Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten:

Transformationen, Exponentialverteilung, Normalverteilung

Teil 4

Die Standardnormalverteilung auf $\mathbb{R}$

Die folgende Definition beinhaltet

die wichtigste Verteilung der Stochastik:

Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\, da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\, da}$$

heißt standard-normalverteilt.

Die folgende Definition beinhaltet

die wichtigste Verteilung der Stochastik:

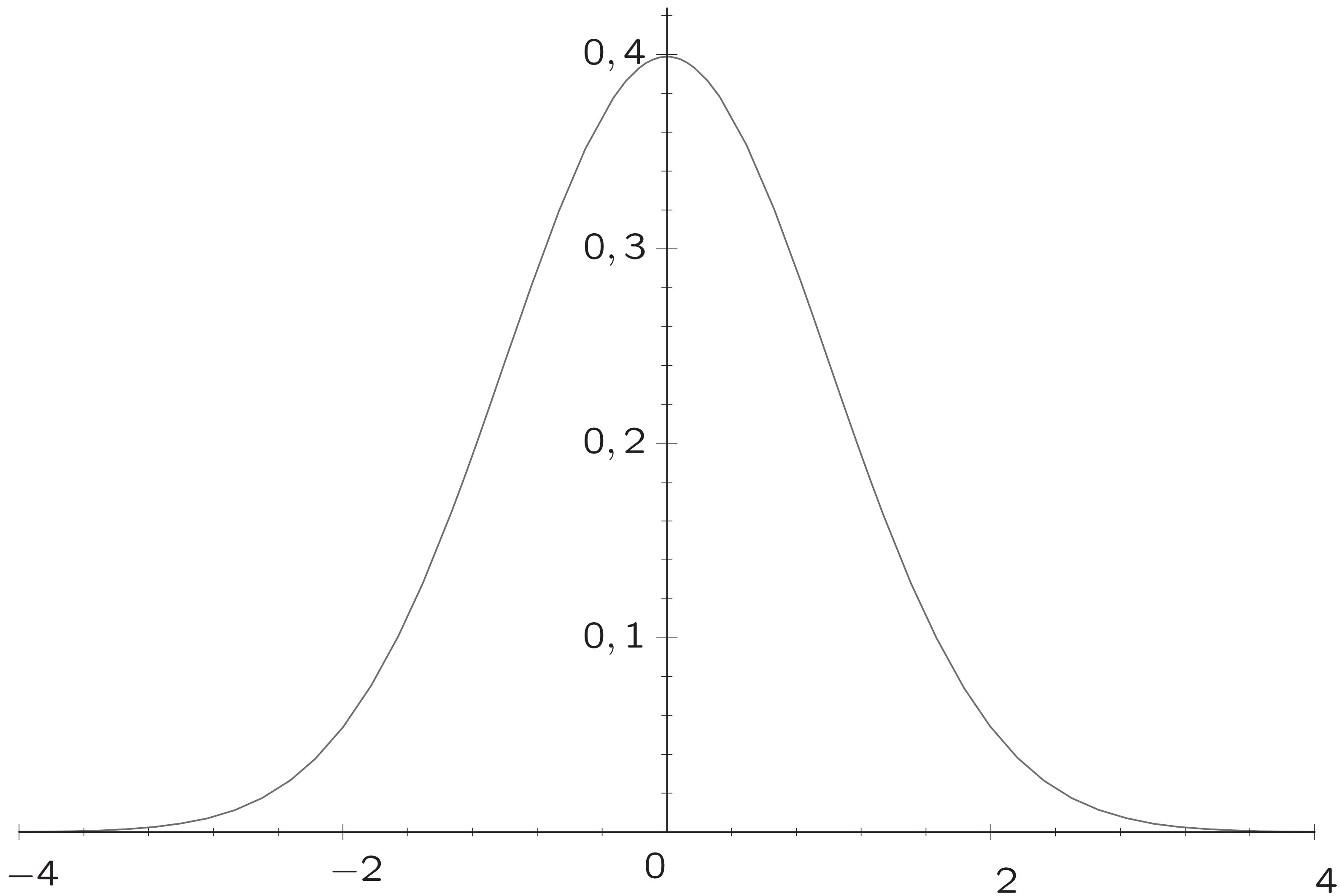
Eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Z mit Dichte

$$\boxed{\varphi(a)\,da := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2}\,da}$$

heißt standard-normalverteilt.

Wir werden bald auf geometrischem Wege sehen, dass gilt
(vgl. die erste Aufgabe auf S. 72 im Buch):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2/2} = \sqrt{2\pi}, \quad \text{also} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a)\,da = 1.$$


0, 4
0, 3
0, 2
0, 1
−4
−2
0
2
4

Für ein standard-normalverteiltes Z ist

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{E}[Z^2] = 1.$$

Denn aus Symmetriegründen ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a\, e^{-a^2/2}\, da = 0$,

und mit partieller Integration bekommt man

Für ein standard-normalverteiltes Z ist

$$\mathbf{E}[Z] = 0, \quad \mathbf{E}[Z^2] = 1.$$

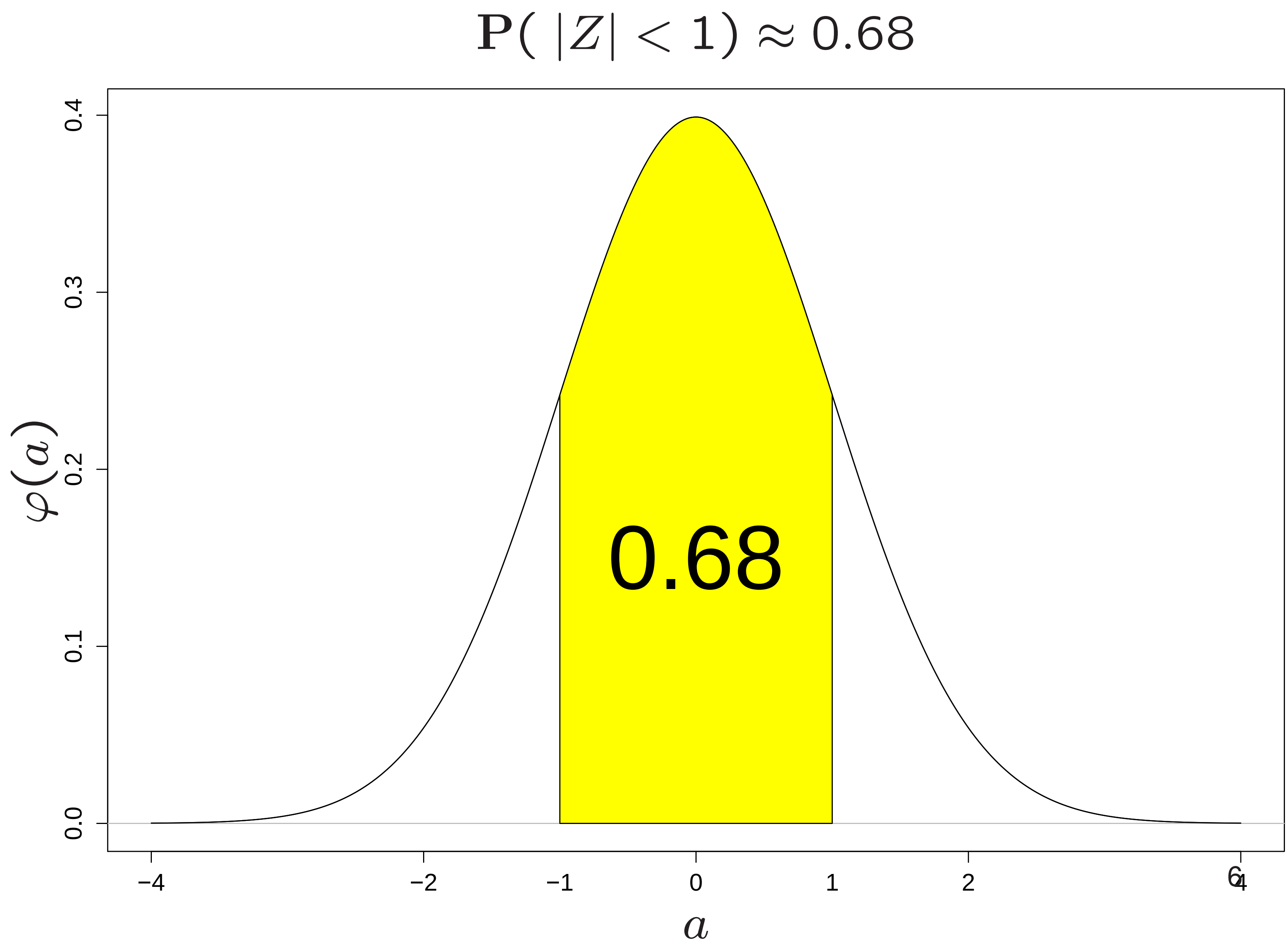
Denn aus Symmetriegründen ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a\, e^{-a^2/2}\, da = 0$,

und mit partieller Integration bekommt man

$$\int_{-\infty}^{\infty} a^2\, e^{-a^2/2}\, da = \int_{-\infty}^{\infty} a\, a e^{-a^2/2}\, da$$

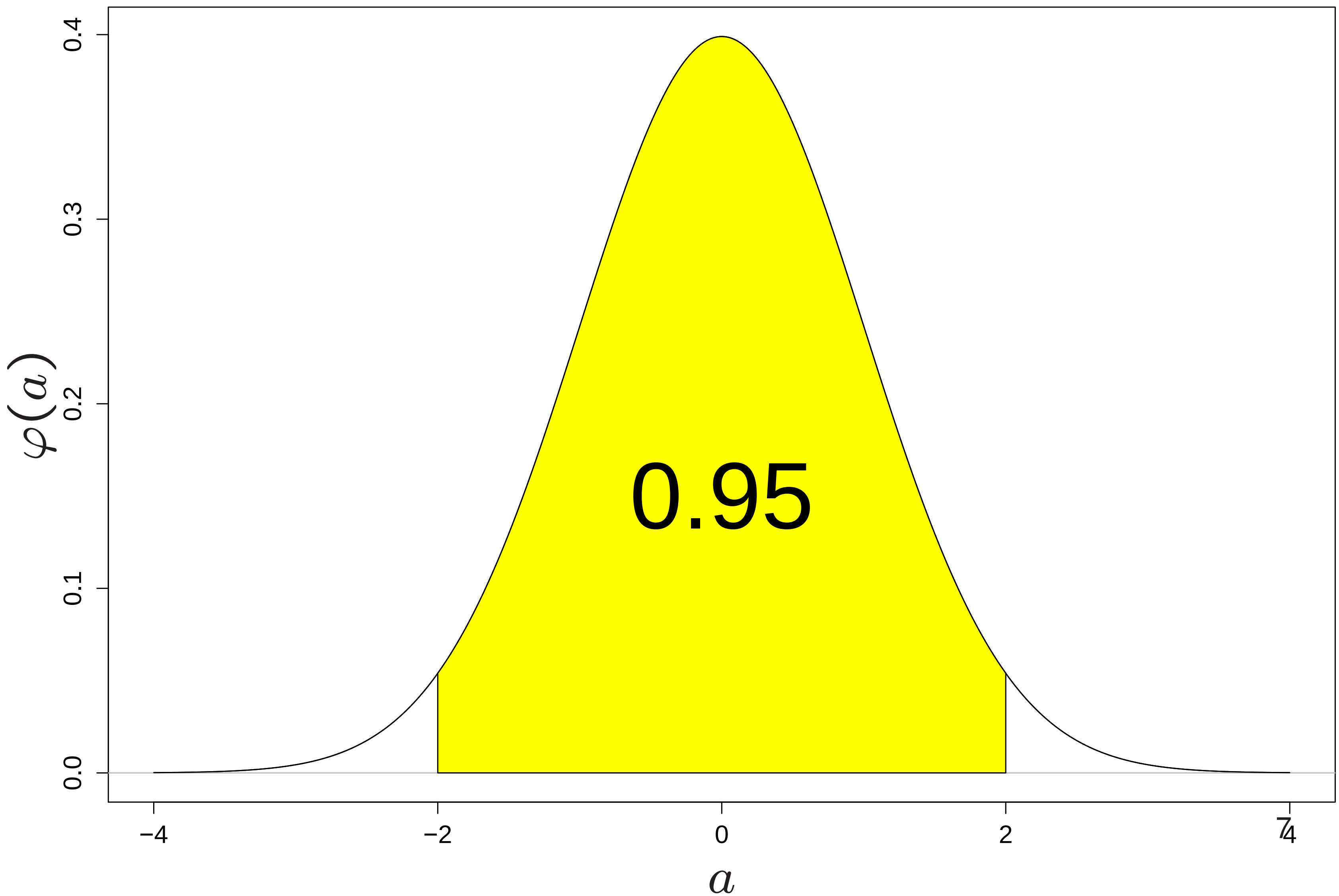
$$= -a\, e^{-a^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2/2}\, da = 0 + \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}.$$

Zwei für die Praxis wichtige Zahlen:



$\mathbf{P}(\ |Z| < 1) \approx 0.68$
0.68
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
$\varphi(a)$
−4
−2
−1
0
1
2
4
6
a

$$\mathbf{P}(\ |Z| < 2\ ) \approx 0.95$$



$$\Phi(b) := \int_{-\infty}^{b} \varphi(a)\, da$$

ist die Standard-Normalverteilungsfunktion.

Es gibt für sie keinen expliziten analytischen Ausdruck

(der ohne die Formulierung als Integral bzw. Stammfunktion auskommt).

Der R-Befehl dafür ist `pnorm(b)` .

Affin lineare Transformation einer standard-normalverteilten ZV'e

Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann hat

$$X := \sigma Z + \mu \;:$$

die Dichte

Affin lineare Transformation einer standard-normalverteilten ZV'e

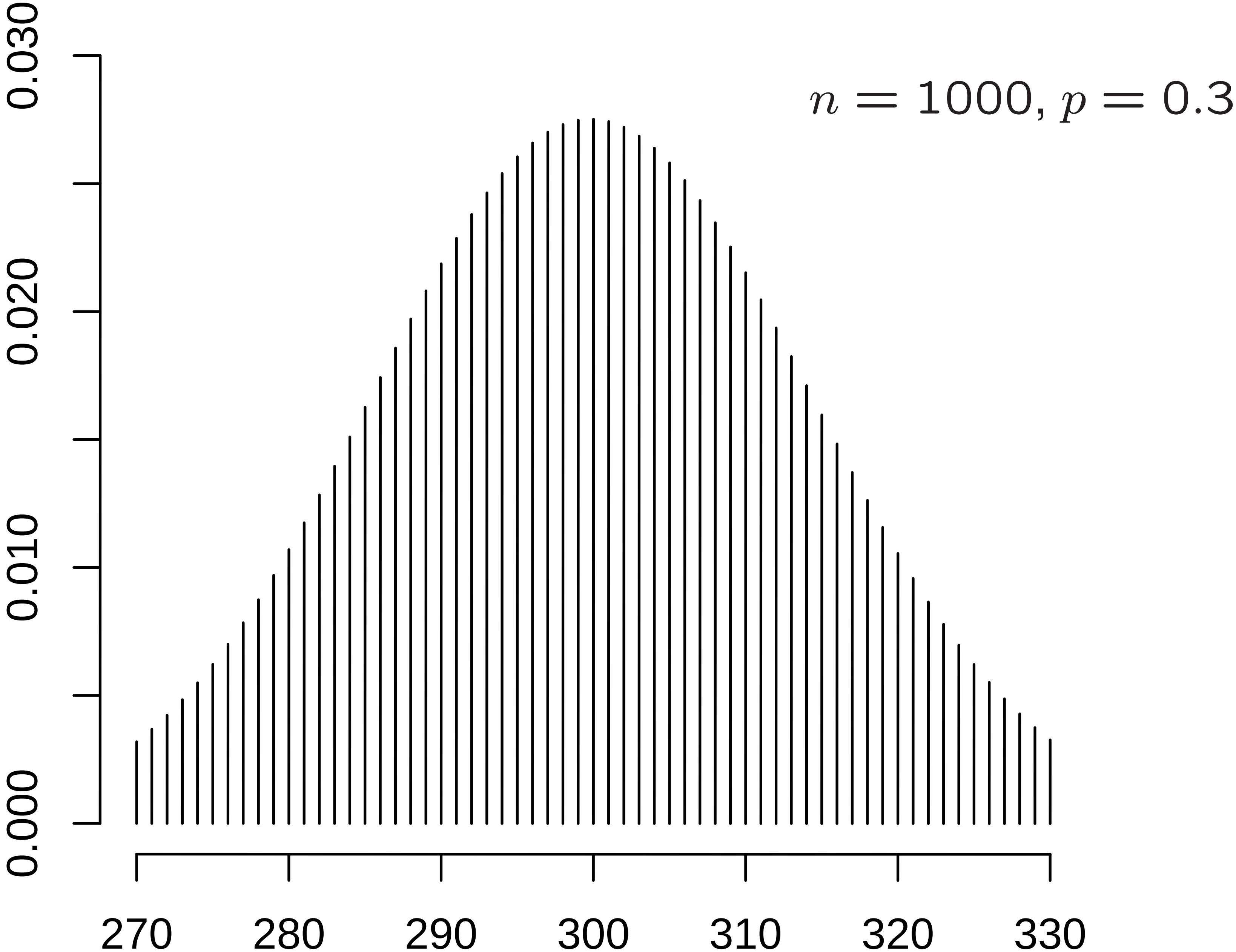
Sei Z standard-normalverteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Dann hat

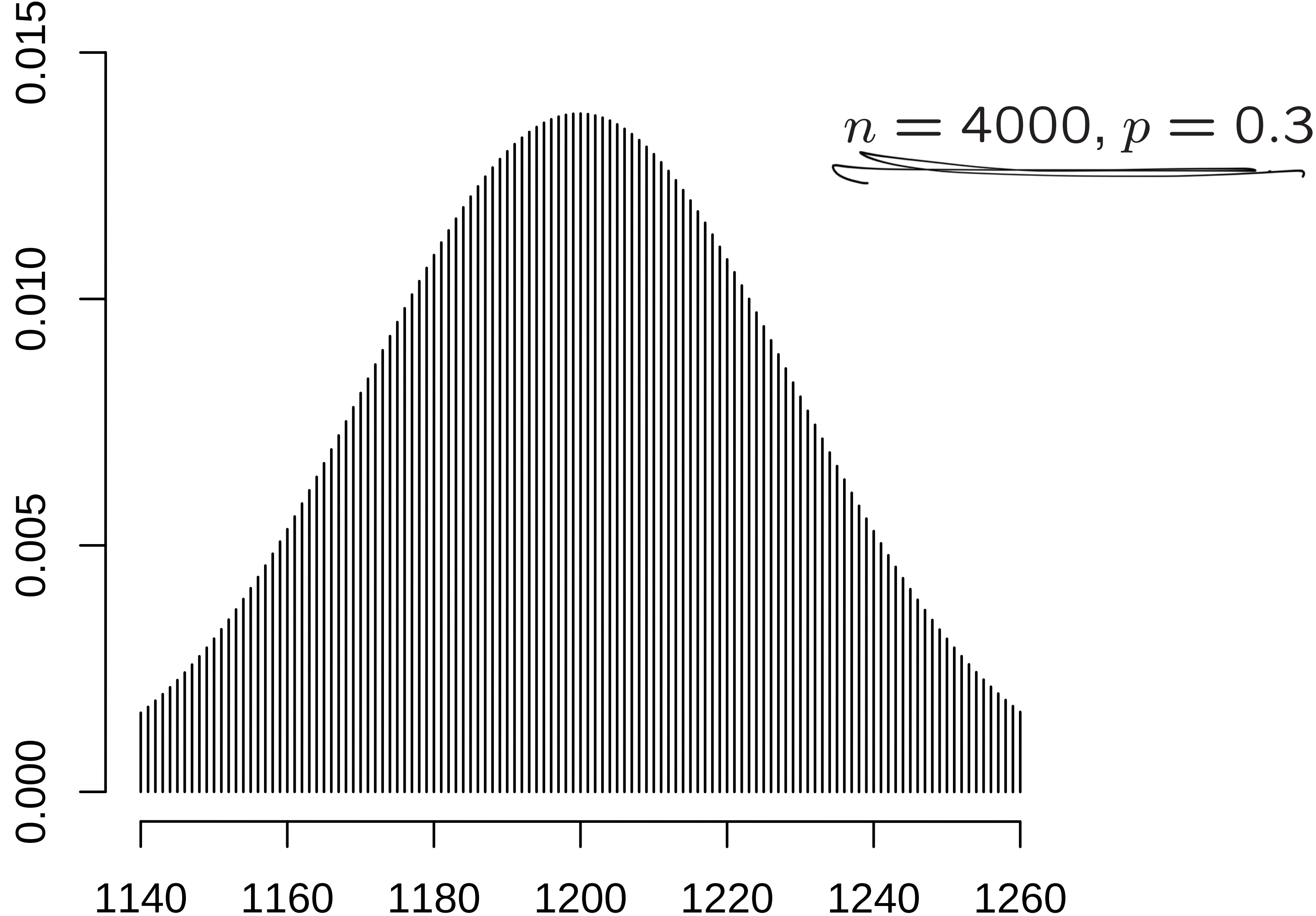
$$X := \sigma Z + \mu \;:$$

die Dichte

$$\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\,da = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,da\,.$$

Die Gaußsche Glockenkurve sieht man auch entstehen
aus den Binomialgewichten mit großem n und großem npq,
wenn man sie “geeignet ins Bild bringt”:


$n = 1000, p = 0.3$
0.000
0.010
0.020
0.030
270
280
290
300
310
320
330



$n = 4000, p = 0.3$
0.000
0.005
0.010
0.015
1140
1160
1180
1200
1220
1240
1260

Mehr dazu bald in der Vorlesung!