Vorlesung 5b

Unabhängigkeit

Teil 4

Unabhängigkeit von Ereignissen

(Buch S. 67-68)

Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$ heißen unabhängig

$:\Longleftrightarrow$

Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$ heißen unabhängig

$:\Longleftrightarrow I_{E_1}, \ldots, I_{E_n}$ sind unabhängig.

Satz:

Für die Unabhängigkeit von $E_1, \ldots, E_n$ reicht aus, dass

$$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \mathbf{P}(E_{i_1}) \cdots \mathbf{P}(E_{i_k})$$

für alle $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Einen eleganten Beweis führt man über eine Rechnung mit Indikatorvariablen (ähnlich wie bei der Einschluss-Ausschlussformel), siehe Buch Seite 67.

Der Beweis des Satzes wird in der Vorlesung nicht geführt.

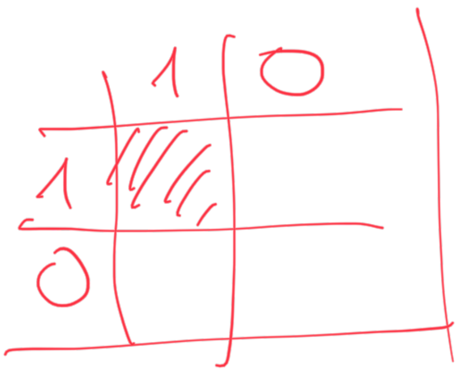
Korollar zum vorigen Satz:

$n=2$

Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse E_1, E_2

ist äquivalent zur Produktformel

$$\boxed{\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\,\mathbf{P}(E_2)}$$



Und die Unabhängigkeit dreier Ereignisse E_1, E_2, E_3 ist

äquivalent dazu,

dass *beide* der folgenden Bedingungen a) und b) erfüllt sind:

$$\text{a)} \quad \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2),$$

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_3),$$

$$\mathbf{P}(E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3).$$

$$\text{b)} \quad \mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

Und die Unabhängigkeit dreier Ereignisse E_1, E_2, E_3 ist

äquivalent dazu,

dass *beide* der folgenden Bedingungen a) und b) erfüllt sind:

a) $$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2),$$
$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_3),$$
$$\mathbf{P}(E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3).$$

b) $$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)$$

a) oder b) allein reichen i.a. nicht für die Unabhängigkeit,

wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel:

(Z_1, Z_2) sei ein zweifacher $\frac{1}{2}$-Münzwurf,

$E_1 := \{Z_1 = 1\}$, $E_2 := \{Z_2 = 1\}$, $E_3 := \{Z_1 = Z_2\}$.

$E_1 \cap E_2 =$

$= \{Z_1 = 1, Z_2 = 1\}$

Beispiel:

(Z_1, Z_2) sei ein zweifacher $\frac{1}{2}$-Münzwurf,

$$E_1 := \{Z_1 = 1\},\ E_2 := \{Z_2 = 1\}, E_3 := \{Z_1 = Z_2\}.$$

E_1, E_2, E_3 sind paarweise unabhängig (warum?),

aber nicht unabhängig:

das Ereignis $E_1 \cap E_2$ zieht das Ereignis E_3 nach sich! Also:

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) > \underbrace{\mathbf{P}(E_1 \cap E_2)}^{= \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2)}\mathbf{P}(E_3);$$

die Ereignisse E_1, E_2, E_3 sind somit nicht unabhängig.

$\neq \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}(E_3)$

Also reicht Bedingung a) allein nicht

für die Unabhängigkeit der drei Ereignisse!

Auch Bedingung b) allein reicht nicht:

In den Übungen werden wir ein Beispiel

von drei Ereignissen E_1, E_2, E_3 sehen,

die nicht unabhängig sind, aber für die

$$\boxed{\mathbf{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)\mathbf{P}(E_3)}$$

gilt.