Vorlesung 4a

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Teil 4

Die Poissonapproximation.

Oder:

Münzwurf mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit:

Wie ist die Anzahl der Erfolge verteilt

bei einer großen Zahl von Versuchen?

(Buch S. 29-30)

p klein, n groß

$$X := Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$$\mathbf{P}(X = k) \approx ?$$

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}, \quad n = 3000$$

$$\mathrm{P}(X = 0) = ?$$

$$\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{3000} = \left(\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^{3} \approx e^{-3}$$

Beispiel:

$$p = \tfrac{1}{1000}, \quad n = 3000$$

$$\mathbf{P}(X = 0) = q^n = \left(1 - \tfrac{1}{1000}\right)^{3000}$$

$$\approx e^{-3}$$

$$\mathbf{P}(X = 1) = ?$$

Beispiel:

$$p = \tfrac{1}{1000}, \quad n = 3000$$

$$\mathbf{P}(X = 0) = q^n = \left(1 - \tfrac{1}{1000}\right)^{3000}$$
$$\approx e^{-3}$$

$$\mathbf{P}(X = 1) = npq^{n-1} \approx 3e^{-3}$$

$$\mathbf{P}(X = 2) = ?$$

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}, \quad n = 3000$$

$$\mathbf{P}(X = 0) = q^n = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{3000}$$
$$\approx e^{-3}$$

$$\mathbf{P}(X = 1) = npq^{n-1} \approx 3e^{-3}$$

$$\mathbf{P}(X = 2) = \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} \approx \frac{1}{2}(np)^2 q^n \approx \frac{1}{2} 3^2 e^{-3}$$

Clou:

p klein, n groß:

$$q^n = (1-p)^n \approx e^{-np}$$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{k!} n^k p^k q^n \approx \frac{1}{k!} (np)^k e^{-np}$$

Fazit

Sei p eine kleine positive Zahl,

n eine große natürliche Zahl

und X eine Bin(n, p)-verteilte Zufallsvariable.

Man kann dann die Verteilungsgewichte von X approximativ als Funktion von $\mathbf{E}[X] = n\,p$ ausdrücken.

Rigoros fasst man diese Behauptung im folgenden Grenzwertsatz:

Satz (Poissons Gesetz der seltenen Ereignisse)

(vgl. Buch S. 30)

Sei $\lambda > 0$ und sei X_n, $n = 1, 2, \ldots$,

eine Folge von Bin(n, p_n)-verteilten Zufallsvariablen,

so dass für $n \to \infty$

$$\mathbf{E}[X_n] \to \lambda \,, \quad \text{d. h. } p_n \sim \frac{\lambda}{n} \,.$$

Dann gilt für jedes $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\boxed{\mathbf{P}(X_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \,.}$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \; =$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$$

$$\frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{\to 1} \underbrace{(np_n)^k}_{\to \lambda^k} \underbrace{\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{(1-p_n)^{-k}}_{\to 1}$$

$$\to \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda} . \qquad \square$$

Definition (Poissonverteilung)

(Buch S. 29)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

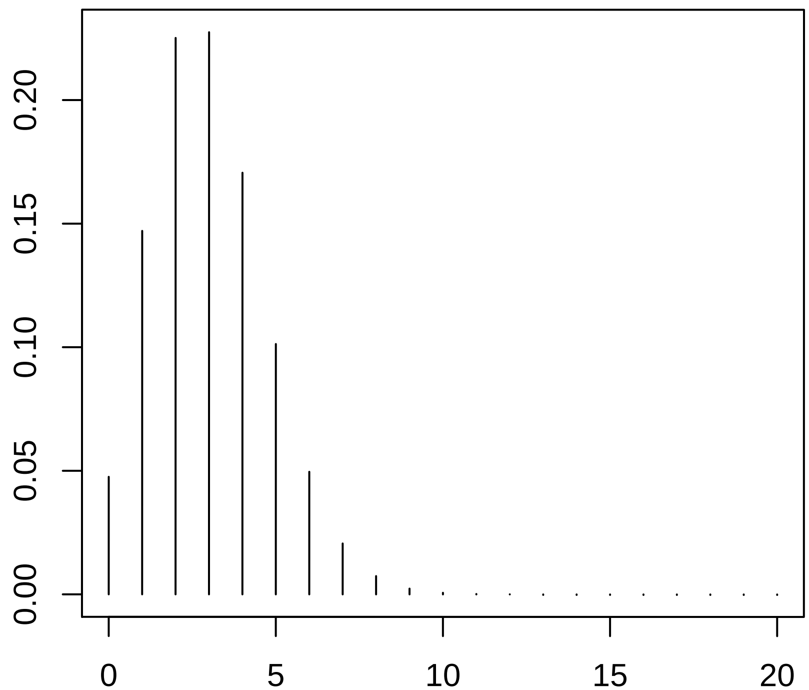
Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $\mathbb{N}_0$ heißt

Poissonverteilt mit Parameter λ,

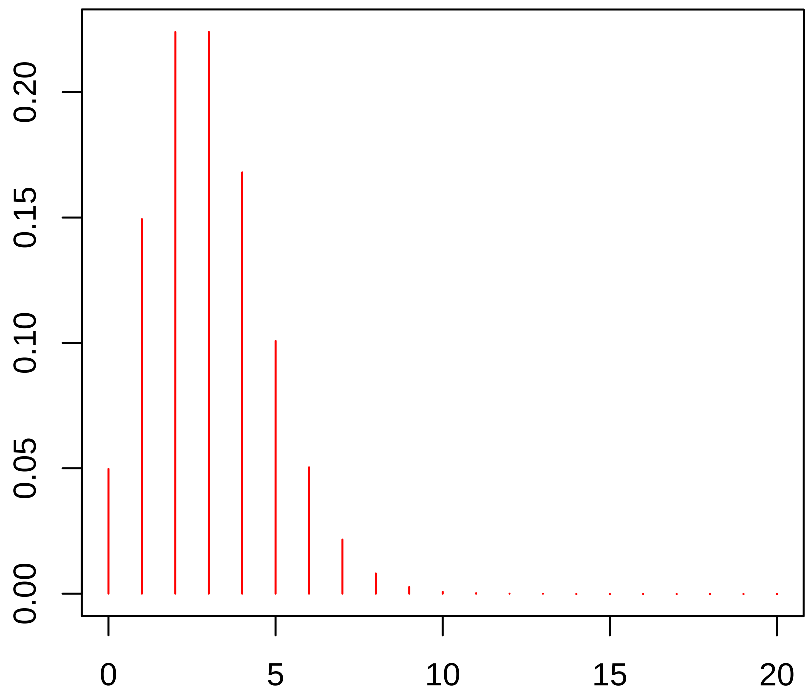
kurz Pois(λ)-verteilt,

wenn

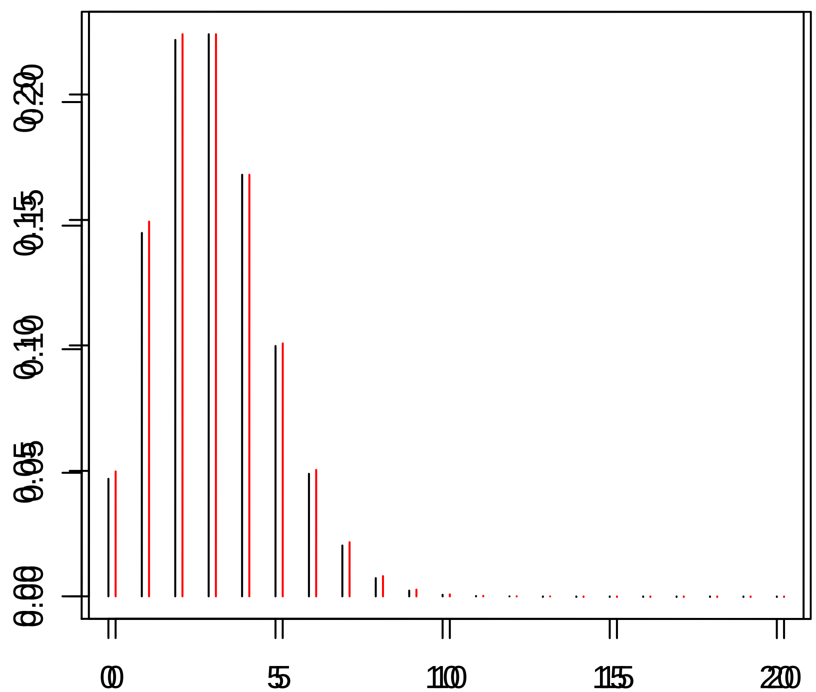
$$\boxed{\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,.}$$



Binomialgewichte zu $n = 100$ und $p = 0.03$



Poissongewichte zum Parameter λ =3



0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0
5
10
15
20

Satz.

Der Erwartungswert

einer Pois(λ)-verteilten Zufallsvariablen X ist

$$\mathbf{E}[X] = \lambda.$$

Satz.

Der Erwartungswert

einer Pois(λ)-verteilten Zufallsvariablen X ist

$$\mathbf{E}[X] = \lambda.$$

Beweis:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot 1 \qquad \square$$