

Vorlesung 4b

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 2

Dichten auf \mathbb{R} bzgl des Längenmaßes

Beginnen wir mit einem **Beispiel**:

X sei eine \mathbb{R}_+ -wertige Zufallsvariable mit

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b} \quad \text{für alle } b \geq 0.$$

$$\mathbf{P}(X \geq b) = ?$$

$$\mathbf{P}(X = b) = ?$$

Für $b = 0$ ist

$$\mathbf{P}(X \geq 0) = 1 = e^{-0} = \mathbf{P}(X > 0).$$

Für $b = 0$ ist

$$\mathbf{P}(X \geq 0) = 1 = e^{-0} = \mathbf{P}(X > 0).$$

Für $b > 0$ und $0 < \varepsilon < b$ ist

$$\begin{aligned} e^{-b} = \mathbf{P}(X > 0) &\leq \mathbf{P}(b \leq X) \\ &\leq \mathbf{P}(b - \varepsilon < X) = e^{-b+\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\implies \mathbf{P}(X \geq b) = e^{-b} = \mathbf{P}(X > b).$$

$$\mathbf{P}(X = b) = \mathbf{P}(X \geq b) - \mathbf{P}(X > b) = 0.$$

Für alle $0 \leq b \leq c$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(b \leq X \leq c) &= \mathbf{P}(b \leq X) - \mathbf{P}(c < X) \\ &= e^{-b} - e^{-c} = \int_b^c e^{-a} da. \end{aligned}$$

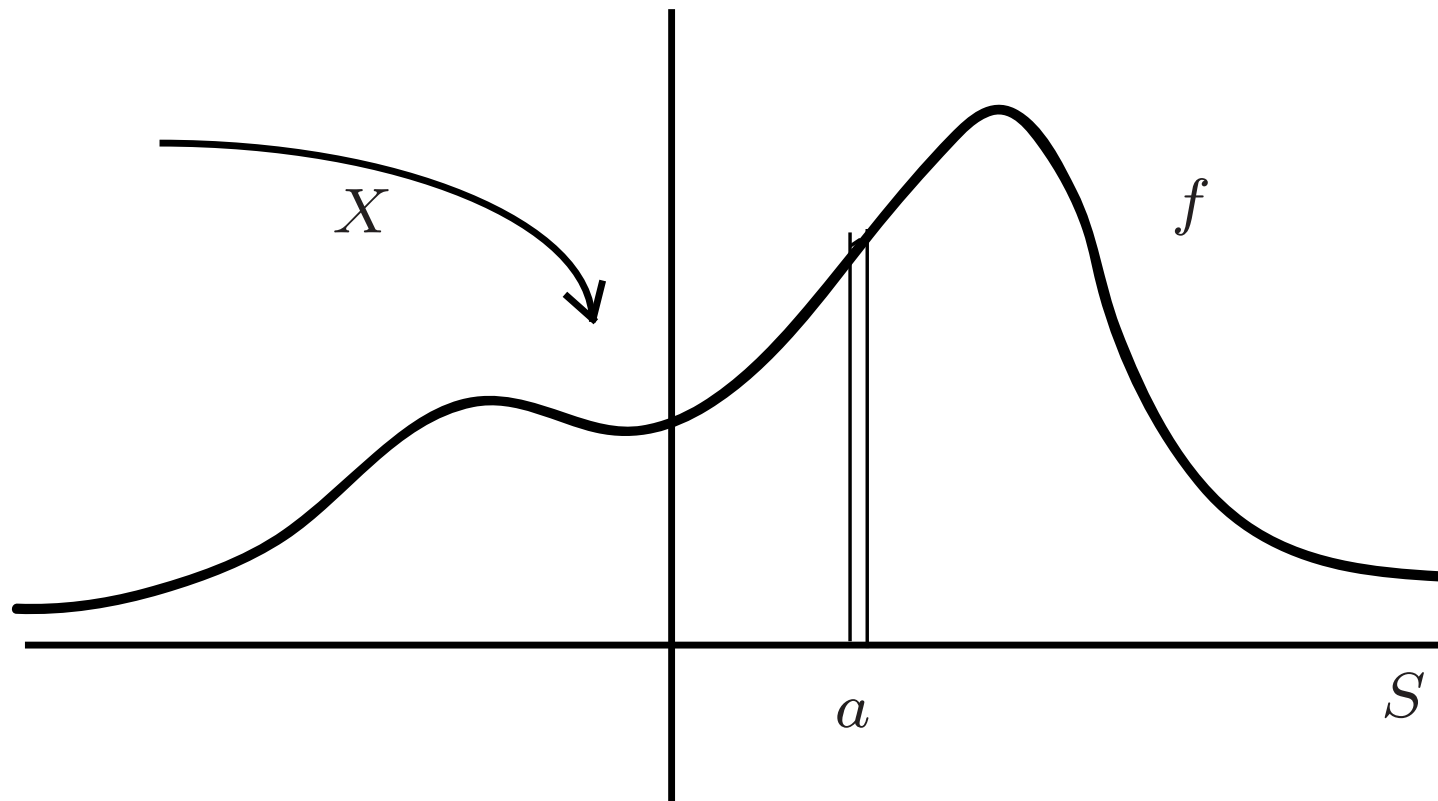
Dieses Beispiel wird im Folgenden verallgemeinert:

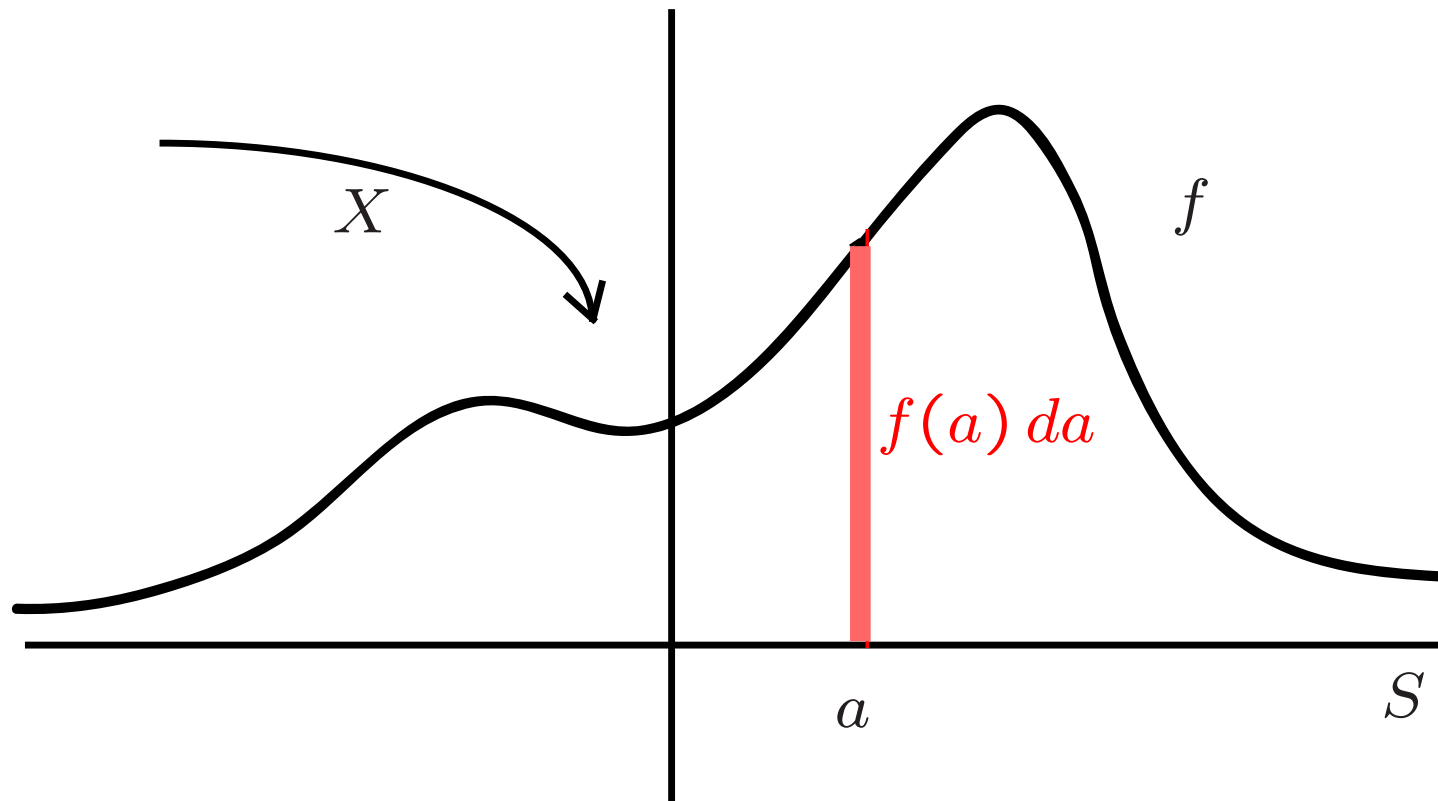
Sei S ein (offenes, abgeschlossenes oder halboffenes)
Intervall mit linker Grenze l und rechter Grenze r ,
und X eine $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Zufallsvariable,
für die $\{X \in S\}$ das sichere Ereignis ist.
(Dabei ist $l = -\infty$ und/oder $r = +\infty$ erlaubt.)

Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$ ist jetzt
gegeben durch “infinitesimale Gewichte” $f(a) da$, wobei

$f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine “integrierbare”
(z.B. stückweise stetige) Funktion ist mit

$$\int_l^r f(a) da = 1.$$





Sei X eine Zufallsvariable mit Wertebereich S .

Gilt für alle Intervalle $[b, c] \subset S$ die Gleichung

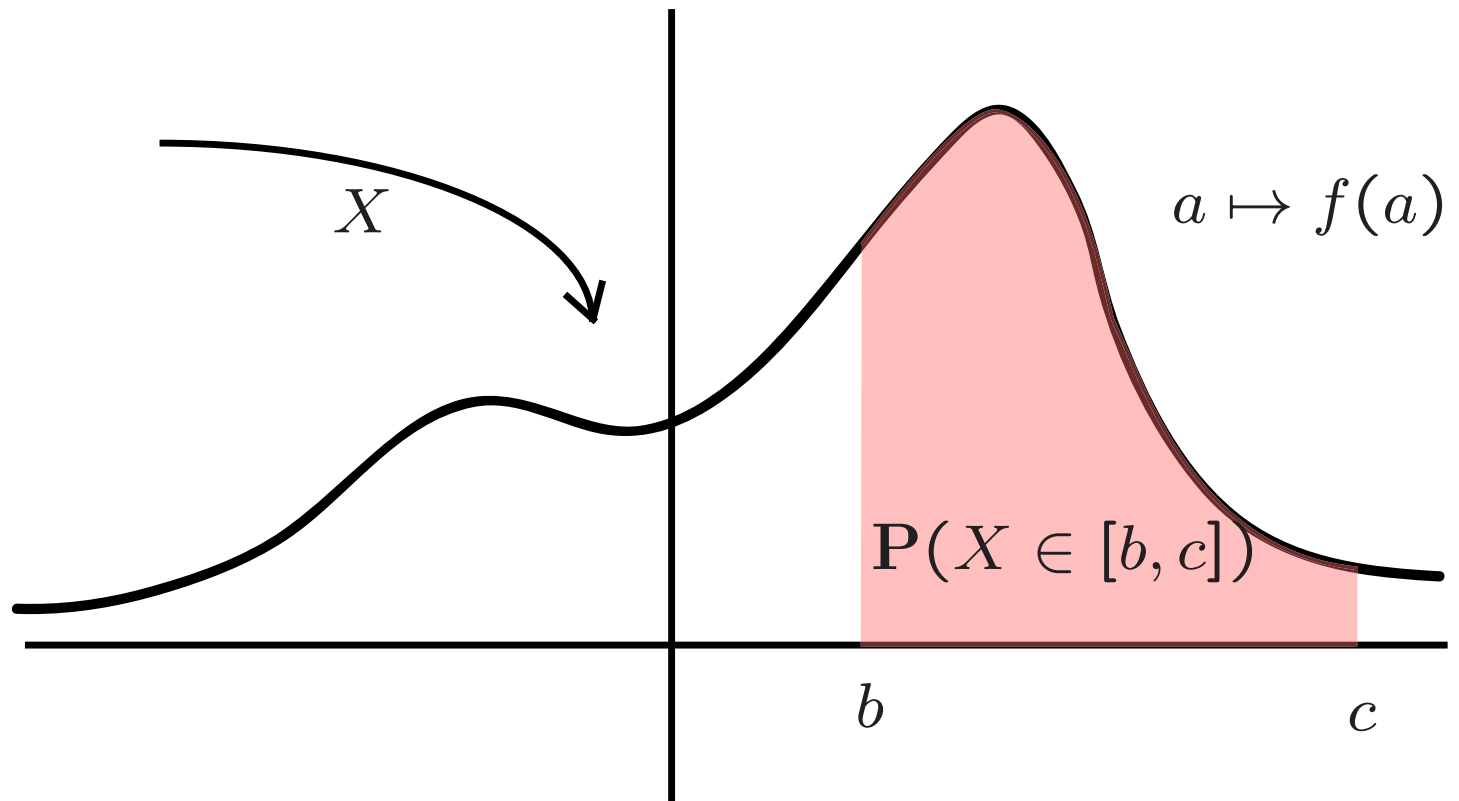
$$\mathbf{P}(X \in [b, c]) = \int_b^c f(a) da ,$$

so sagten wir, dass

X die *Dichte* $f(a) da$ besitzt*,

und nennen f *Dichtefunktion* (der Verteilung) von X .

*Genauer spricht man von der Dichte bzgl des natürlichen Längenmaßes (des Lebesguemaßes) auf \mathbb{R}



Wir schreiben dann kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a) da, \quad a \in S,$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a) da.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:
links als **infinitesimales Raumstück** da (um den Punkt a)
und rechts als **dessen (infinitesimale) Länge** da .

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a) da.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:
links als **infinitesimales Raumstück** da (um den Punkt a)
und rechts als **dessen (infinitesimale) Länge** da .

Diese Gleichung bekommt ihre exakte Bedeutung
“unter dem Integral”:

$$\mathbf{P}(X \in [c, d]) = \int_c^d f(a) da$$

Beispiele:

Eine auf dem Intervall $[0, 2]$
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\frac{1}{2} da, 0 \leq a \leq 2.$

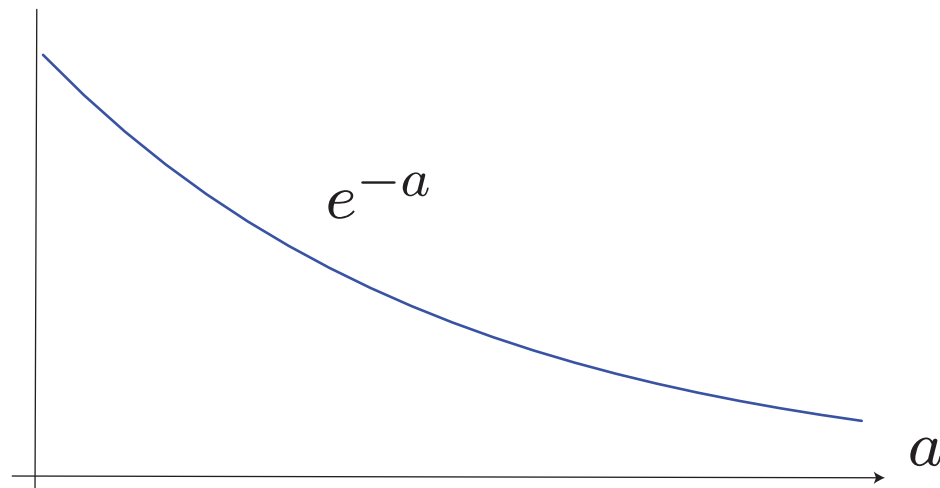
Eine auf einem endlichen Intervall $S = [l, r]$
uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte $\frac{1}{r - l} da, a \in S.$

Die Bedingung $\int_S f(a) da = 1$ kann auch erfüllt sein,
wenn S unendlichen Inhalt hat.

Man denke an das Eingangsbeispiel

$$S = [0, \infty); \quad f(a) = e^{-a}, \quad a \geq 0.$$



Merke:

Für eine Zufallsvariable X mit Dichte $f(a) da$

ist für jedes $b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X = b) = \int_b^b f(a) da = 0.$$

Also gilt (mit naheliegender Schreibweise)

für $b \leq c \in \mathbb{R}$:

$$\int_{(b,c]} f(a) da = \int_{[b,c]} f(a) da = \int_b^c f(a) da.$$

Hat die Zufallsvariable X eine Dichte, so gilt für jede endliche oder abzählbar unendliche Menge A :

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a) = 0.$$

Insbesondere ist X dann nicht diskret.

Umgekehrt gilt also:

Eine diskrete reellwertige Zufallsvariable besitzt keine Dichte (bzg. des natürlichen Längenmaßes auf \mathbb{R}).