Vorlesung 4b

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 3

Verteilungsfunktionen

Zur Erinnerung: Eingangsbeispiel von Teil 2:

$$\mathbb{P}(X > b) = e^{-b}$$

$$\mathbb{P}(X \leq b) = 1 - e^{-b} =: F_X(b)$$

Wieder sei S ein Intervall in $\mathbb{R}$, und X eine (diskrete oder kontinuierliche) Zufallsvariable mit Wertebereich S.

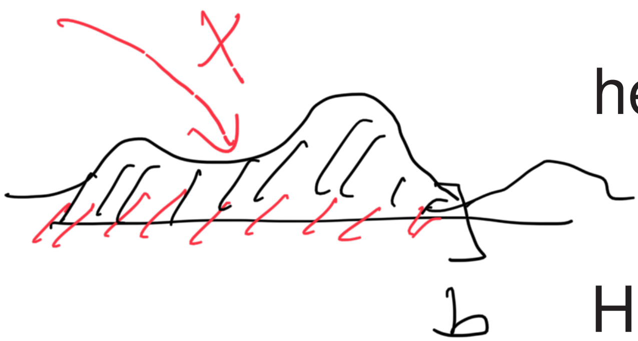
Die Funktion $F(b) := F_X(b) := \mathbf{P}(X \leq b), \quad b \in \mathbb{R}$,

heißt *Verteilungsfunktion* von X.

Wieder sei S ein Intervall in $\mathbb{R}$, und X eine (diskrete oder kontinuierliche) Zufallsvariable mit Wertebereich S.

Die Funktion $F(b) := F_X(b) := \mathbf{P}(X \le b), \quad b \in \mathbb{R}$,

heißt *Verteilungsfunktion* von X.



Hat X die Dichte $f(a)\,da$, so gilt

$$\boxed{F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(a)\,da\,, \quad b \in \mathbb{R}}$$

(mit $f(a) := 0$ für $a \notin S$)

Wieder sei S ein Intervall in $\mathbb{R}$, und X eine (diskrete oder kontinuierliche) Zufallsvariable mit Wertebereich S.

Die Funktion $F(b) := F_X(b) := \mathbf{P}(X \le b), \quad b \in \mathbb{R}$,

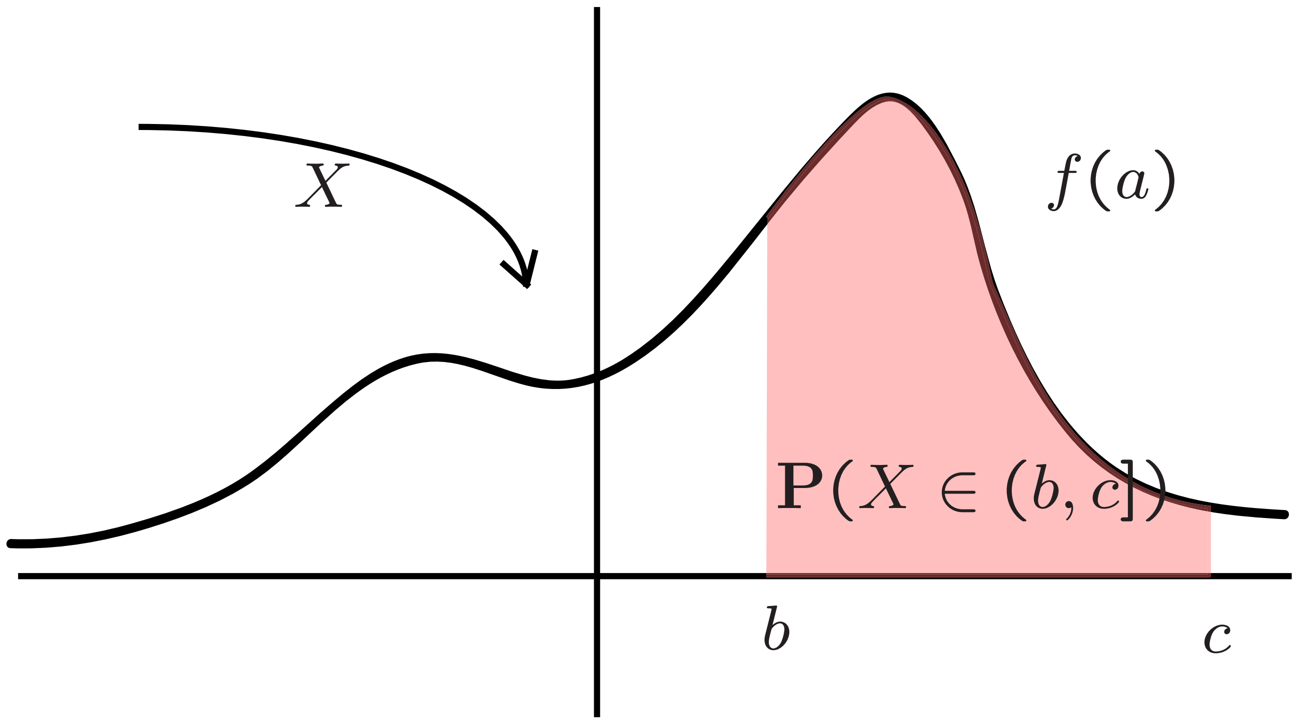
heißt *Verteilungsfunktion* von X.

Hat X die Dichte $f(a)\,da$, so gilt

$$\boxed{F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(a)\,da\,, \quad b \in \mathbb{R}}$$

(mit $f(a) := 0$ für $a \notin S$)

$$\boxed{\text{Ist } f \text{ stetig in } a, \text{ dann ist } f(a) = F'(a).}$$



$$\mathbf{P}(X \leq c) - \mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(b < X \leq c)$$

$$F(c) - F(b) = \int_b^c f(a)da$$

Man findet den Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung wieder!

Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Dichte.

Sei F die Verteilungsfunktion einer reellwertigen Zufallsvariablen X. Hat F keine Sprünge *und* ist F *stückweise stetig differenzierbar**, dann besitzt X eine Dichte.

*d.h. es gibt endlich viele disjunkte Intervalle, deren Vereinigung $\mathbb{R}$ ist, so dass F eingeschränkt auf jedes dieser Intervalle eine stetige Ableitung hat.

Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Dichte.

Sei F die Verteilungsfunktion einer reellwertigen Zufallsvariablen X. Hat F keine Sprünge *und* ist F *stückweise stetig differenzierbar**, dann besitzt X eine Dichte.

Denn für jeden Randpunkt a eines der Intervalle gilt: $\mathbf{P}(X = a) = 0$ (ansonsten hätte F in a einen Sprung).
Und innerhalb eines jeden Intervalls gilt nach Voraussetzung der Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung, siehe die vorige Folie.

*d.h. es gibt endlich viele disjunkte Intervalle, deren Vereinigung $\mathbb{R}$ ist, so dass F eingeschränkt auf jedes dieser Intervalle eine stetige Ableitung hat.

Für *diskrete* reellwertige Zufallsvariable X

ist F_X stückweise konstant, mit Sprüngen der Höhe

$$\boxed{\mathbf{P}(X = a), \quad a \in S.}$$

$F: \; b \mapsto \mathbb{P}(X \leq b)$

Für *diskrete* reellwertige Zufallsvariable X

ist F_X stückweise konstant, mit Sprüngen der Höhe

$$\mathbf{P}(X = a), \quad a \in S.$$

Beispiel:

X Binomial$(2, 1/2)$-verteilt