

Vorlesung 4a

Versuche, Erfolge, Wartezeiten:

Die Welt des p -Münzwurfs -
von Bernoulli zu Poisson

Teil 1

Der fortgesetzte p -Münzwurf

(Buch S. 19-20)

Zur Erinnerung:

Der n -fache p -Münzwurf ...

... ist eine $\{0, 1\}^n$ -wertige ZV'e (Z_1, \dots, Z_n)

mit

(*)
$$P(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n) = p^k (1-p)^{n-k}$$

falls $a_1 + \dots + a_n = k$.

k ... die Anzahl der Einsen in a

Ereignisse kann man oft auf verschiedene Weise darstellen.

Für einen $(n + 1)$ -fachen p -Münzwurf gilt z.B.

$$\{Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n\}$$

$$= \{Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n, \underline{Z_{n+1} = 1}\}$$

$$\cup \{Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 0\}$$

$$p^{k+1} \cdot (1-p)^{n-k} + p^k (1-p)^{n-k+1}$$
$$= p^k (1-p)^{n-k} (p + (1-p))$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=1}$

also: Konsistent !!

Ereignisse kann man oft auf verschiedene Weise darstellen.

Für einen $(n + 1)$ -fachen p -Münzwurf gilt z.B.

$$\begin{aligned} & \{Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n\} \\ &= \{Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 1\} \\ & \quad \cup \{Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 0\} \end{aligned}$$

Weil rechts zwei disjunkte Ereignisse stehen, muss gelten:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n) \\ &= \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 1) \\ & \quad + \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 0) \end{aligned}$$

Die Definition (*) auf der vorigen Folie ist damit verträglich:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n) \\ &= \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 1) \\ & \quad + \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n) \\ &= \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 1) \\ & \quad + \mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n, Z_{n+1} = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= p^{k+1} (1 - p)^{n-k} \\ & \quad + p^k (1 - p)^{n-k+1} \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass auch die folgende Definition

konsistent über n ist.

Definition: Sei $p \in (0, 1)$, $q := 1 - p$.

Eine *Bernoulli-Folge zum Parameter p*

(man sagt manchmal auch: ein *fortgesetzter p -Münzwurf*)

ist eine zufällige 01-Folge (Z_1, Z_2, \dots) , deren Verteilung die folgende Eigenschaft hat:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede endliche 01-Folge (a_1, \dots, a_n)

mit k Einsen und $n - k$ Nullen ist

$$\mathbf{P}(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n) = p^k q^{n-k}.$$

(d.h. für jedes n ist (Z_1, \dots, Z_n) ein n -facher p -Münzwurf)

Wir wissen schon:

Für jedes n ist dann

die Anzahl der Einsen in (Z_1, \dots, Z_n)
(die “Anzahl der Erfolge in n Versuchen”)

binomial(n, p)-verteilt:

$$\mathbf{P}(Z_1 + \dots + Z_n = \mathbf{k}) = \binom{n}{\mathbf{k}} p^{\mathbf{k}} q^{n-\mathbf{k}}.$$