

Vorlesung 5b

Unabhängigkeit

Teil 6

Abhängige Verquickungen unabhängiger Bausteine

(vgl. Buch S. 68, Bsp. 2)

Ein Beispiel für “indirekte Abhängigkeiten”:

Wir haben zwei gezinkte Münzen, mit $P(\text{Kopf} = 1) = 0.9$,
und eine faire Münze (mit $P(\text{Kopf} = 1) = 0.5$).

Jede der drei Münzen wird einmal geworfen;
die zufälligen Ergebnisse sind G, H für die beiden gezinkten
und F für die faire Münze.

Ein Beispiel für “indirekte Abhängigkeiten”:

Wir haben zwei gezinkte Münzen, mit $P(\text{Kopf} = 1) = 0.9$,
und eine faire Münze (mit $P(\text{Kopf} = 1) = 0.5$).

Jede der drei Münzen wird einmal geworfen;
die zufälligen Ergebnisse sind G, H für die beiden gezinkten
und F für die faire Münze.

Lernt man aus der Information, ob F so wie G ausfällt,
etwas für die Prognose, ob F so wie H ausfällt?

Ein Beispiel für “indirekte Abhängigkeiten”:

Wir haben zwei gezinkte Münzen, mit $P(\text{Kopf} = 1) = 0.9$,
und eine faire Münze (mit $P(\text{Kopf} = 1) = 0.5$).

Jede der drei Münzen wird einmal geworfen;
die zufälligen Ergebnisse sind G, H für die beiden gezinkten
und F für die faire Münze.

Lernt man aus der Information, ob F so wie G ausfällt,
etwas für die Prognose, ob F so wie H ausfällt?

In der Tat lernt man etwas, denn:

Wenn F wie G ausfällt, fällt F eher als Kopf aus, und dann
fällt H wohl auch eher so aus wie F

Hier ist eine mathematische Analyse:
 G und H seien einfache p -Münzwurfe,
 F sei ein einfacher $1/2$ -Münzwurf;
 G, H, F seien unabhängig. Dann gilt:

Hier ist eine mathematische Analyse:

G und H seien einfache p -Münzwürfe,

F sei ein einfacher $1/2$ -Münzwurf;

G, H, F seien unabhängig. Dann gilt:

$$\underline{\mathbf{P}(G = F)} = p \frac{1}{2} + q \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{analog: } \underline{\mathbf{P}(H = F)} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\mathbf{P}(G = F, H = F)} = (p^2 + q^2) \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$(p^2 + q^2) \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \stackrel{!}{=} p^2 + q^2$$

Hier ist eine mathematische Analyse:

G und H seien einfache p -Münzwürfe,

F sei ein einfacher $1/2$ -Münzwurf;

G, H, F seien unabhängig. Dann gilt:

$$\mathbf{P}(G = F) = p \frac{1}{2} + q \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{analog: } \mathbf{P}(H = F) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(G = F, H = F) = (p^2 + q^2) \frac{1}{2}$$

$$p^2 + q^2 \stackrel{=}{=} \frac{1}{2} ((p+q)^2 + (p-q)^2) = \frac{1}{2} (1 + (p-q)^2) \geq \frac{1}{2},$$

mit "=" genau dann wenn $p = \frac{1}{2}$.

Für $p \neq \frac{1}{2}$ sind $\{G = F\}$ und $\{Y = F\}$ "positiv korreliert"!

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) > \mathbb{P}(E_1) \mathbb{P}(E_2)$$

Positiv korrelierte Ereignisse

sind Ereignisse E_1, E_2 mit der Eigenschaft

$$(*) \quad \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) > \mathbf{P}(E_1) \cdot \mathbf{P}(E_2)$$

Offenbar sind dann E_1 und E_2 nicht unabhängig.

Was bedeutet die Beziehung $(*)$ anschaulich?

Schreiben wir $\mathbf{P}(E_1) =: p_1, \mathbf{P}(E_2) =: p_2$.

Schreiben wir $\mathbf{P}(E_1) =: p_1$, $\mathbf{P}(E_2) =: p_2$.

Dann ist

$$\begin{aligned} (*) &\iff \mathbf{E}[I_{E_1}I_{E_2} - p_1p_2] > 0 \\ \iff &\mathbf{E}[I_{E_1}I_{E_2} - p_1I_{E_2} - p_2I_{E_1} + p_1p_2] > 0 \\ \iff &\mathbf{E}[(I_{E_1} - p_1)(I_{E_2} - p_2)] > 0. \end{aligned}$$

Schreiben wir $\mathbf{P}(E_1) =: p_1$, $\mathbf{P}(E_2) =: p_2$.

Dann ist

$$\begin{aligned} (*) &\iff \mathbf{E}[I_{E_1}I_{E_2} - p_1p_2] > 0 \\ &\iff \mathbf{E}[I_{E_1}I_{E_2} - p_1I_{E_2} - p_2I_{E_1} + p_1p_2] > 0 \\ &\iff \mathbf{E}[(I_{E_1} - p_1)(I_{E_2} - p_2)] > 0. \end{aligned}$$

E_1 und E_2 haben dann also die Tendenz,
gemeinsam einzutreten oder gemeinsam nicht einzutreten.
Solche Ereignisse E_1 und E_2 nennt man **positiv korreliert**.