

Vorlesung 5b

Unabhängigkeit

Teil 1

Zwei (diskrete) Zufallsvariable

(Buch S. 61)

Zwei binäre Zufallsvariable: Ausgeglichene Verhältnisse?

Der Wertebereich von $X = (X_1, X_2)$ sei $\{o, u\} \times \{\ell, r\}$

	ℓ	r
o		
u		

Wie sollten die Verteilungsgewichte der 4 Ausgänge
 $\{(o, \ell), (o, r), (u, \ell), (u, r)\}$ aussehen,
damit es gerechtfertigt ist zu sagen:
 X_1 und X_2 sind unabhängig?

Beispiel:

	ℓ	r
o	$2/6$	$1/6$
u	$1/6$	$2/6$
	$1/2$	$1/2$

Das Chancenverhältnis von ℓ zu r ,

d.h. das Verhältnis $P(X_2 = \ell) : P(X_2 = r)$,

ist $(\frac{2}{6} + \frac{1}{6}) : (\frac{1}{6} + \frac{2}{6}) = 1 : 1$.

$$1/2 : 1/2 = 1:1$$

Beispiel:

	ℓ	r
o	$2/6$	$1/6$
u	$1/6$	$2/6$

Das Chancenverhältnis von ℓ zu r ,
d.h. das Verhältnis $\mathbf{P}(X_2 = \ell) : \mathbf{P}(X_2 = r)$,
ist $(\frac{2}{6} + \frac{1}{6}) : (\frac{1}{6} + \frac{2}{6}) = 1 : 1$.

So (nämlich 1:1) wird man bezüglich X_2 wetten,
wenn man nichts über den Ausgang von X_1 weiß.

Beispiel:

	ℓ	r
o	$2/6$	$1/6$
u	$1/6$	$2/6$

Wenn man aber weiß, dass das Ereignis $\{X_1 = o\}$ eintritt,
wird man bezüglich des Ausgangs von X_2
anders wetten als 1 : 1.

Beispiel:

	ℓ	r
o	$2/6$	$1/6$
u	$1/6$	$2/6$

Wenn man aber weiß, dass das Ereignis $\{X_1 = o\}$ eintritt,
wird man bezüglich des Ausgangs von X_2
anders wetten als 1 : 1.

Das Chancenverhältnis von ℓ zu r ist dann 2 : 1.

Die Verhältnisse in den Zeilen sind nicht ausgeglichen!

Beispiel: Ausgeglichene Verhältnisse

Der Wertebereich von $X = (X_1, X_2)$ sei $\{o, u\} \times \{\ell, r\}$

	ℓ	r
o	$2/9$	$4/9$
u	$1/9$	$2/9$
	$3/9$	$6/9$

$$3:6 = 1:2$$

Beispiel: Ausgeglichene Verhältnisse

Der Wertebereich von $X = (X_1, X_2)$ sei $\{o, u\} \times \{\ell, r\}$

	ℓ	r
o	$2/9$	$4/9$
u	$1/9$	$2/9$

Hier sind die Chancenverhältnisse von ℓ zu r
in allen Zeilen gleich -

unabhängig vom Ausgang von X_1 .

Definition

Zufallsvariable X_1, X_2 heißen (stochastisch) *unabhängig*,
wenn für alle Ereignisse $\{X_1 \in A_1\}, \{X_2 \in A_2\}$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

(“Produktformel für Wahrscheinlichkeiten”)

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2') = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in A_2')$$

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)}{\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2')} = \frac{\mathbb{P}(X_2 \in A_2)}{\mathbb{P}(X_2 \in A_2')}$$

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2)$$

Zum Merken :

Für jedes Paar von Teilmengen $A_2, A'_2 \subset S_2$ gilt:

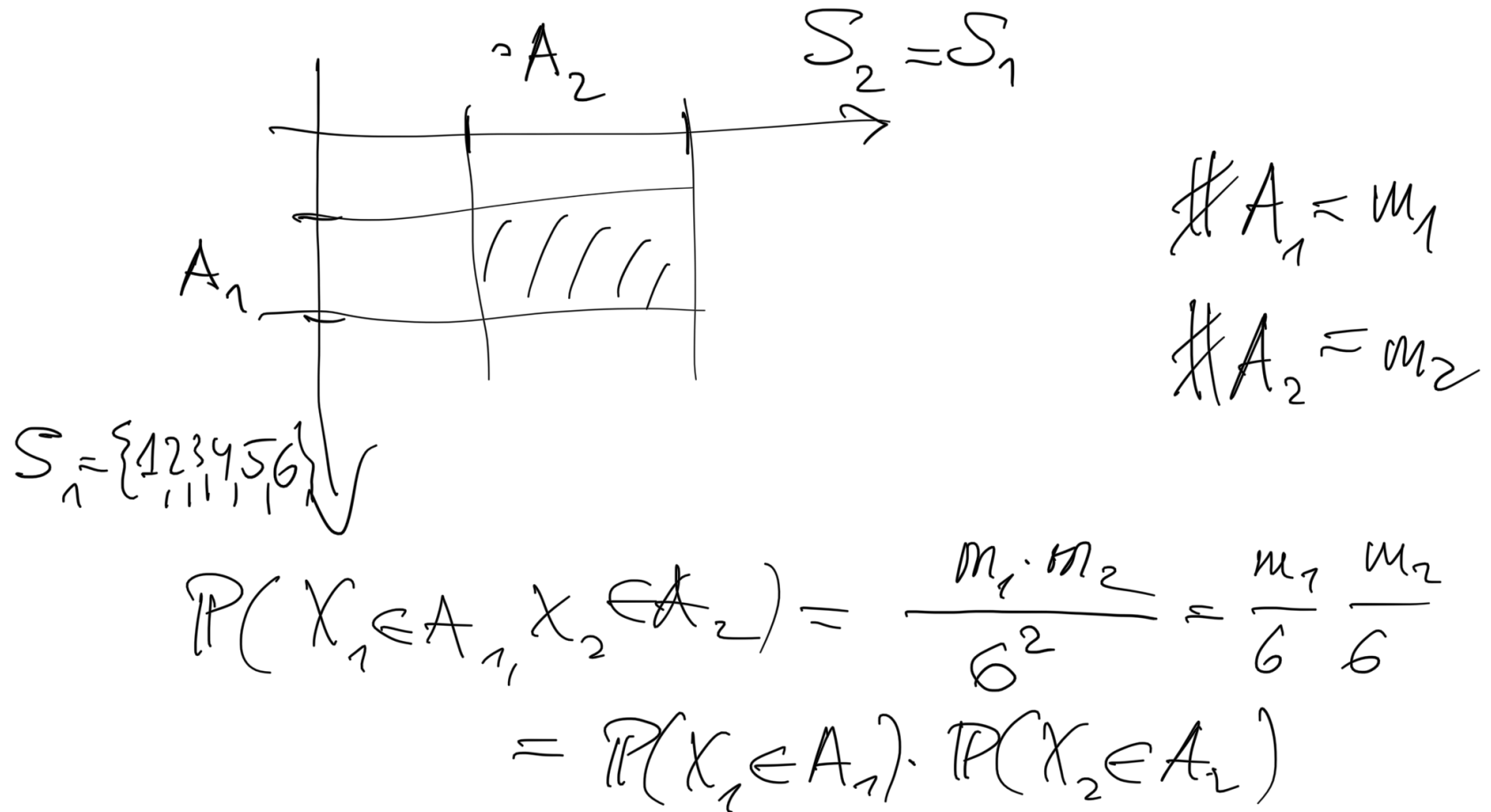
Die Verhältnisse

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) : \mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A'_2)$$

hängen nicht ab von $A_1 (\subset S_1)$

(und sind in diesem Sinn “ausgeglichen”).

Beispiel: Zweimaliges (gewöhnliches) Würfeln (X_1, X_2) :



$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ✓
 $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) = \frac{m_1 \cdot m_2}{6^2} = \frac{m_1}{6} \cdot \frac{m_2}{6}$
 $= \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in A_2)$

Beispiel: Zweimaliges (gewöhnliches) Würfeln (X_1, X_2) :

X_1 und X_2 sind unabhängig. In der Tat:

Seien $A_1, A_2 \subset \{1, \dots, 6\}$ mit $\#A_1 =: m_1$, $\#A_2 =: m_2$.

Dann ist $\#A_1 \times A_2 = m_1 \cdot m_2$,

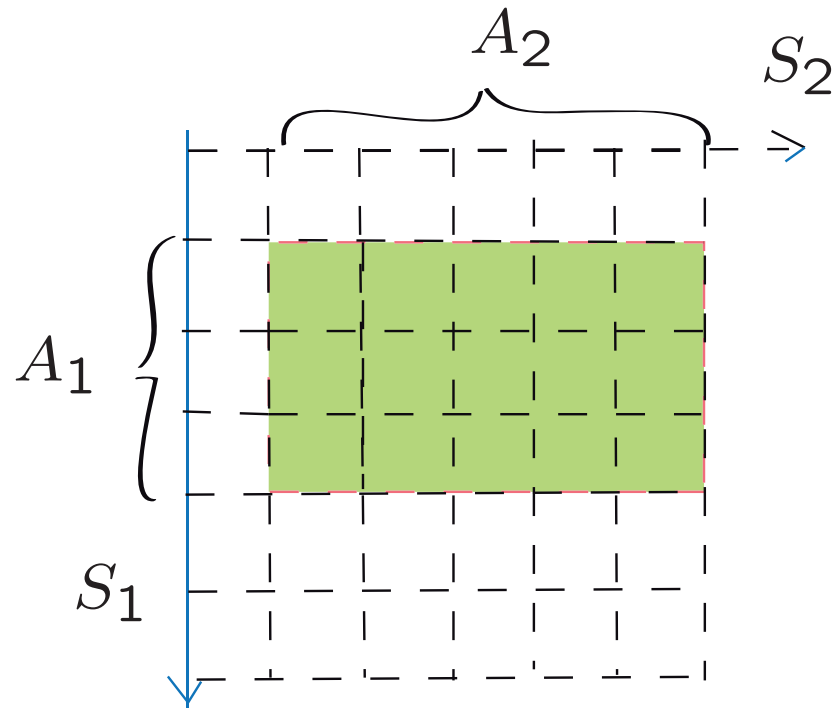
also

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2)$$

$$= \mathbf{P}((X_1, X_2) \in A_1 \times A_2)$$

$$= \frac{m_1 m_2}{36} = \frac{m_1}{6} \cdot \frac{m_2}{6}$$

$$= \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2).$$



$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) \\
 &= \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2).
 \end{aligned}$$

Für die Prüfung der Unabhängigkeit *diskreter* Zufallsvariabler
 reicht es fürs Nachprüfen der Produktformel,
 statt der *Teilmengen* $A_1 \subset S_1$, $A_2 \subset S_2$
 die einzelnen *Ausgänge* $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$ zu betrachten:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}((a_1, a_2)) & = & \mathcal{P}_1(a_1) \mathcal{P}_2(a_2) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \mathcal{P}((X_1, X_2) = (a_1, a_2)) & & \mathcal{P}(X_1 = a_1) \mathcal{P}(X_2 = a_2)
 \end{array}$$

Für diskrete Zufallsvariable gilt: X_1, X_2 sind unabhängig
genau dann,

wenn für alle $a_1 \in S_1$ und $a_2 \in S_2$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in A_2) \\
 & \stackrel{!}{=} \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)}_{= \mathbb{P}(X_1 = a_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = a_2)} \\
 & \stackrel{!}{=} \sum_{a_1 \in A_1} \mathbb{P}(X_1 = a_1) \cdot \sum_{a_2 \in A_2} \mathbb{P}(X_2 = a_2) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 \in A_2)
 \end{aligned}$$

Für diskrete Zufallsvariable gilt: X_1, X_2 sind unabhängig
genau dann,

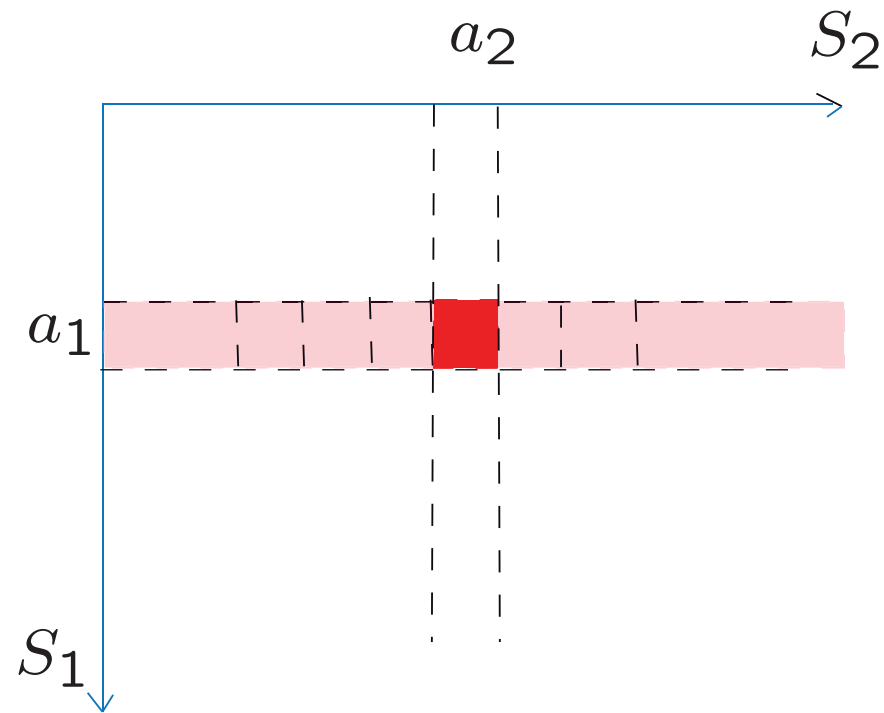
wenn für alle $a_1 \in S_1$ und $a_2 \in S_2$ gilt:

$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}(X_2 = a_2)$$

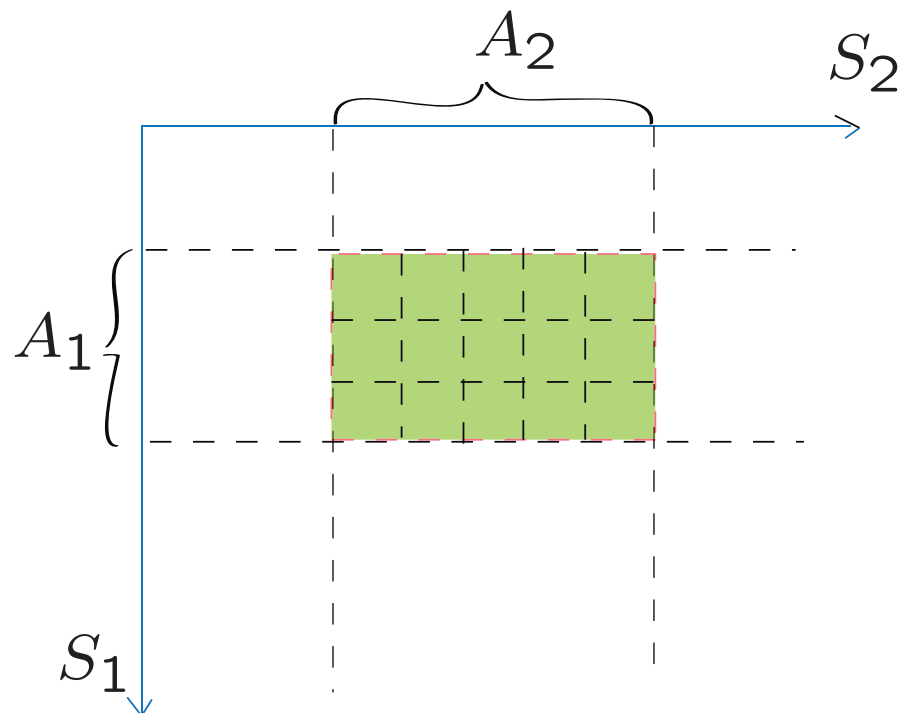
Denn:

“ $\implies$ ” ist klar (wähle $A_1 := \{a_1\}$, $A_2 := \{a_2\}$).

$$\begin{aligned} \text{“}\Leftarrow\text{”}: \quad \mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) &= \sum_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) \\ &= \sum_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \mathbf{P}(X_2 = a_2) \\ &= \sum_{a_1 \in A_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1) \sum_{a_2 \in A_2} \mathbf{P}(X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \mathbf{P}(X_2 \in A_2). \end{aligned}$$



$$\mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 = a_1)\mathbf{P}(X_2 = a_2)$$



$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) \\ = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\mathbf{P}(X_2 \in A_2). \end{aligned}$$

$$\left(\rho(a_1, a_2) \right)_{\substack{a_1 \in \Sigma_1 \\ a_2 \in \Sigma_2}}$$

Ein handliches Kriterium für die Unabhängigkeit zweier diskreter Zufallsvariablen ist die Proportionalität der Zeilen* der Matrix ihrer gemeinsamen Verteilungsgewichte $\rho(a_1, a_2)$.

*oder auch der Spalten

Ein handliches Kriterium für die Unabhängigkeit zweier diskreter Zufallsvariabler ist die Proportionalität der Zeilen* der Matrix ihrer gemeinsamen Verteilungsgewichte $\rho(a_1, a_2)$.

In der Tat ist das hinreichend: dann ist nämlich

$\rho(a_1, \cdot)$ (das ist die Zeile namens a_1) ja auch proportional zu $\rho_2(\cdot) := \sum_{a'_1 \in S_1} \rho(a'_1, \cdot)$ (das ist die Summe der Zeilen), also gilt

$$(*) \quad \rho(a_1, a_2) = k(a_1)\rho_2(a_2)$$

für irgendwelche nichtnegativen Zahlen $k(a_1)$.

Summiert man (*) über $a_2 \in S_2$, so erhält man $\rho_1(a_1) = k(a_1)$.

Damit wird (*) zur Produktformel von Folie 11.

Umgekehrt impliziert die Produktformel von Folie 11 die Proportionalität der Zeilen* der Matrix $(\rho(a_1, a_2))_{a_1 \in S_1, a_2 \in S_2}$ (Übung).

*oder auch der Spalten