

Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten:

Transformationen, Exponentialverteilung,
Normalverteilung

Teil 2

Exponentialverteilung

Definition: Die reellwertige Zufallsvariable X heißt
standard-exponentialverteilt, falls

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \quad b \geq 0.$$

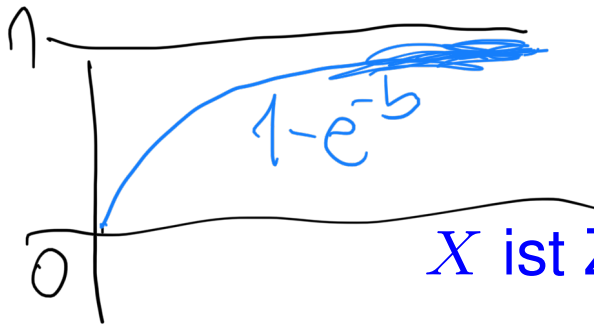
Definition: Die reellwertige Zufallsvariable X heißt
standard-exponentialverteilt, falls

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \quad b \geq 0.$$

Äquivalent dazu ist:

X ist Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$b \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } b < 0 \\ 1 - e^{-b} & \text{für } b \geq 0. \end{cases}$$



Definition: Die reellwertige Zufallsvariable X heißt **standard-exponentialverteilt**, falls

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \quad b \geq 0.$$

Äquivalent dazu ist:

X ist Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$b \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } b < 0 \\ 1 - e^{-b} & \text{für } b \geq 0. \end{cases}$$

Äquivalent dazu ist:

X ist Zufallsvariable mit Dichte $e^{-a} da$, $a \geq 0$.

Siehe Teil 1 mit $\beta = \frac{1}{\alpha}$, $\gamma = 0$.

Ist X standard-exponentialverteilt,

dann hat $\frac{X}{\alpha}$ die Dichte

$$\underline{\alpha e^{-\alpha b} db, \quad b \geq 0.}$$

Ist X standard-exponentialverteilt,

dann hat $\frac{X}{\alpha}$ die Dichte

$$\alpha e^{-\alpha b} db, \quad b \geq 0.$$

Eine Zufallsvariable Y mit dieser Dichte heißt
exponentialverteilt mit Parameter α , kurz $\text{Exp}(\alpha)$ -verteilt.

Ist X standard-exponentialverteilt,
dann hat $\frac{X}{\alpha}$ die Dichte

$$\alpha e^{-\alpha b} db, \quad b \geq 0.$$

Eine Zufallsvariable Y mit dieser Dichte heißt
exponentialverteilt mit Parameter α , kurz $\text{Exp}(\alpha)$ -verteilt.

Merke: Ist \underline{Y} $\text{Exp}(\alpha)$ -verteilt, dann ist $\underline{\alpha Y}$ $\text{Exp}(1)$ -verteilt.

Von der geometrischen zur Exponentialverteilung

Betrachten wir eine $\text{Geom}(p)$ -verteilte Zufallsvariable Y mit

$$p = \frac{1}{100}.$$

Es gilt: $\mathbf{E}[Y] = 100$, also hat $\frac{Y}{100}$ Erwartungswert 1.

Betrachten wir eine $\text{Geom}(p)$ -verteilte Zufallsvariable Y mit

$$p = \frac{1}{100}.$$

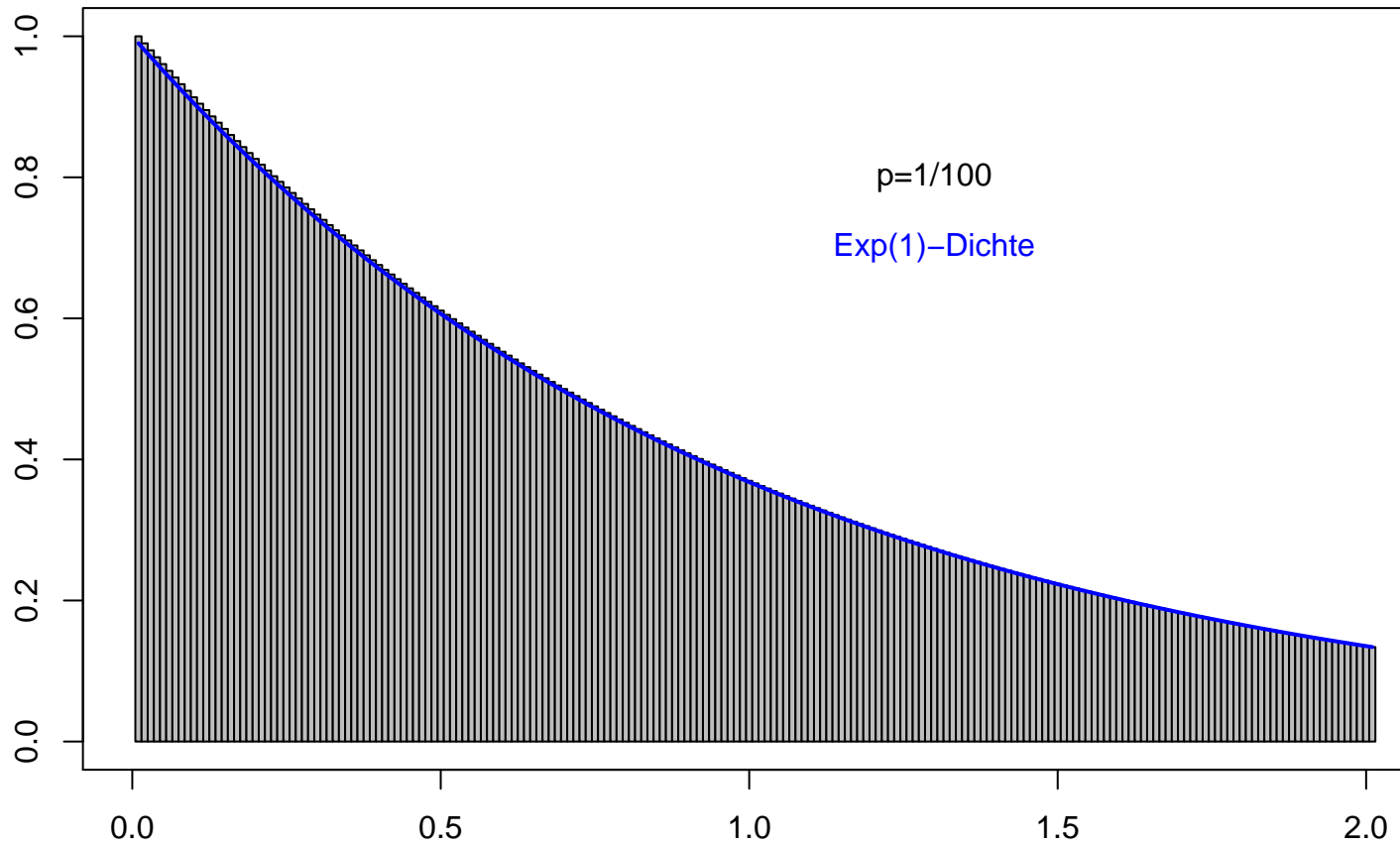
Es gilt: $\mathbf{E}[Y] = 100$, also hat $\frac{Y}{100}$ Erwartungswert 1.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{Y}{100} = \frac{k}{100}\right) &= \mathbf{P}(Y = k) \\ &= \frac{1}{100} \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{k-1} = \frac{1}{100} \left(\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100}\right)^{(k-1)/100} \\ &\approx \frac{1}{100} e^{-(k-1)/100} \approx \mathbf{P}\left(X \in \left[\frac{k-1}{100}, \frac{k}{100}\right]\right) \end{aligned}$$

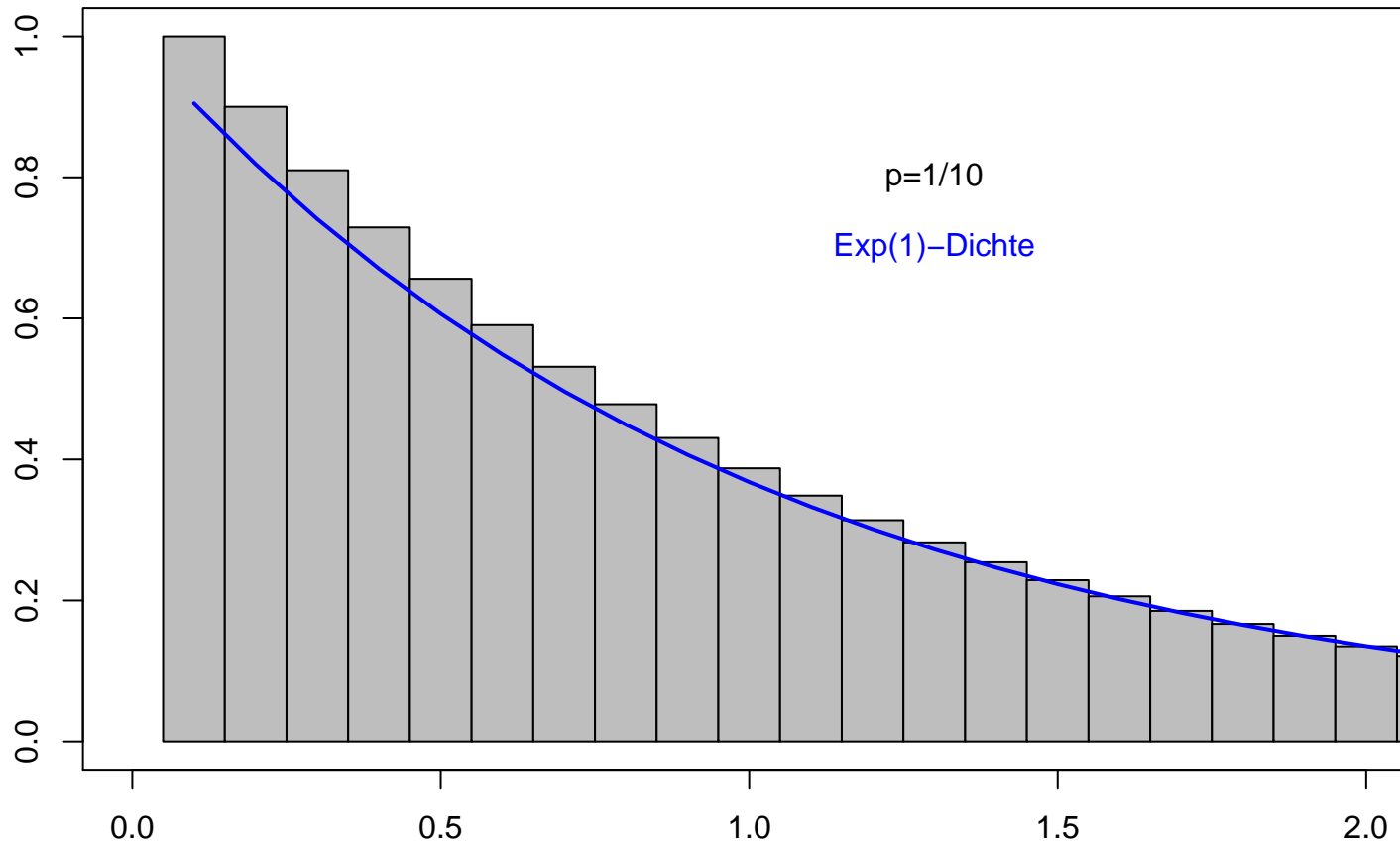
für ein standard-exponentialverteiltes X .

Das wird durch das folgende Bild veranschaulicht:

Gewichte des p -fachen einer $\text{Geom}(p)$ -verteilten ZV



Gewichte des p -fachen einer $\text{Geom}(p)$ -verteilten ZV



Salopp gesprochen:

Für kleines p hat eine $\text{Geom}(p)$ -verteilte Zufallsvariable Y
einen großen Erwartungswert, nämlich $\frac{1}{p}$.

Man holt die Verteilung von Y zurück ins Schaubild,
indem man pY betrachtet.

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:
(Vorlesung 4a und Buch Seite 42):

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt
mit $\mathbf{E}[X_n] \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} > t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} > t\right) \rightarrow e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Also:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} > t\right) \rightarrow \mathbf{P}(X > t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

wobei X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable ist.

Man sagt dafür auch:

Die Folge der Zufallsvariablen $X_n/\mathbf{E}[X_n]$

konvergiert in Verteilung

gegen die Zufallsvariable X .