Vorlesung 4b

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 2

Dichten auf $\mathbb{R}$ bzgl des Längenmaßes

Beginnen wir mit einem **Beispiel**:

X sei eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable mit

$$\boxed{\mathbf{P}(X > b) = e^{-b}} \quad \text{für alle } b \geq 0.$$

X

$A = \{a : a \in \mathbb{R}_+, a > b\}$

Beginnen wir mit einem **Beispiel**:

X sei eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable mit

$$\mathbf{P}(X > b) = e^{-b} \quad \text{für alle } b \geq 0.$$

$$\mathbf{P}(X \geq b) = ?$$

$$\mathbf{P}(X = 0) = ?$$

Für $b = 0$ ist

$$\mathbf{P}(X \geq 0) = 1 = e^{-0} = \mathbf{P}(X > 0).$$

Für $b = 0$ ist

$$\mathbf{P}(X \geq 0) = 1 = e^{-0} = \mathbf{P}(X > 0).$$

Für $b > 0$ und $0 < \varepsilon < b$ ist

$$e^{-b} = \mathbf{P}(X > 0) \leq \mathbf{P}(b \leq X)$$

$$\leq \mathbf{P}(b - \varepsilon < X) = e^{-b+\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{P}(X \geq b) = e^{-b} = \mathbf{P}(X > b).$$

Für $b = 0$ ist

$$\mathbf{P}(X \geq 0) = 1 = e^{-0} = \mathbf{P}(X > 0).$$

Für $b > 0$ und $0 < \varepsilon < b$ ist

$$e^{-b} = \mathbf{P}(X > 0) \leq \mathbf{P}(b \leq X)$$

$$\leq \mathbf{P}(b - \varepsilon < X) = e^{-b+\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{P}(X \geq b) = e^{-b} = \mathbf{P}(X > b).$$

$$\mathbf{P}(X = b) = \mathbf{P}(X \geq b) - \mathbf{P}(X > b) = 0.$$

Für alle $0 \leq b \leq c$ folgt:

$$\mathbf{P}(b \leq X \leq c)$$

Für alle $0 \leq b \leq c$ folgt:

$$\mathbf{P}(b \leq X \leq c)$$

$$= \mathbf{P}(b \leq X) - \mathbf{P}(c < X)$$

$$= e^{-c} - e^{-b} = \int_b^c e^{-a}\, da.$$

Für alle $0 \leq b \leq c$ folgt:

$$\mathbf{P}(b \leq X \leq c)$$

$$= \mathbf{P}(b \leq X) - \mathbf{P}(c < X)$$

$$= e^{-c} - e^{-b} = \int_b^c e^{-a}\, da.$$

Dieses Beispiel wird im Folgenden verallgemeinert:

Sei S ein (offenes, abgeschlossenes oder halboffenes)

Intervall mit linker Grenze l und rechter Grenze r,

und X eine $\overline{\mathbb{R}}$- wertige Zufallsvariable,

für die $\{X \in S\}$ das sichere Ereignis ist.

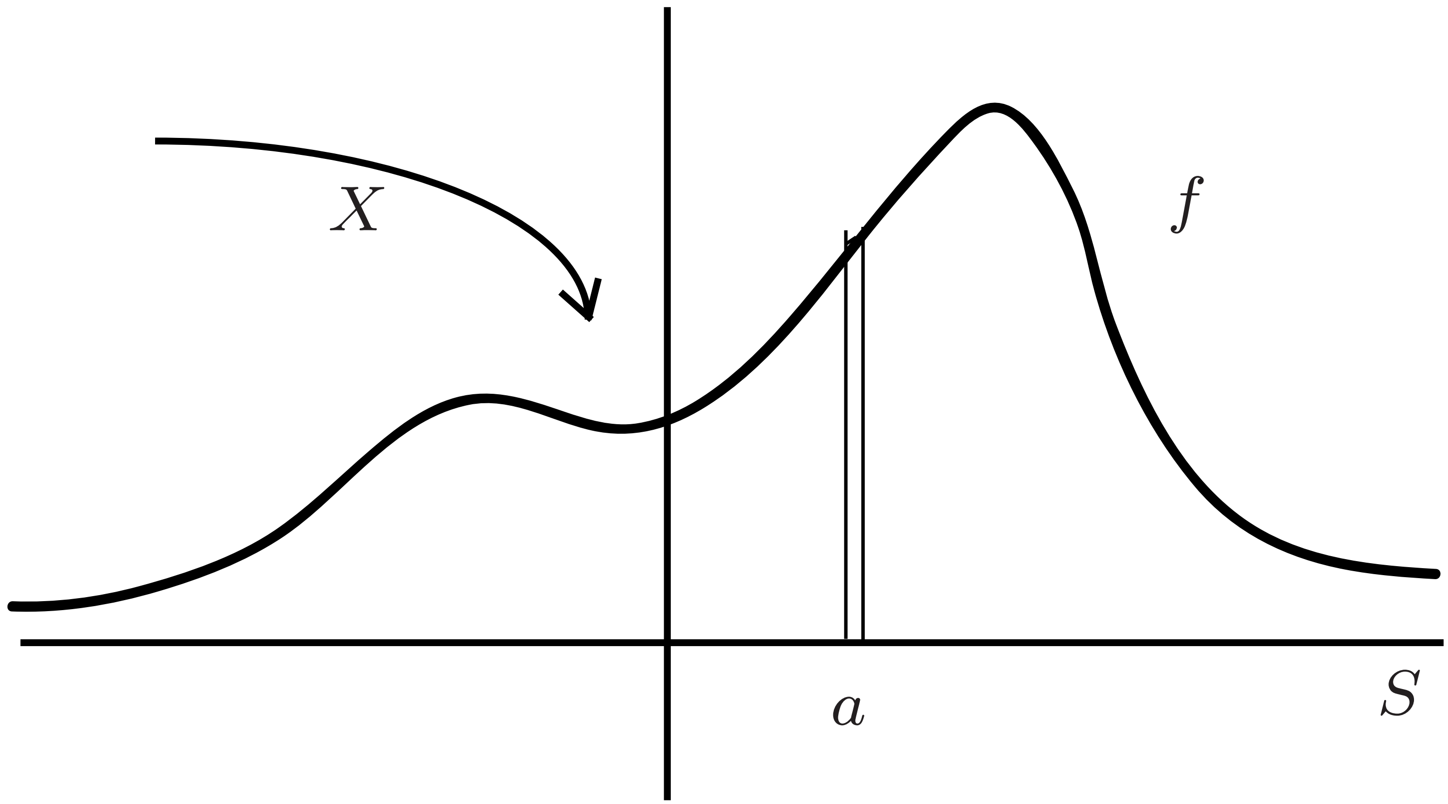
(Dabei ist $l = -\infty$ und/oder $r = +\infty$ erlaubt.)

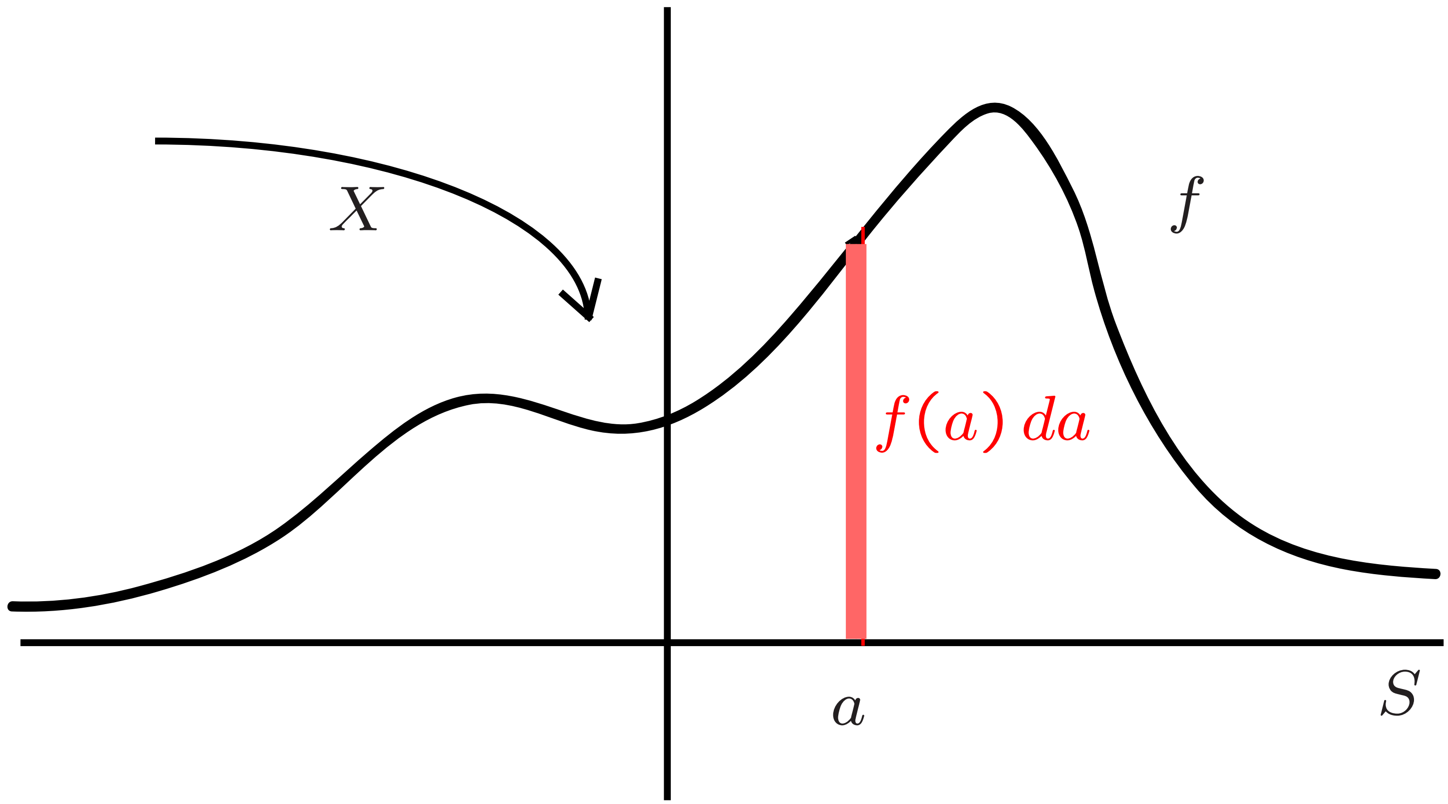
Sei S ein (offenes, abgeschlossenes oder halboffenes) Intervall mit linker Grenze l und rechter Grenze r, und X eine $\overline{\mathbb{R}}$- wertige Zufallsvariable, für die $\{X \in S\}$ das sichere Ereignis ist.

(Dabei ist $l = -\infty$ und/oder $r = +\infty$ erlaubt.)

Das Analogon zu den Verteilungsgewichten $\rho(a)$ ist jetzt gegeben durch "infinitesimale Gewichte" $f(a)\,da$, wobei $f : S \to \mathbb{R}_+$ eine "integrierbare" (z.B. stückweise stetige) Funktion ist mit

$$\int_l^r f(a)\,da = 1.$$


X
f
a
S



X
f
$f(a)\,da$
a
S

Sei X eine Zufallsvariable mit Wertebereich S.

Gilt für alle Intervalle $[b,c] \subset S$ die Gleichung

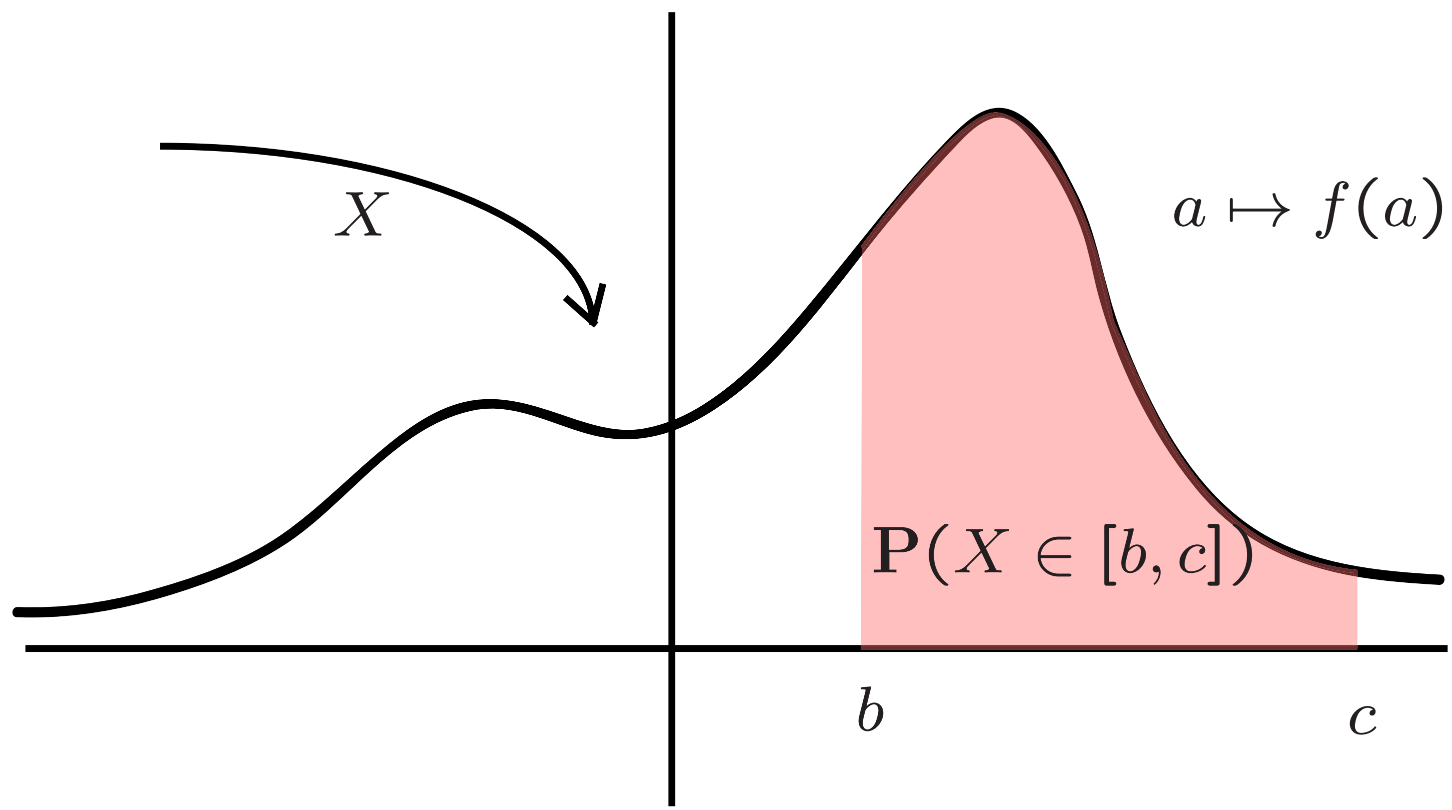
$$\mathbf{P}\big(X \in [b,c]\big) = \int_b^c f(a)\, da \ ,$$

so sagten wir, dass

X die *Dichte* $f(a)\, da$ besitzt*,

und nennen f *Dichtefunktion* (der Verteilung) von X.

*Genauer spricht man von der Dichte bzgl des natürlichen Längenmaßes (des Lebesguemaßes) auf $\mathbb{R}$


X
$a \mapsto f(a)$
$\mathbf{P}(X \in [b,c])$
b
c

Wir schreiben dann kurz

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a)\, da \,, \quad a \in S \,,$$

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a)\, da.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück da (um den Punkt a)

und rechts als dessen (infinitesimale) Länge da.

$$\mathbf{P}(X \in da) = f(a)\,da.$$

Der Ausdruck da taucht hier in zwei Bedeutungen auf:

links als infinitesimales Raumstück da (um den Punkt a)

und rechts als dessen (infinitesimale) Länge da.

Diese Gleichung bekommt ihre exakte Bedeutung

“unter dem Integral”:

$$\mathbf{P}(X \in [c,d]) = \int_c^d f(a)\,da$$

Beispiele:

Eine auf dem Intervall $[0, 2]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte

Beispiele:

Eine auf dem Intervall $[0, 2]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte

$$\frac{1}{2}\, da, \quad 0 \le a \le 2.$$

Beispiele:

Eine auf dem Intervall $[0, 2]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte

$$\frac{1}{2}\, da, \quad 0 \leq a \leq 2.$$

Eine auf einem endlichen Intervall $S = [l, r]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte

Beispiele:

Eine auf dem Intervall $[0, 2]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte

$$\frac{1}{2}\, da, \quad 0 \le a \le 2.$$

Eine auf einem endlichen Intervall $S = [l, r]$

uniform verteilte Zufallsvariable

hat die Dichte

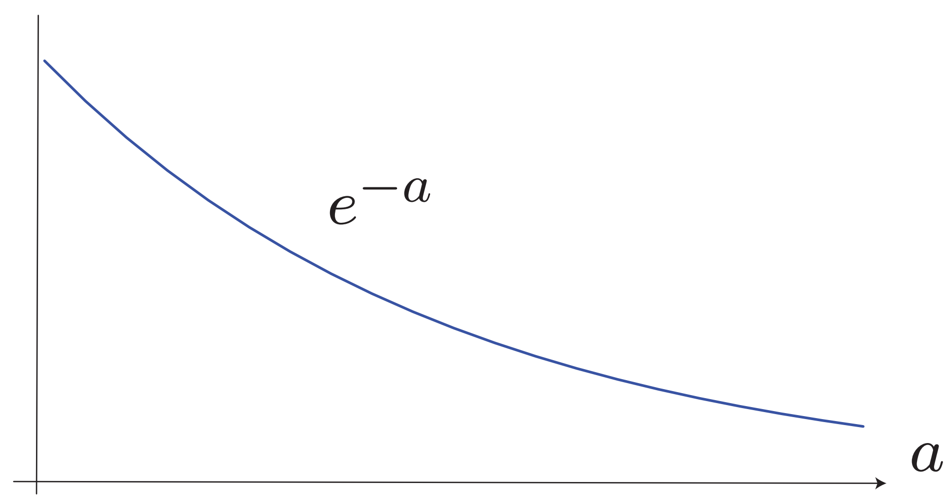
$$\frac{1}{r-l}\, da\,, \qquad a \in S.$$

Die Bedingung $\int_S f(a)\, da = 1$ kann auch erfüllt sein,

wenn S unendlichen Inhalt hat.

Man denke an das Eingangsbeispiel

$$S = [0, \infty); \;\; f(a) = e^{-a}, \quad a \geq 0.$$



Merke:

Für eine Zufallsvariable X mit Dichte $f(a)\,da$

ist für jedes $b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X = b) = \int_b^b f(a)\,da = 0.$$

Merke:

Für eine Zufallsvariable X mit Dichte $f(a)\,da$

ist für jedes $b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(X = b) = \int_b^b f(a)\,da = 0.$$

Also gilt (mit naheliegender Schreibweise)

für $b \leq c \in \mathbb{R}$:

$$\int_{(b,c]} f(a)\,da = \int_{[b,c]} f(a)\,da = \int_b^c f(a)\,da.$$

Hat die Zufallsvariable X eine Dichte, so gilt

für jede endliche oder abzählbar unendliche Menge A

$$\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbf{P}(X = a) = 0.$$

Insbesondere ist X dann nicht diskret.

Umgekehrt gilt also:

Eine diskrete reellwertige Zufallsvariable besitzt keine Dichte

(bzg. des natürlichen Längenmaßes auf $\mathbb{R}$).