

# Vorlesung 4b

## Zufallsvariable mit Dichten

### Teil 3

### Verteilungsfunktionen

Wieder sei  $S$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ , und  $X$  eine (diskrete oder kontinuierliche) Zufallsvariable mit Wertebereich  $S$ .

Die Funktion  $F(b) := F_X(b) := \mathbf{P}(X \leq b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,

heißt *Verteilungsfunktion* von  $X$ .

Wieder sei  $S$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ , und  $X$  eine (diskrete oder kontinuierliche) Zufallsvariable mit Wertebereich  $S$ .

Die Funktion  $F(b) := F_X(b) := \mathbf{P}(X \leq b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,

heißt *Verteilungsfunktion* von  $X$ .

Hat  $X$  die Dichte  $f(a) da$ , so gilt

$$F(b) = \int_{-\infty}^b f(a) da, \quad b \in \mathbb{R}$$

(mit  $f(a) := 0$  für  $a \notin S$ )

Wieder sei  $S$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ , und  $X$  eine (diskrete oder kontinuierliche) Zufallsvariable mit Wertebereich  $S$ .

Die Funktion  $F(b) := F_X(b) := \mathbf{P}(X \leq b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,

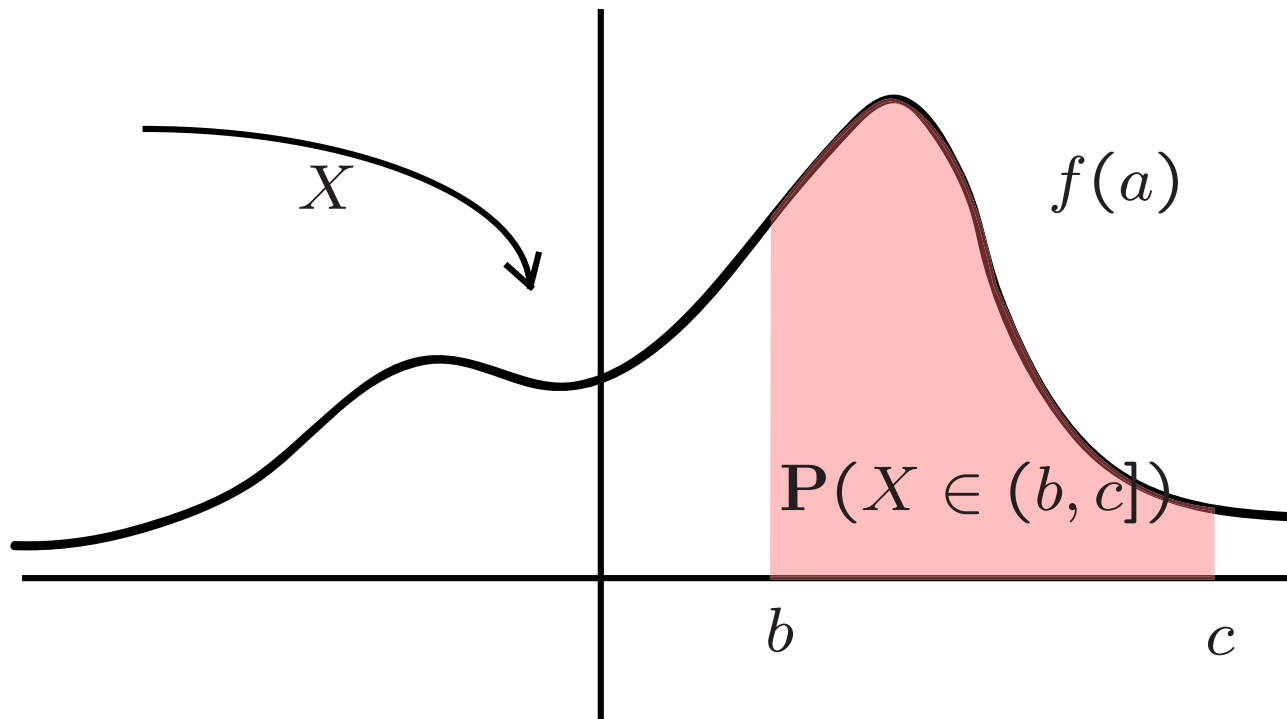
heißt *Verteilungsfunktion* von  $X$ .

Hat  $X$  die Dichte  $f(a) da$ , so gilt

$$F(b) = \int_{-\infty}^b f(a) da, \quad b \in \mathbb{R}$$

(mit  $f(a) := 0$  für  $a \notin S$ )

Ist  $f$  stetig in  $a$ , dann ist  $f(a) = F'(a)$ .



$$\mathbf{P}(X \leq c) - \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(b < X \leq c)$$

$$F(c) - F(b) = \int_b^c f(a) da$$

Man findet den Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung wieder!

## Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Dichte.

Sei  $F$  die Verteilungsfunktion einer reellwertigen Zufallsvariablen  $X$ . Hat  $F$  keine Sprünge *und* ist  $F$  *stückweise stetig differenzierbar*<sup>\*</sup>, dann besitzt  $X$  eine Dichte.

<sup>\*</sup>d.h. es gibt endlich viele disjunkte Intervalle, deren Vereinigung  $\mathbb{R}$  ist, so dass  $F$  eingeschränkt auf jedes dieser Intervalle eine stetige Ableitung hat.

## Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Dichte.

Sei  $F$  die Verteilungsfunktion einer reellwertigen Zufallsvariablen  $X$ . Hat  $F$  keine Sprünge *und* ist  $F$  *stückweise stetig differenzierbar*<sup>\*</sup>, dann besitzt  $X$  eine Dichte.

Denn für jeden Randpunkt  $a$  eines der Intervalle gilt:  $P(X = a) = 0$  (ansonsten hätte  $F$  in  $a$  einen Sprung).

Und innerhalb eines jeden Intervalls gilt nach Voraussetzung der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, siehe die vorige Folie.

<sup>\*</sup>d.h. es gibt endlich viele disjunkte Intervalle, deren Vereinigung  $\mathbb{R}$  ist, so dass  $F$  eingeschränkt auf jedes dieser Intervalle eine stetige Ableitung hat.

Für *diskrete* reellwertige Zufallsvariable  $X$   
ist  $F_X$  stückweise konstant, mit Sprüngen der Höhe

$$\mathbf{P}(X = a), \quad a \in S.$$



Für *diskrete* reellwertige Zufallsvariable  $X$   
ist  $F_X$  stückweise konstant, mit Sprüngen der Höhe

$$\mathbf{P}(X = a), \quad a \in S.$$

Beispiel:

$X$  Binomial(2, 1/2)-verteilt

