Vorlesung 4b

Zufallsvariable mit Dichten

Teil 1

Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable

Kontinuierlich anstelle von diskret:

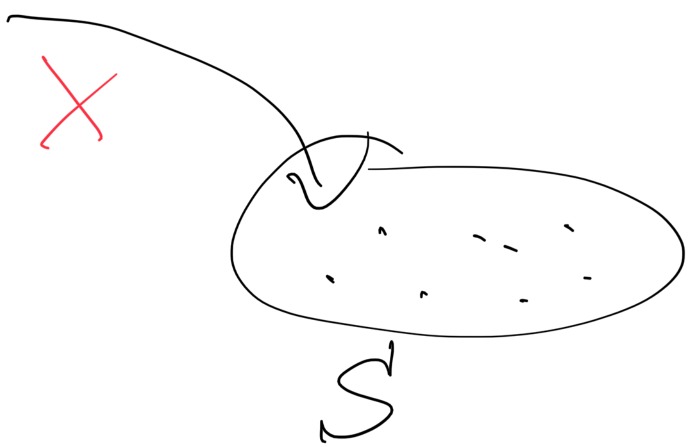
Bisher hatten wir im Fokus der Vorlesung:

Diskrete Zufallsvariable.

Sie fallen mit W'keit 1 in eine diskrete

(d.h. endliche oder abzählbar unendliche)

Menge S.



Kontinuierlich anstelle von diskret:

Bisher hatten wir im Fokus der Vorlesung:

Diskrete Zufallsvariable.

Sie fallen mit W'keit 1 in eine diskrete

(d.h. endliche oder abzählbar unendliche)

Menge S.

Jetzt wenden wir uns Zufallsvariablen zu,

die kontinuierlich verteilt sind.

Dann ist der Wertebereich *überabzählbar*.

Ein prominentes Beispiel ist der (faire) Münzwurf.

Man kann ihn auffassen als

rein zufällige Wahl eines Elementes aus $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Binärdarstellung

übersetzt $[0,1]$ in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

zB. $\frac{1}{2} \longmapsto (1,0,0,\dots)$

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1}{2^i} \longleftarrow\!\shortmid (a_1, a_2, a_3, \dots)$

Ein prominentes Beispiel ist der (faire) Münzwurf.

Man kann ihn auffassen als

rein zufällige Wahl eines Elementes aus $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Ein weiteres einprägsames Beispiel ist die rein zufällige Wahl

eines Punktes aus dem Einheitsintervall

oder aus dem Einheitsquadrat.

Ein prominentes Beispiel ist der (faire) Münzwurf.

Man kann ihn auffassen als

rein zufällige Wahl eines Elementes aus $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Ein weiteres einprägsames Beispiel ist die rein zufällige Wahl

eines Punktes aus dem Einheitsintervall

oder aus dem Einheitsquadrat.

Idee bei der rein zufälligen Wahl aus einem Kontinuum:

$\mathbf{P}(X \in A)$ ist gegeben durch den Anteil von A an S

Uniforme Verteilung auf dem Einheitsintervall

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $S = [0, 1]$ heißt

uniform verteilt auf S,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Längenmaß $\lambda(A)$

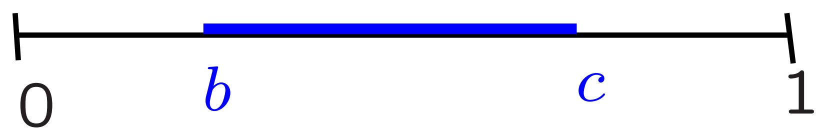
gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \lambda(A)$$

(denn hier ist ja $\lambda(S) = 1$).

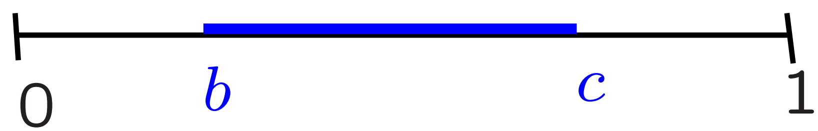
Beispiel 1:

$A := [b, c]$ mit $0 \le b \le c \le 1$



Beispiel 1:

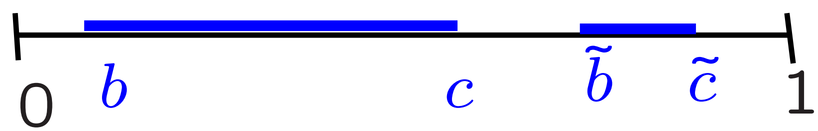
$A := [b, c]$ mit $0 \leq b \leq c \leq 1$



$$\mathbf{P}(X \in A) = c - b.$$

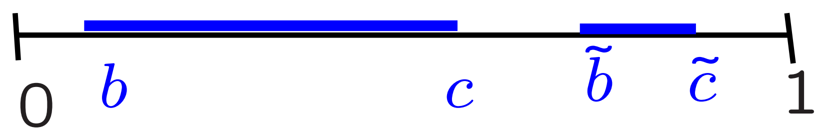
Beispiel 2:

$$A := [b, c] \cup [\tilde{b}, \tilde{c}] \quad \text{mit } 0 \le b \le c < \tilde{b} \le \tilde{c} \le 1$$



Beispiel 2:

$A := [b, c] \cup [\tilde{b}, \tilde{c}]$ mit $0 \leq b \leq c < \tilde{b} \leq \tilde{c} \leq 1$



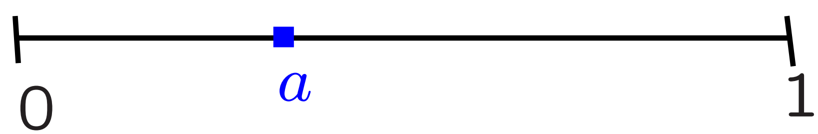
$$\mathbf{P}(X \in A) = (c - b) + (\tilde{c} - \tilde{b}).$$

Beispiel 3:

$$A := \{a\} \quad \text{mit } 0 \leq a \leq 1$$

Beispiel 3:

$A := \{a\}$ mit $0 \leq a \leq 1$



$$\mathbf{P}(X = a) = a - a = 0.$$

Uniforme Verteilung auf einem Rechteck in $\mathbb{R}^2$:

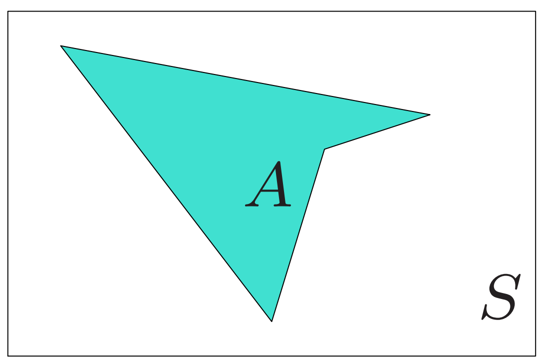
Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich

$$S := [0, \ell] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$$

heißt *uniform verteilt auf* S, wenn

für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem Flächenmaß $\lambda^2(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\lambda^2(A)}{\lambda^2(S)} = \frac{\lambda^2(A)}{\ell \cdot b}.$$



Uniforme Verteilung auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^d$

Definition (Buch S. 12)

Sei S eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit endlichem Inhalt $\lambda^d(S) > 0$.

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich S heißt

uniform verteilt auf S,

wenn für alle $A \subset S$ mit wohldefiniertem (Volums-)Inhalt

$v(A) := \lambda^d(A)$ gilt:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{v(A)}{v(S)}.$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{v(A)}{v(S)}.$$

Man beachte die Analogie zu

“Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Fälle”:

Der zahlenmäßige Anteil von A

an einem endlichen Wertebereich S

wird jetzt ersetzt durch den volumsmäßigen Anteil von A

am (überabzählbar) unendlichen Wertebereich S.

Wie im Diskreten werden wir uns nicht nur

mit *rein* zufälliger Wahl begnügen.