

Vorlesung 4a

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Teil 2

Der Zeitpunkt des ersten Erfolgs
und die geometrische Verteilung

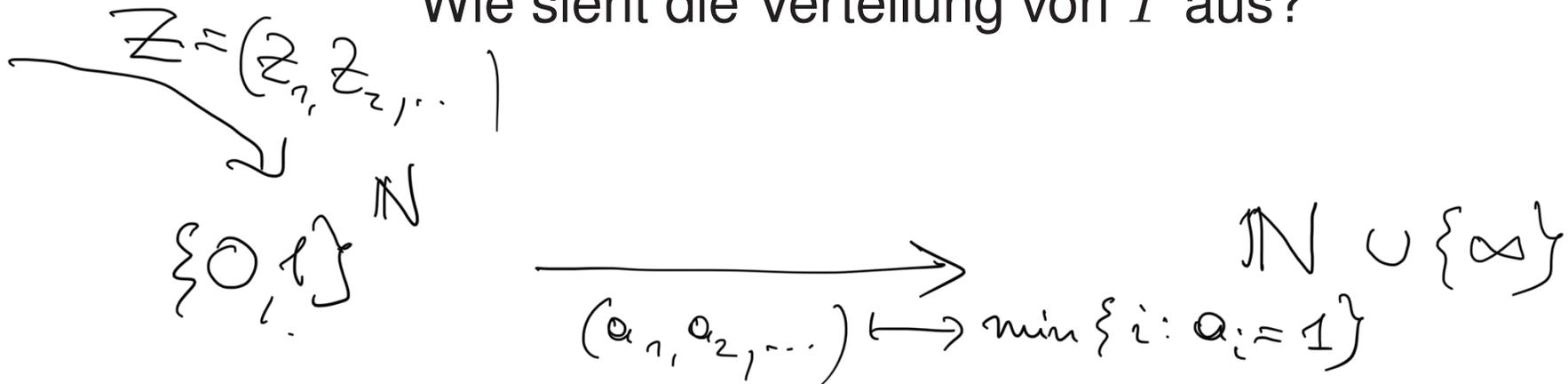
(Buch S. 34-35)

(Z_1, Z_2, \dots) sei ein fortgesetzter p -Münzwurf.

$$T := \min\{i : i \in \mathbb{N}, Z_i = 1\}$$

ist der *Zeitpunkt des ersten Erfolges*.

Wie sieht die Verteilung von T aus?



$$P(T = n) = ?$$

$$\{T = n\} = \{z_1 = 0, z_2 = 0, \dots, z_{n-1} = 0, z_n = 1\}$$

$$P(\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-1} \text{ " } \underbrace{\qquad\qquad\qquad})$$
$$= q^{n-1} \cdot p$$

$$\mathbf{P}(T = n) = ?$$

$$\{T = n\} = \{Z_1 = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1\}$$

$$\mathbf{P}(T = n) = ?$$

$$\{T = n\} = \{Z_1 = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1\}$$

Also:

$$\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(Z_1 = 0, \dots, Z_{n-1} = 0, Z_n = 1)$$

$$= q^{n-1} p.$$

$$\mathbb{P}(T > n) = q^n$$

$$\{T > n\} = \{Z_1 = 0, Z_2 = 0, \dots, Z_n = 0\}$$

Alternativ:

$$\{T > n\} = \{Z_1 = 0, \dots, Z_n = 0\}$$

Alternativ:

$$\{T > n\} = \{Z_1 = 0, \dots, Z_n = 0\}$$

Also

$$\mathbf{P}(T > n) = q^n.$$

$$\begin{aligned} P(T=n) &= q^{n-1} p \\ P(T>n) &= q^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{T > n-1\} &= \{T=n\} \cup \{T > n\} \\ q^{n-1} &= q^{n-1} \cdot p + q^n \\ &= q^{n-1} (p + q) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(T = n) = q^{n-1} p$$

$$\mathbf{P}(T > n) = q^n$$

$$\mathbf{P}(T = n) = q^{n-1} p$$

$$\mathbf{P}(T > n) = q^n$$

Das passt zusammen.

Denn das Ereignis $\{T > n - 1\}$ ist die disjunkte Vereinigung der beiden Ereignisse $\{T = n\}$ und $\{T > n\}$.

Dementsprechend:

$$q^{n-1} = q^{n-1} p + q^n.$$

Definition

Sei $p \in (0, 1)$. Eine Zufallsvariable T mit Zielbereich \mathbb{N} heißt

geometrisch verteilt mit Parameter p ,

kurz **Geom(p)-verteilt**,

wenn

$$\mathbf{P}(T > a) = q^a, \quad a = 0, 1, 2, \dots,$$

mit $q := 1 - p$.

$$E[T] = ?$$

Anschaulich ist klar:

Beim gewöhnlichen Würfeln kommt im Mittel
jedes 6-te Mal eine Sechs.

$$E[T] = ?$$

Anschaulich ist klar:

Beim gewöhnlichen Würfeln kommt im Mittel
jedes 6-te Mal eine Sechs.

Beim Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit p
kommt im Mittel jedes $(1/p)$ -te Mal ein Erfolg.

$$E[T] = \frac{1}{p} \quad ?$$

$$\mathbf{E}[T] = ?$$

Anschaulich ist klar:

Beim gewöhnlichen Würfeln kommt im Mittel
jedes 6-te Mal eine Sechs.

Beim Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit p
kommt im Mittel jedes $(1/p)$ -te Mal ein Erfolg.

Also wird gelten:

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p}.$$

Das beweist man auch schnell
mit dem folgenden

Lemma zum Erwartungswert \mathbb{N} -wertiger ZV'er:
(Buch S. 34)

Ist X eine Zufallsvariable mit Zielbereich \mathbb{N} oder \mathbb{N}_0 , dann ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i)$$

Folgerung aus dem Lemma:

Für eine $\text{Geom}(p)$ -verteilte Zufallsvariable T ist

$$\mathbf{E}[T] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(T > i) = \sum_{i \geq 0} q^i = \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{p}.$$

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1}{p}$$

Lemma

Ist X eine Zufallsvariable mit Zielbereich \mathbb{N} oder \mathbb{N}_0 , dann ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i)$$

Lemma

Ist X eine Zufallsvariable mit Zielbereich \mathbb{N} oder \mathbb{N}_0 , dann ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i)$$

Beweis.

$\rho(j)$ seien die Verteilungsgewichte von X .

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j \rho(j)$$

$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

Warum sind die beiden rechten Seiten gleich?

Beweis.

$\rho(j)$ seien die Verteilungsgewichte von X .

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j \rho(j)$$

$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

Warum sind die beiden **rechten Seiten** gleich?

Beweis.

$\rho(j)$ seien die Verteilungsgewichte von X .

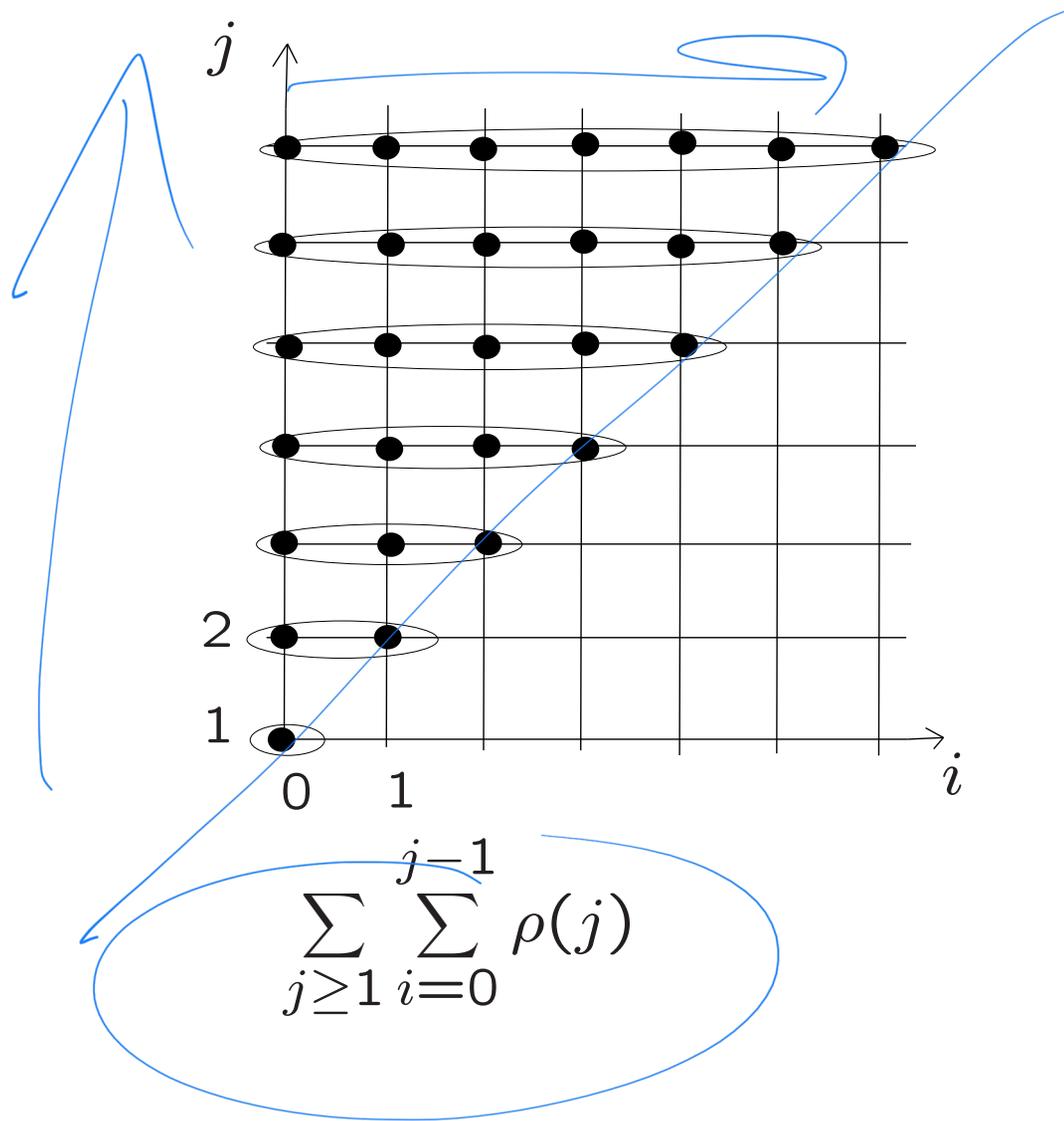

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{j \geq 1} j \rho(j) = \sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j)$$

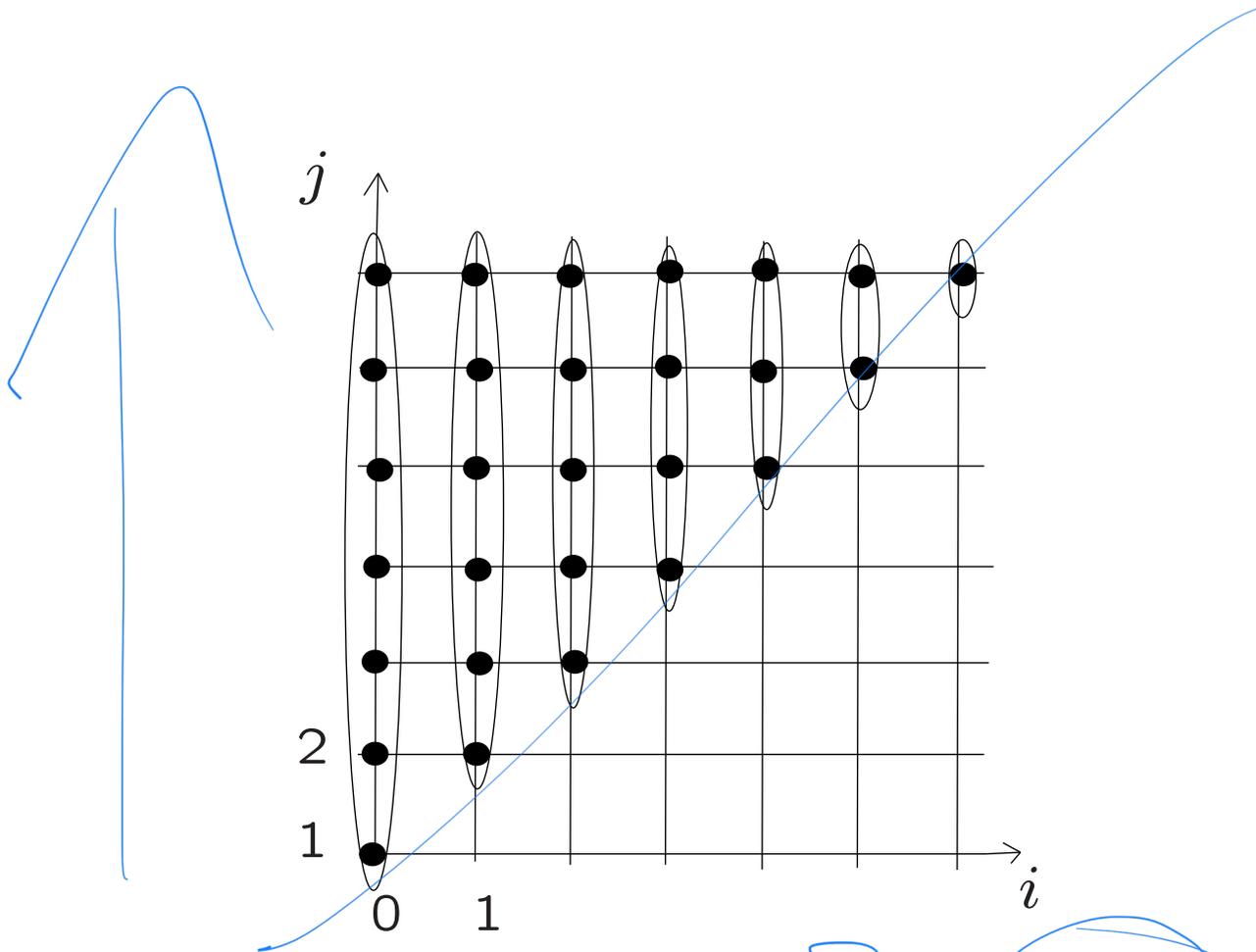
$$\sum_{i \geq 0} \mathbf{P}(X > i) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$

Warum sind die beiden rechten Seiten gleich?

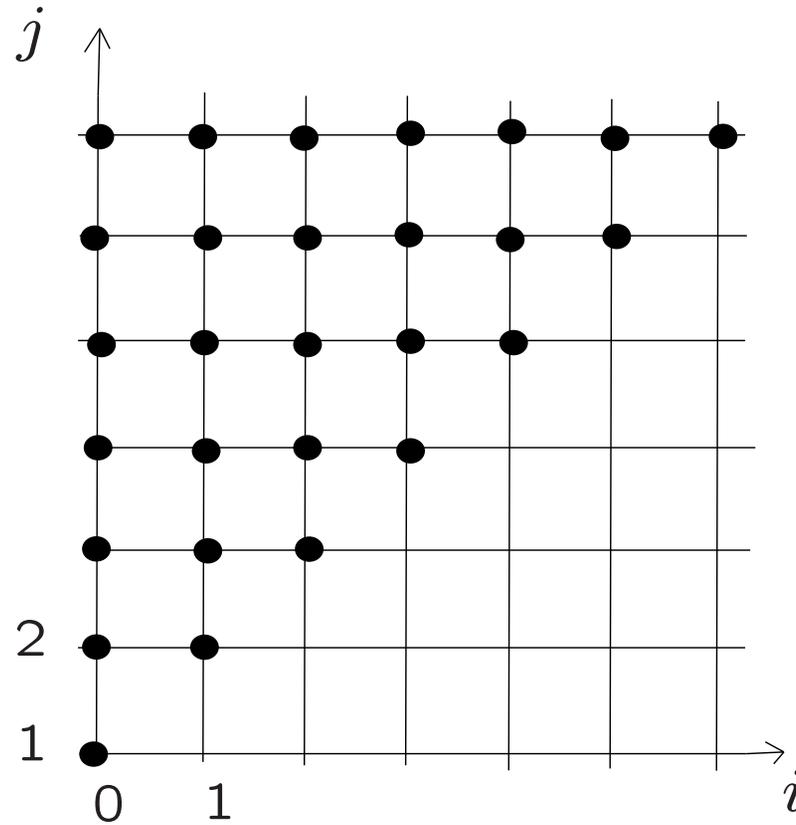
Wie sieht man die Gleichheit

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j) \quad ?$$

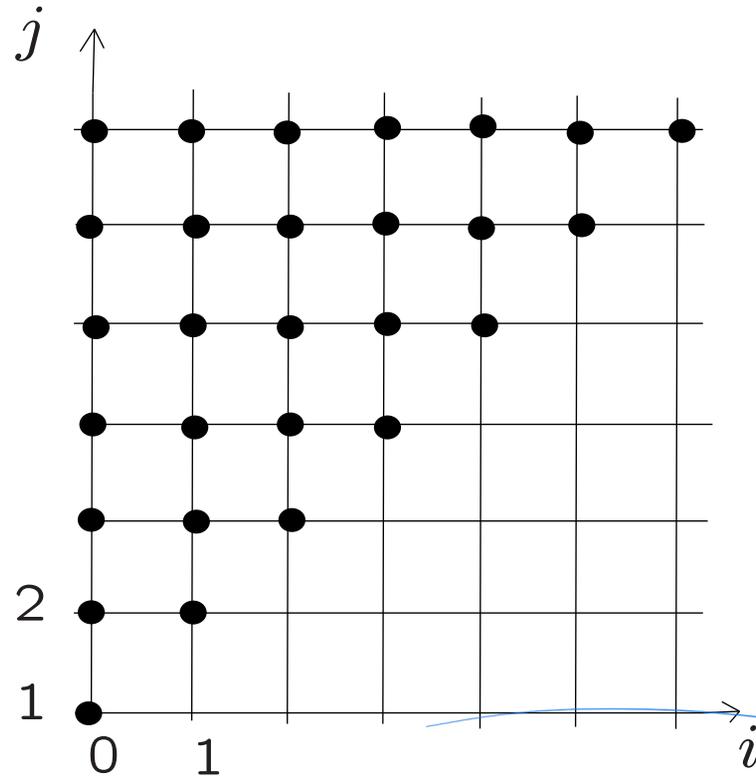




$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j)$$



Es kommt bei nichtnegativen Summanden
nicht auf die Reihenfolge der Summation an!



$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i=0}^{j-1} \rho(j) = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=i+1}^{\infty} \rho(j) \quad \square$$