

Vorlesung 4a

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Teil 4

Die Poissonapproximation.

Oder:

Münzwurf mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit:

Wie ist die Anzahl der Erfolge verteilt
bei einer großen Zahl von Versuchen?

(Buch S. 29-30)

p klein, n groß

$$X := Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$$\mathbf{P}(X = k) \approx ?$$

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}$$

$$n = 3000$$

$$P(X = 0) = ?$$

$$\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{3000}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000 \cdot 3} \approx e^{-3}$$

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}, \quad n = 3000$$

$$P(X = 0) = q^n = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{3000} \\ \approx e^{-3}$$

$$P(X = 1) = ?$$

$$\binom{n}{1} p q^{n-1} = np (1-p)^{n-1} \\ = 3 \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000 \cdot 3} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{-1}}_{\approx 1} \\ \approx 3 e^{-3}$$

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}, \quad n = 3000$$

$$\mathbf{P}(X = 0) = q^n = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{3000} \\ \approx e^{-3}$$

$$\mathbf{P}(X = 1) = npq^{n-1} \approx 3e^{-3}$$

$$\mathbf{P}(X = 2) = ?$$

Beispiel:

$$p = \frac{1}{1000}, \quad n = 3000$$

$$\mathbf{P}(X = 0) = q^n = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{3000} \\ \approx e^{-3}$$

$$\mathbf{P}(X = 1) = npq^{n-1} \approx 3e^{-3}$$

$$\mathbf{P}(X = 2) = \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} \approx \frac{1}{2} (np)^2 q^n \approx \frac{1}{2} 3^2 e^{-3}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Clou:

p klein, n groß:

$$q^n = (1 - p)^n \approx e^{-np}$$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{k!} n^k p^k q^n \approx \frac{1}{k!} (np)^k e^{-np}$$

Fazit

Sei p eine kleine positive Zahl,
 n eine große natürliche Zahl
und X eine $\text{Bin}(n, p)$ -verteilte Zufallsvariable.

Man kann dann die Verteilungsgewichte von X
approximativ als Funktion von $\mathbb{E}[X] = np$ ausdrücken.

Rigoros fasst man diese Behauptung im folgenden

Grenzwertsatz:

Satz (Poissons Gesetz der seltenen Ereignisse)

(vgl. Buch S. 30)

Sei $\lambda > 0$ und sei $X_n, n = 1, 2, \dots$,
eine Folge von $\text{Bin}(n, p_n)$ -verteilten Zufallsvariablen,

so dass für $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}[X_n] \rightarrow \lambda,$$

$$\text{d. h. } p_n \sim \frac{\lambda}{n}.$$

Dann gilt für jedes $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} =$$

Beweis:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} =$$

$$\frac{1 \cdot \overbrace{n(n-1) \cdots (n-k+1)}^{\text{green}}}{\underbrace{k!}_{\text{blue}}} \underbrace{\frac{n^k}{n^k}}_{\rightarrow 1} \underbrace{(np_n)^k}_{\rightarrow \lambda^k} \underbrace{\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{-\lambda}} \underbrace{(1 - p_n)^{-k}}_{\rightarrow 1}$$

$$\rightarrow \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} . \quad \square$$

Definition (Poissonverteilung)

(Buch S. 29)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

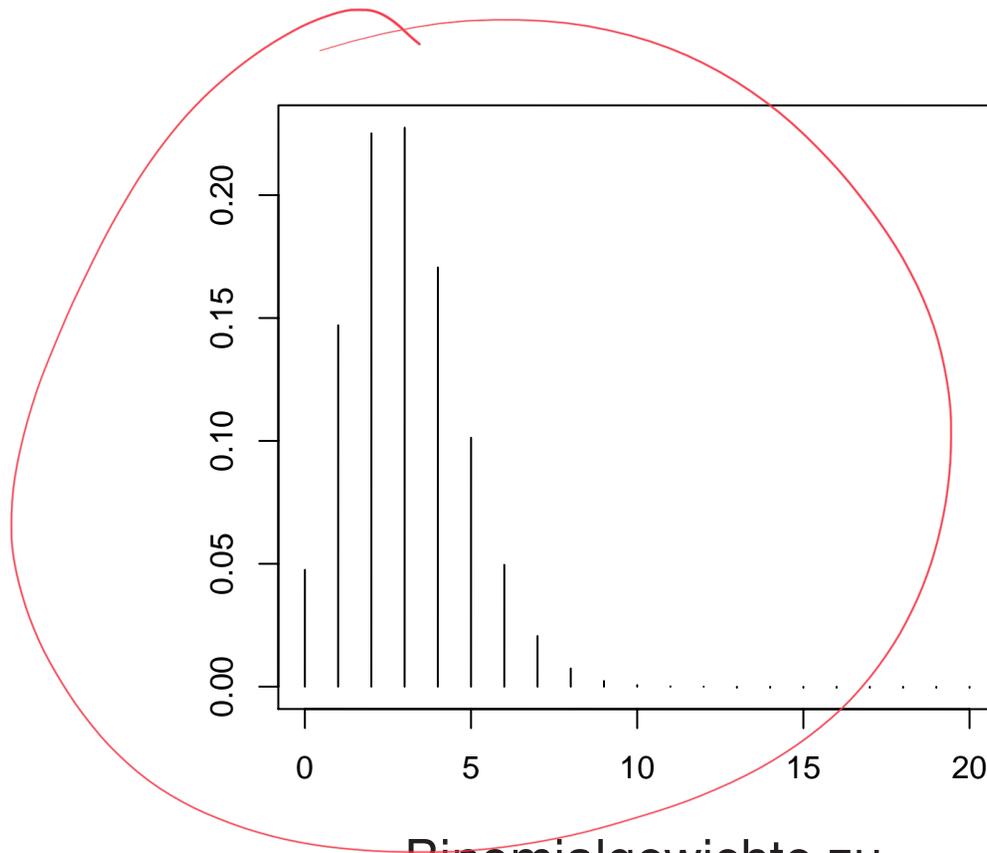
Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich \mathbb{N}_0 heißt

Poissonverteilt mit Parameter λ ,

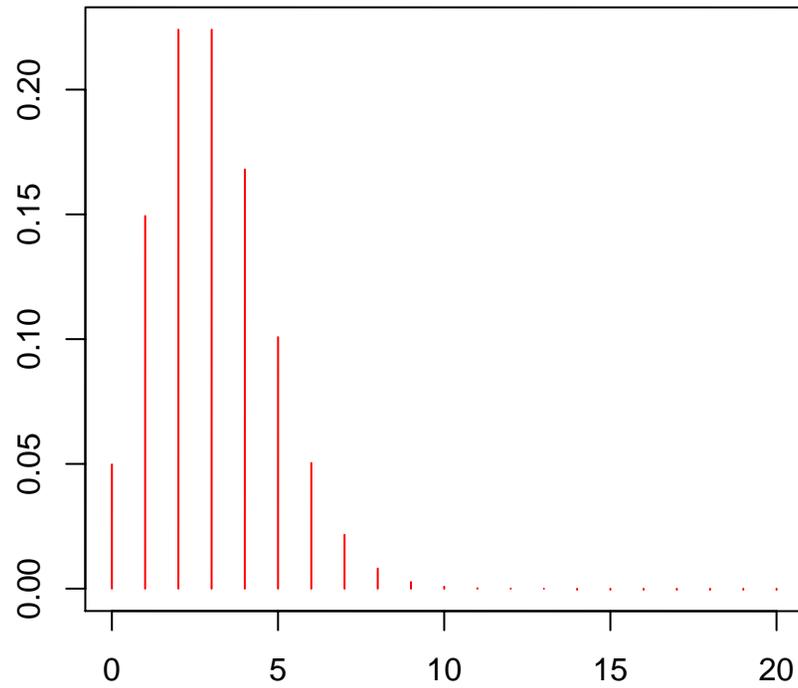
kurz $\text{Pois}(\lambda)$ -verteilt,

wenn

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

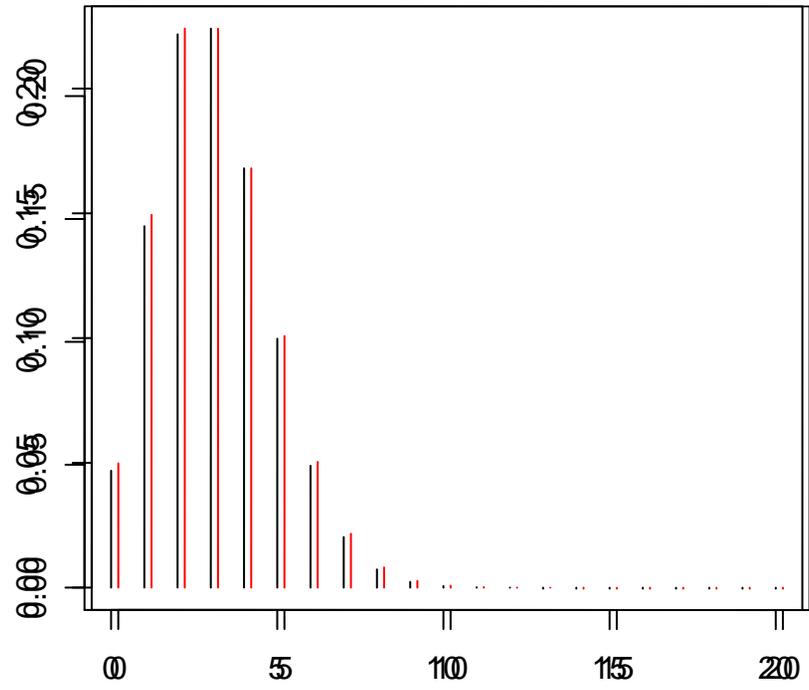


Binomialgewichte zu $n = 100$ und $p = 0.03$



Poissongewichte zum Parameter $\lambda = 3$





Satz.

Der Erwartungswert
einer $\text{Pois}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen X ist

$$\mathbf{E}[X] = \lambda.$$

Satz.

Der Erwartungswert
einer $\text{Pois}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen X ist

$$\mathbf{E}[X] = \lambda.$$

Beweis:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot 1 \quad \square$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$$

$$\approx 1$$