

# Vorlesung 5a

## Zufallsvariable mit Dichten:

Transformationen, Exponentialverteilung,  
Normalverteilung

Teil 1

Transformationen

## Drei Beispiele:

A. Sei  $U$  uniform verteilt auf  $[0, 1]$ . Gefragt ist nach Verteilungsfunktion und Dichte von  $X := U^2$ .

$$F_X(b) = \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{b}) = \sqrt{b}, \quad 0 \leq b \leq 1.$$

$$\sqrt{b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a) da, \quad 0 \leq b \leq 1.$$

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{b}}, & 0 < b \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von } X.$$

B. Sei  $U$  uniform verteilt auf  $[0, 2]$ . Gefragt ist nach Verteilungsfunktion und Dichte von  $X := U^2$ .

$X$  hat Wertebereich  $[0, 4]$ .

$$F_X(b) = \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(U \leq \sqrt{b}) = \frac{1}{2}\sqrt{b}, \quad 0 < b \leq 4.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a) da, \quad 0 < b \leq 4.$$

$$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{b}}, & 0 \leq b \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von } X.$$

C. Sei  $U$  uniform verteilt auf  $[0, 1]$ .

Gefragt ist nach der Dichte von  $X := -\ln U$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \leq b) &= \mathbf{P}(-\ln U \leq b) = \mathbf{P}(\ln U \geq -b) \\ &= \mathbf{P}(U \geq e^{-b}) = \mathbf{P}(U \in [e^{-b}, 1]) \\ &= 1 - e^{-b} \stackrel{!}{=} \int_0^b f(a) da, \quad b \geq 0.\end{aligned}$$

$$f(b) = \begin{cases} e^{-b}, & b \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ist Dichtefunktion von } X.$$

Zufallsvariable  $X$  mit der Eigenschaft

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \quad b \geq 0,$$

sind uns schon (implizit) begegnet

bei der Approximation der Verteilung von  $pT$ ;

dabei war  $T$  Geom( $p$ )-verteilt mit kleinem  $p$ .

Wir sprachen damals von der

*Exponentialapproximation der geometrischen Verteilung,*

siehe V4a.

## Affin lineare Transformation:

$X$  habe Verteilungsfunktion  $F_X$ .

Was ist dann die **Verteilungsfunktion von  $Y := \beta X + \gamma$** ?

Dabei sei  $\beta > 0$ .

$$\begin{aligned} & F_Y(b) \\ &= \mathbf{P}(Y \leq b) = \mathbf{P}(\beta X + \gamma \leq b) \\ &= \mathbf{P}(\beta X \leq b - \gamma) = \mathbf{P}\left(X \leq \frac{b - \gamma}{\beta}\right) \\ &= F_X\left(\frac{b - \gamma}{\beta}\right) \end{aligned}$$

$X$  habe Dichte  $f_X(a)da$ .

Was ist dann die **Dichte von  $Y := \beta X + \gamma$** ?

Der Einfachheit halber nehmen wir an: Die Dichtefunktion  $f_X$  ist stückweise stetig. Dann ist in allen Stetigkeitspunkten

$$f_Y(b) = F'_Y(b) = F'_X\left(\frac{b - \gamma}{\beta}\right) \frac{1}{\beta}$$

Die Dichte von  $Y$  ist somit  $f_Y(b) db = f_X\left(\frac{b - \gamma}{\beta}\right) \frac{db}{\beta}$

Zum Merken: Schlag nach beim Urbild,  
und vergiss den Streckungsfaktor nicht!