Vorlesung 4a

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Die Welt des p-Münzwurfs -

von Bernoulli zu Poisson

Teil 1

Der fortgesetze p-Münzwurf

(Buch S. 19-20)

Zur Erinnerung:

Der n-fache p-Münzwurf ...

$\ldots$ ist eine $\{0,1\}^n$-wertige ZV'e $(Z_1,\ldots,Z_n)$

mit

$$(*) \qquad \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n) = p^k (1-p)^{n-k}$$

falls $a_1 + \cdots + a_n = k$.

Ereignisse kann man oft auf verschiedene Weise darstellen.

Für einen $(n+1)$-fachen p-Münzwurf gilt z.B.

$$\begin{aligned}\{Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n\} \\ &= \{Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 1\} \\ &\qquad \cup \{Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 0\}\end{aligned}$$

Weil rechts zwei disjunkte Ereignisse stehen, muss gelten:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n) \\ &= \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 1) \\ &\qquad + \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 0)\end{aligned}$$

Die Definition $(*)$ auf der vorigen Folie ist damit verträglich:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n) \\
&\qquad = \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 1) \\
&\qquad\qquad + \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p^k (1-p)^{n-k} \\
&\qquad = p^{k+1}(1-p)^{n-k} \\
&\qquad\qquad + p^k (1-p)^{n-k+1}
\end{aligned}
$$

Dies zeigt, dass auch die folgende Definition

konsistent über n ist.

Definition: Sei $p \in (0,1), \quad q := 1 - p$.

Eine *Bernoulli-Folge zum Parameter* p

(man sagt manchmal auch: ein *fortgesetzter* p*-Münzwurf*)

ist eine zufällige 01-Folge $(Z_1, Z_2, \ldots)$, deren Verteilung die

folgende Eigenschaft hat:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede endliche 01-Folge $(a_1, \ldots, a_n)$

mit k Einsen und $n - k$ Nullen ist

$$\mathbf{P}(Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n) = p^k q^{n-k}.$$

(d.h. für jedes n ist $(Z_1, \ldots, Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf)

Wir wissen schon:

Für jedes n ist dann

die Anzahl der Einsen in $(Z_1, \ldots, Z_n)$

(die “Anzahl der Erfolge in n Versuchen”)

binomial(n, p)-verteilt:

$$\mathbf{P}(Z_1 + \cdots + Z_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$