Vorlesung 5a

Zufallsvariable mit Dichten:

Transformationen, Exponentialverteilung,

Normalverteilung

Teil 2

Exponentialverteilung

Definition: Die reellwertige Zufallsvariable X heißt

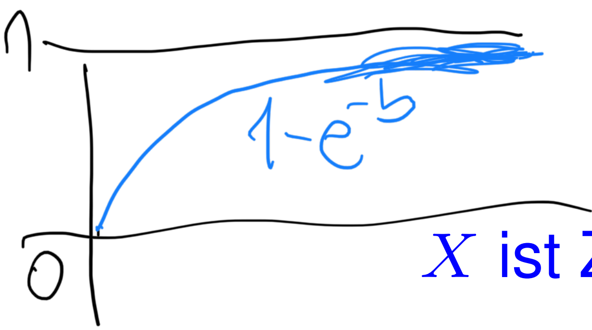
standard-exponentialverteilt, falls

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \quad b \geq 0.$$

Definition: Die reellwertige Zufallsvariable X heißt

standard-exponentialverteilt, falls

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \quad b \geq 0.$$



Äquivalent dazu ist:

X ist Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$b \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } b < 0 \\ 1 - e^{-b} & \text{für } b \geq 0. \end{cases}$$

Definition: Die reellwertige Zufallsvariable X heißt

standard-exponentialverteilt, falls

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}, \quad b \geq 0.$$

Äquivalent dazu ist:

X ist Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$b \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } b < 0 \\ 1 - e^{-b} & \text{für } b \geq 0. \end{cases}$$

Äquivalent dazu ist:

X ist Zufallsvariable mit Dichte $e^{-a}\,da, \quad a \geq 0.$

Siehe Teil 1 mit $\beta = \frac{1}{\alpha}$, $\gamma = 0$.

Ist X standard-exponentialverteilt,

dann hat $\frac{X}{\alpha}$ die Dichte

$$\alpha e^{-\alpha b} db, \quad b \geq 0.$$

Ist X standard-exponentialverteilt,

dann hat $\frac{X}{\alpha}$ die Dichte

$$\alpha e^{-\alpha b} db, \quad b \geq 0.$$

Eine Zufallsvariable Y mit dieser Dichte heit

exponentialverteilt mit Parameter α, kurz Exp(α)-verteilt.

Ist X standard-exponentialverteilt,

dann hat $\frac{X}{\alpha}$ die Dichte

$$\alpha e^{-\alpha b} db, \quad b \geq 0.$$

Eine Zufallsvariable Y mit dieser Dichte heit

exponentialverteilt mit Parameter α, kurz Exp(α)-verteilt.

Merke: Ist Y Exp(α)-verteilt, dann ist αY Exp(1)-verteilt.

Von der geometrischen zur Exponentialverteilung

Betrachten wir eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable Y mit

$$p = \frac{1}{100}.$$

Es gilt: $\mathbf{E}[Y] = 100$, also hat $\frac{Y}{100}$ Erwartungswert 1.

Betrachten wir eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable Y mit

$$p = \frac{1}{100}.$$

Es gilt: $\mathbf{E}[Y] = 100$, also hat $\frac{Y}{100}$ Erwartungswert 1.

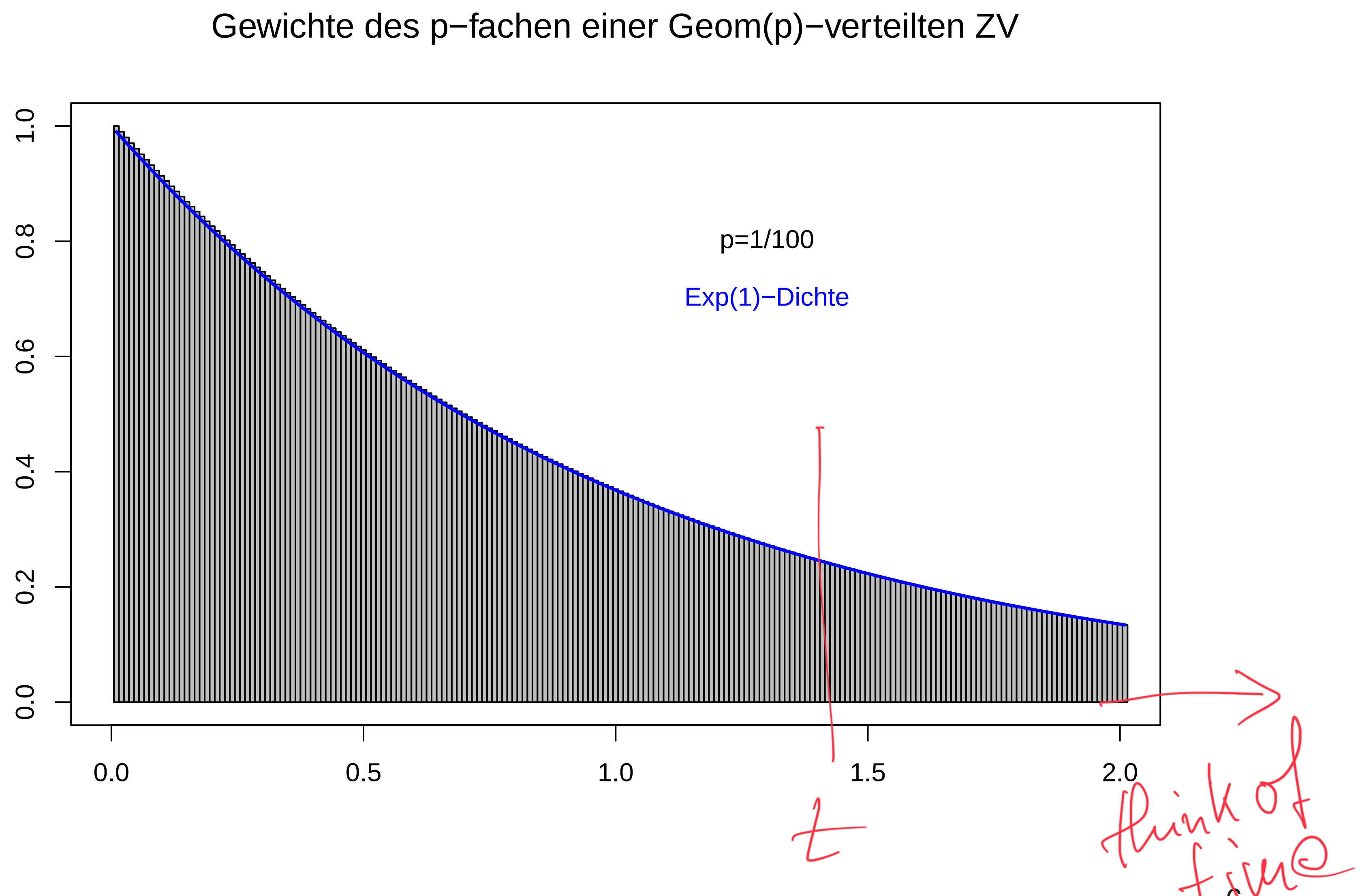
$$\mathbf{P}\left(\frac{Y}{100} = \frac{k}{100}\right) = \mathbf{P}(Y = k)$$

$$= \frac{1}{100}\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{k-1} = \frac{1}{100}\left(\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100}\right)^{(k-1)/100}$$

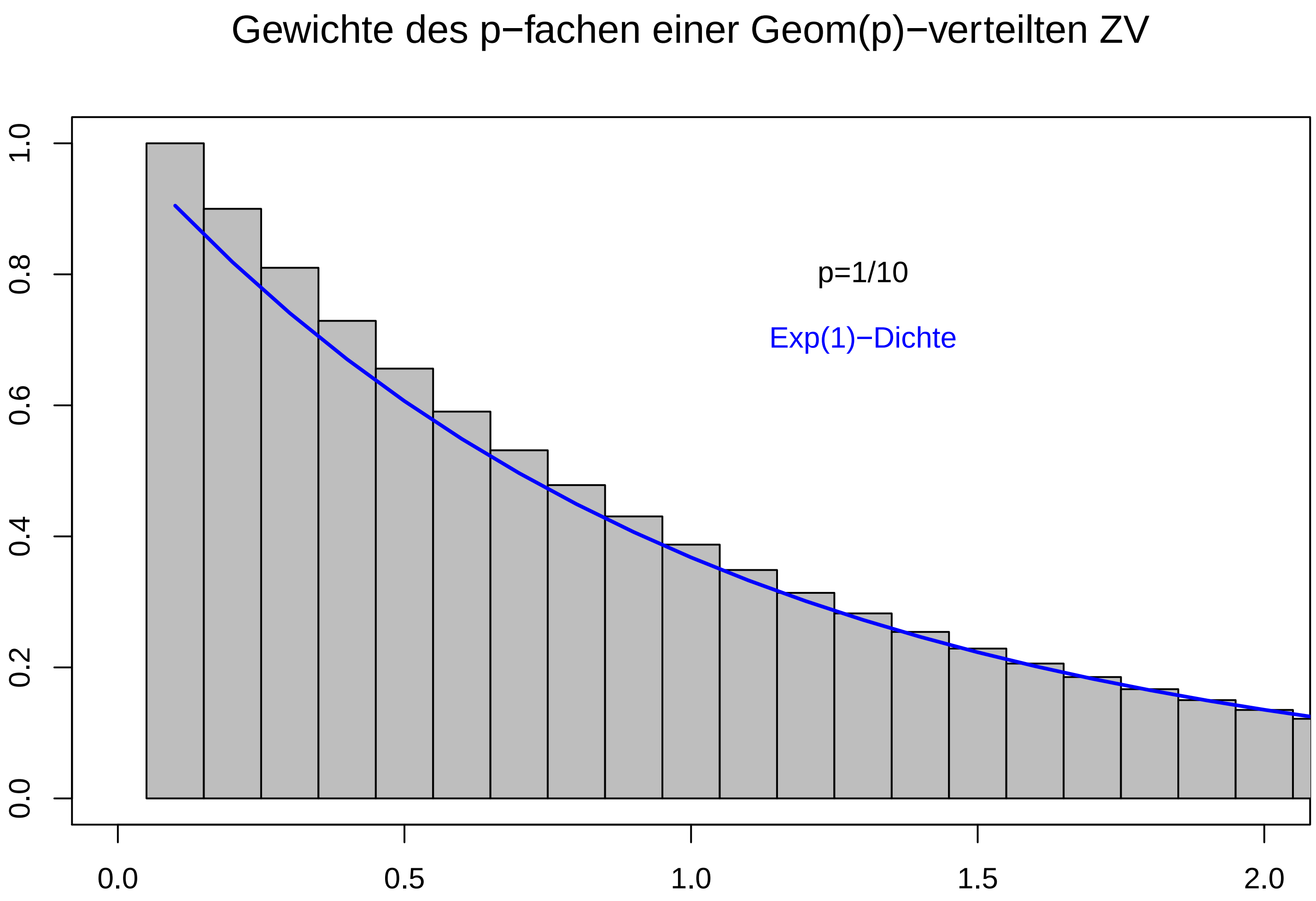
$$\approx \frac{1}{100}\, e^{-(k-1)/100} \approx \mathbf{P}\left(X \in \left[\frac{k-1}{100}, \frac{k}{100}\right]\right)$$

für ein standard-exponentialverteiltes X.

Das wird durch das folgende Bild veranschaulicht:



Gewichte des p−fachen einer Geom(p)−verteilten ZV
p=1/100
Exp(1)−Dichte
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
t
think of time



Gewichte des p−fachen einer Geom(p)−verteilten ZV
p=1/10
Exp(1)−Dichte
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

Salopp gesprochen:

Für kleines p hat eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable Y

einen großen Erwartungswert, nämlich $\frac{1}{p}$.

Man holt die Verteilung von Y zurück ins Schaubild,

indem man pY betrachtet.

Wir erinnern an die “Exponentialapproximation”:

(Vorlesung 4a und Buch Seite 42):

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_n geometrisch verteilt mit $\mathbf{E}[X_n] \to \infty$ für $n \to \infty$, dann gilt:

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} > t\Big) \underset{n\to\infty}{\to} e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} > t\Big) \to e^{-t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Also:

$$\mathbf{P}\Big(\frac{X_n}{\mathbf{E}[X_n]} > t\Big) \to \mathbf{P}(X > t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

wobei X eine standard-exponentialverteilte Zufallsvariable ist.

Man sagt dafür auch:

Die Folge der Zufallsvariablen $X_n/\mathbf{E}[X_n]$

konvergiert in Verteilung

gegen die Zufallsvariable X.