung)** von X
ist die **Wurzel aus der Varianz**:

$$\begin{aligned}\sigma &:= \sigma_X := \sqrt{\text{Var} X} \\ &= \sqrt{\mathbf{E}[(X - \mu)^2]}.\end{aligned}$$

Sie gibt an, mit welcher „typischen Abweichung“
der Zufallsvariablen X von ihrem Erwartungswert
man “rechnen” sollte.

Es gilt:

$$\sigma_{X+d} = \sigma_X,$$

$$\sigma_{cX} = c \sigma_X.$$

Man sagt: σ ist ein *Skalenparameter*.

Für Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert gilt:

$$\mathbf{Var}[X] = 0 \quad \iff \quad \mathbf{P}(X = \mathbf{E}[X]) = 1 .$$

Für Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert gilt:

$$\text{Var}[X] = 0 \iff \mathbf{P}(X = \mathbf{E}[X]) = 1 .$$

Die Äquivalenz sieht man aus der Gleichheit

$$\text{Var}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]$$

zusammen mit dem

Satz über die Positivität des Erwartungswertes.

Für Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert gilt:

$$\text{Var}[X] = 0 \iff \mathbf{P}(X = \mathbf{E}[X]) = 1 .$$

Die Äquivalenz sieht man aus der Gleichheit

$$\text{Var}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]$$

zusammen mit dem

Satz über die Positivität des Erwartungswertes.

Wenn es einen Ausgang (in diesem Fall eine Zahl) \bar{a} gibt mit

$$\mathbf{P}(X = \bar{a}) = 1$$

sagt man auch:

X ist fast sicher konstant.

Wie der Erwartungswert ist auch die Varianz von X
durch die Verteilung von X bestimmt:

Wie der Erwartungswert ist auch die Varianz von X
durch die Verteilung von X bestimmt:

Hat X Erwartungswert μ , so gilt

im diskreten Fall

(mit den Verteilungsgewichten $\rho(a)$, $a \in S \subset \mathbb{R}$)

$$\text{Var } X = \sum_{a \in S} (a - \mu)^2 \rho(a)$$

und falls X Dichte $f(a)da$, $a \in \mathbb{R}$, besitzt:

$$\text{Var } X = \int_{\mathbb{R}} (a - \mu)^2 f(a)da .$$

Einfache Beispiele

Beispiel 1:

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

$X = Z_1 + Z_2 + Z_3$ ist die “Anzahl Köpfe”, $\mathbf{E}[X] = \frac{3}{2}$.

Beispiel 1:

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

$X = Z_1 + Z_2 + Z_3$ ist die “Anzahl Köpfe”, $\mathbf{E}[X] = \frac{3}{2}$.

Var [X]

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{9 + 3 + 3 + 9}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Beispiel 2:

Eine p -Münze wird einmal geworfen.

$$\mathbf{P}(Z = 1) = p, \quad \mathbf{P}(Z = 0) = q$$

Beispiel 2:

Eine p -Münze wird einmal geworfen.

$$\mathbf{P}(Z = 1) = p, \quad \mathbf{P}(Z = 0) = q$$

$$\mathbf{Var}[Z]$$

$$= q(0 - p)^2 + p(1 - p)^2 = qp^2 + p^2$$

$$= pq(p + q) = pq.$$

Beispiel 3:

Anzahl der Erfolge beim zweimaligen p -Münzwurf.

$$\text{Var}[Z_1 + Z_2] = ?$$

Beispiel 3:

Anzahl der Erfolge beim zweimaligen p -Münzwurf.

$$\text{Var}[Z_1 + Z_2] = ?$$

Wir rechnen mit Zufallsvariablen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(Z_1 + Z_2 - 2p)^2] &= \mathbf{E}[(Z_1 - p + Z_2 - p)^2] \\ &= \mathbf{E}[(Z_1 - p)^2 + (Z_2 - p)^2 + 2(Z_1 - p)(Z_2 - p)] \\ &= \mathbf{E}[(Z_1 - p)^2] + \mathbf{E}[(Z_2 - p)^2] + 2\mathbf{E}[(Z_1 - p)(Z_2 - p)]. \end{aligned}$$

Beispiel 3:

Anzahl der Erfolge beim zweimaligen p -Münzwurf.

$$\text{Var}[Z_1 + Z_2] = ?$$

Wir rechnen mit Zufallsvariablen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(Z_1 + Z_2 - 2p)^2] &= \mathbf{E}[(Z_1 - p + Z_2 - p)^2] \\ &= \mathbf{E}[(Z_1 - p)^2 + (Z_2 - p)^2 + 2(Z_1 - p)(Z_2 - p)] \\ &= \mathbf{E}[(Z_1 - p)^2] + \mathbf{E}[(Z_2 - p)^2] + 2\mathbf{E}[(Z_1 - p)(Z_2 - p)]. \end{aligned}$$

Der **letzte Term** verschwindet wegen der Produktformel

(V5b2), denn Z_1 und Z_2 sind unabhängig. Also:

$$\text{Var}[Z_1 + Z_2] = \text{Var}[Z_1] + \text{Var}[Z_2] = 2pq.$$