Vorlesung 4a

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Teil 2

Der Zeitpunkt des ersten Erfolgs und die geometrische Verteilung

(Buch S. 34-35)

$(Z_1, Z_2, \ldots)$ sei ein fortgesetzter p-Münzwurf.

$$T := \min\{i \ : \ i \in \mathbb{N}, Z_i = 1\}$$

ist der *Zeitpunkt des ersten Erfolges*.

Wie sieht die Verteilung von T aus?

$$\mathbf{P}(T = n) = ?$$

$$\{T = n\} = \{Z_1 = 0, \ldots Z_{n-1} = 0,\ Z_n = 1\}$$

Also:

$$\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(Z_1 = 0, \ldots Z_{n-1} = 0,\ Z_n = 1)$$

$$= q^{n-1}\, p.$$

Alternativ:

$$\{T > n\} = \{Z_1 = 0, \ldots, Z_n = 0\}$$

Also

$$\mathbf{P}(T > n) = q^n.$$

$$\mathbf{P}(T = n) = q^{n-1}\,p$$

$$\mathbf{P}(T > n) = q^{n}$$

Das passt zusammen.

Denn das Ereignis $\{T > n - 1\}$ ist die disjunkte Vereinigung

der beiden Ereignisse $\{T = n\}$ und $\{T > n\}$.

Dementsprechend:

$$q^{n-1} = q^{n-1}p + q^{n}.$$

Definition

Sei $p \in (0,1)$. Eine Zufallsvariable T mit Zielbereich $\mathbb{N}$ heißt

geometrisch verteilt mit Parameter p,

kurz Geom(p)-verteilt,

wenn

$$\mathbf{P}(T > a) = q^a, \quad a = 0, 1, 2 \ldots\ ,$$

mit $q := 1 - p$.

$$\mathbf{E}[T] = ?$$

Anschaulich ist klar:

Beim gewöhnlichen Würfeln kommt im Mittel

jedes 6-te Mal eine Sechs.

Beim Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit p

kommt im Mittel jedes $(1/p)$-te Mal ein Erfolg.

Also wird gelten:

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p}.$$

Das beweist man auch schnell

mit dem folgenden

Lemma zum Erwartungswert $\mathbb{N}$-wertiger ZV’er:

(Buch S. 34)

Ist X eine Zufallsvariable mit Zielbereich $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$, dann ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i)$$

Folgerung aus dem Lemma:

Für eine Geom(p)-verteilte Zufallsvariable T ist

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(T > i) = \sum_{i \geq 0} q^i = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

$$\boxed{\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p}}$$

Lemma

Ist X eine Zufallsvariable mit Zielbereich $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$, dann ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i)$$

Beweis.

$\rho(j)$ seien die Verteilungsgewichte von X.

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j\rho(j)$$

$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

Warum sind die beiden rechten Seiten gleich?

Beweis.

$\rho(j)$ seien die Verteilungsgewichte von X.

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j\rho(j)$$

$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

Warum sind die beiden rechten Seiten gleich?

Beweis.

$\rho(j)$ seien die Verteilungsgewichte von X.

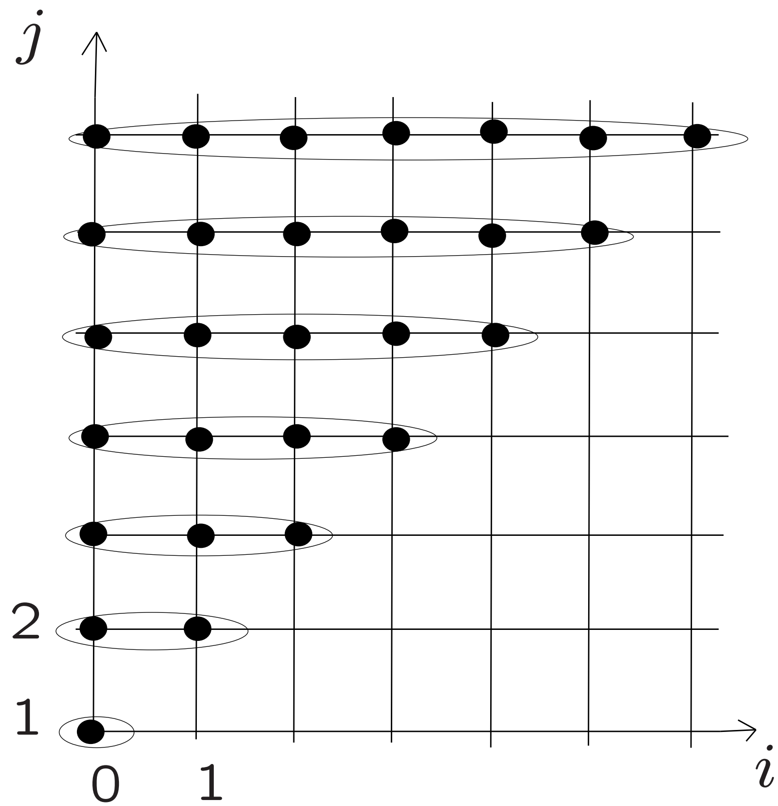
$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j\rho(j) = \sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j)$$

$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

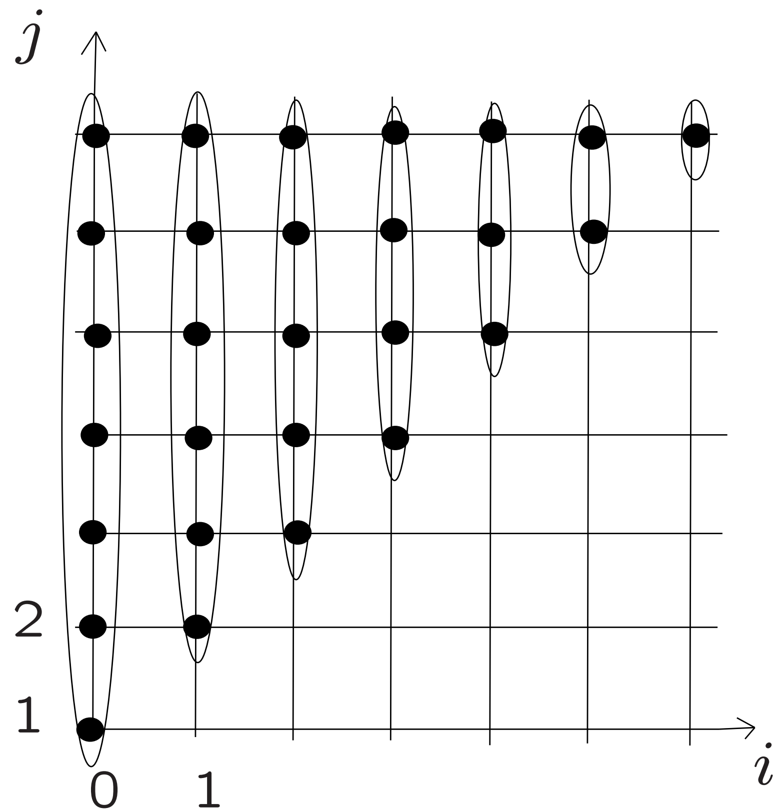
Warum sind die beiden rechten Seiten gleich?

Wie sieht man die Gleichheit

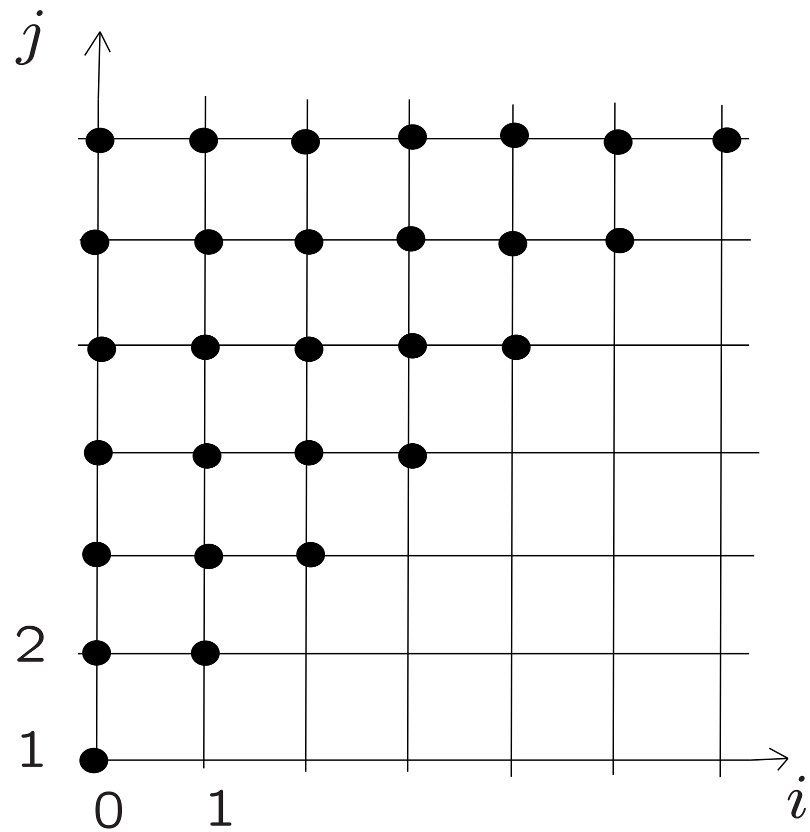
$$\sum_{j\geq 1}\sum_{i=0}^{j-1}\rho(j)=\sum_{i\geq 0}\sum_{j=i+1}^{\infty}\rho(j) \qquad ?$$



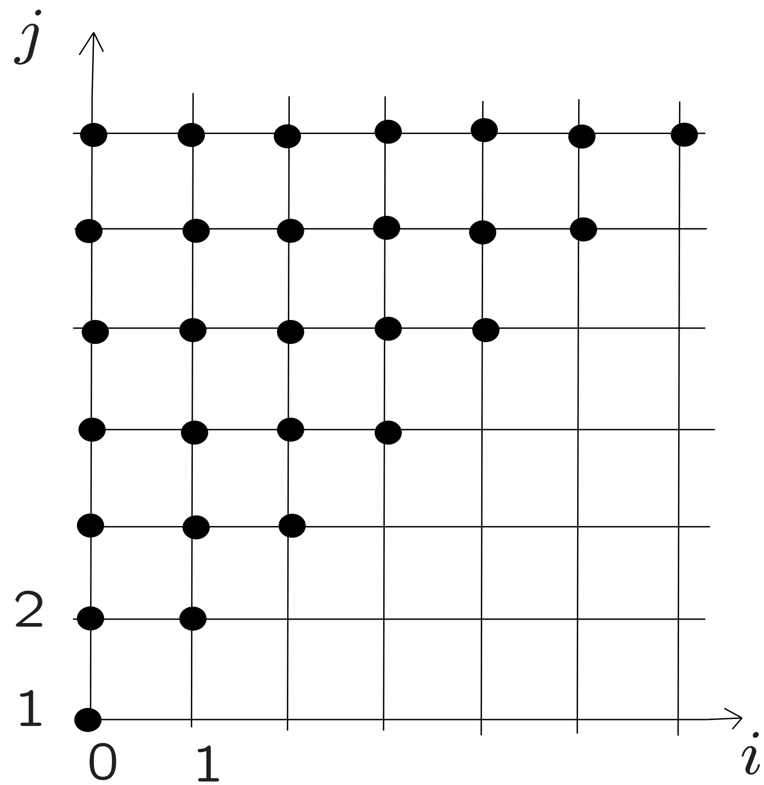
$$\sum_{j\geq 1}\sum_{i=0}^{j-1}\rho(j)$$



$$\sum_{i\geq 0}\sum_{j=i+1}^{\infty}\rho(j)$$



Es kommt bei nichtnegativen Summanden
nicht auf die Reihenfolge der Summation an!



$$\sum_{j\geq 1}\sum_{i=0}^{j-1}\rho(j) = \sum_{i\geq 0}\sum_{j=i+1}^{\infty}\rho(j) \qquad \square$$