Vorlesung 3b

Indikatorvariable

Rechnen mit Ereignissen und

Wahrscheinlichkeiten.

Teil 5

Positivität und Monotonie des Erwartungswertes

(Buch S. 55)

Wir beweisen jetzt

(hier nur für *diskrete* rellwertige Zufallsvariable)

zwei weitere fundamentale

Eigenschaften des Erwartungswerts:

die Positivität und die Monotonie.

Als Vorbereitung dazu ist hier ein

Nachtrag zu Teil 1 der heutigen Vorlesung.

Die Aussage "$X \geq 0$" und das Ereignis $\{X \geq 0\}$:

X sei eine reellwertige Zufallsvariable.

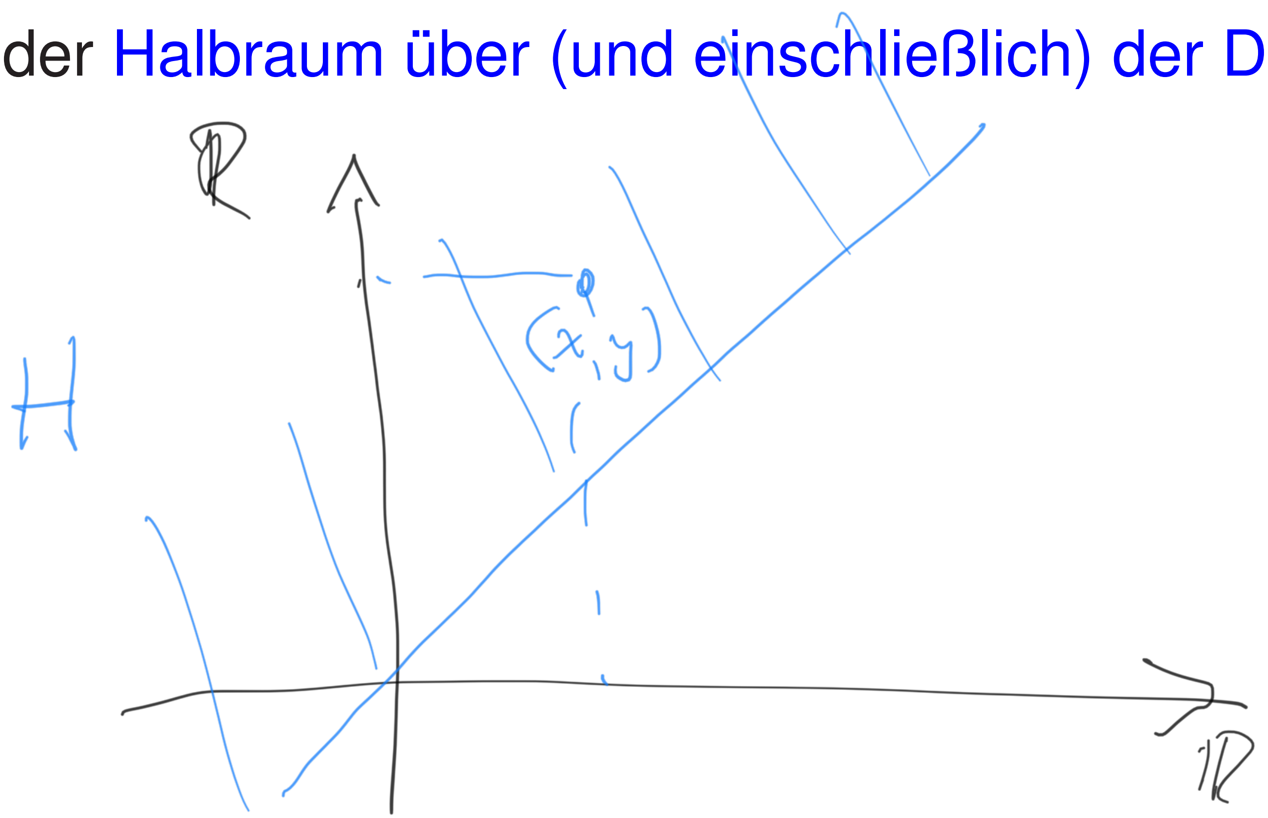
Die Aussage "$X \geq 0$"
definieren wir als gleichbedeutend damit,
dass $\{X \geq 0\}$ das sichere Ereignis ist.

Ist $\{X \geq 0\} = E_S$, dann können wir wahlweise $[0, \infty)$
oder $\mathbb{R}$ (oder jede andere Obermenge von $[0, \infty)$)
als Wertebereich von X verwenden.

Die Aussage $X \leq Y$ und das Ereignis $\{X \leq Y\}$:

Es sei $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$,

der Halbraum über (und einschließlich) der Diagonalen.



Die Aussage $X \leq Y$ und das Ereignis $\{X \leq Y\}$:

Es sei $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$,

der Halbraum über (und einschließlich) der Diagonalen.

Für reellwertige Zufallsvariable X, Y setzen wir

$$\{X \leq Y\} := \{(X, Y) \in H\}.$$

Die Aussage "$X \leq Y$"

definieren wir als gleichbedeutend damit,

dass $\{X \leq Y\}$ das sichere Ereignis ist.

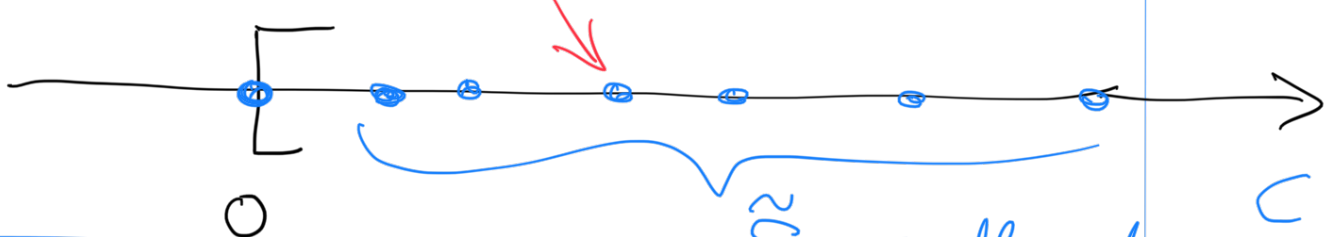
Positivität des Erwartungswertes

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

$$\text{(i) } \mathbf{E}[X] \geq 0,$$

$$\text{(ii) } \mathbf{E}[X] = 0 \text{ genau dann, wenn } \mathbf{P}(X = 0) = 1.$$

$\{X \geq 0\} = E_S$ … das sichere Ereignis!



$\tilde{S}$ .. endl. oder abzählbar $\subset [0, \infty) = W$

$\boxed{S := \tilde{S} \cup \{0\}}$

$1 = \mathbf{P}(X \in \tilde{S}) = \mathbf{P}(X \in S)$

Positivität des Erwartungswertes

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Monotonie des Erwartungswertes

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefinierten Erwartungswerten gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Wir geben hier einen Beweis nur im diskreten Fall:

Nach Voraussetzung (siehe die "Vorbereitung" am Beginn dieses Teils) können wir $[0, \infty)$ als Wertebereich ansehen.

Positivität

Für die reellwertige Zufallsvariable X gelte $X \geq 0$. Dann gilt

(i) $\mathbf{E}[X] \geq 0$,

(ii) $\mathbf{E}[X] = 0$ genau dann, wenn $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

Wir geben hier einen Beweis nur im diskreten Fall:

Nach Voraussetzung (siehe die "Vorbereitung" am Beginn dieses Teils) können wir $[0, \infty)$ als Wertebereich ansehen.

Weil X als diskret vorausgesetzt war, existiert dann eine abzählbare Teilmenge $\tilde{S} \subset [0, \infty)$ mit $\mathbf{P}(X \in \tilde{S}) = 1$.

Dann gilt auch $\mathbf{P}(X \in S) = 1$ mit $S := \tilde{S} \cup \{0\}$.

Nach der Definition des Erwartungswerts aus V3b1 gilt:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\mathbf{P}(X = a) = \sum_{a \in S: a > 0} a\mathbf{P}(X = a) \qquad (1)$$

Nach der Definition des Erwartungswerts aus V3b1 gilt:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\mathbf{P}(X = a) = \sum_{a \in S: a > 0} a\mathbf{P}(X = a) \qquad (1)$$

Aus $\mathbf{P}(X = S) = 1$ folgt

$$1 = \mathbf{P}(X = 0) + \sum_{a \in S: a > 0} \mathbf{P}(X = a) \qquad (2)$$

Nach der Definition des Erwartungswerts aus V3b1 gilt:

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\mathbf{P}(X = a) \quad = \quad \sum_{a \in S : a > 0} a\mathbf{P}(X = a) \qquad (1)$$

Aus $\mathbf{P}(X = S) = 1$ folgt

$$1 = \mathbf{P}(X = 0) + \sum_{a \in S : a > 0} \mathbf{P}(X = a) \qquad (2)$$

Aus (1) folgt sofort: $\mathbf{E}[X] \geq 0$ also die Aussage (i). Weiter gilt:

$$\mathbf{P}(X = 0) = 1$$

$$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\mathbf{P}(X = a) = 0 \text{ für alle strikt positiven } a \in S$$

$$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\mathbf{E}[X] = 0 \quad \square.$$

d.h. $\{X_2 \geq X_1\} = E_S$

Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Beweis:

$X_1 \leq X_2$ ist gleichbedeutend mit $X_2 - X_1 \geq 0$.

$\mathbf{E}[X_2 - X_1] = \mathbf{E}[X_2] - \mathbf{E}[X_1]$

Monotonie

Für reellwertige Zufallsvariable $X_1 \leq X_2$

mit wohldefiniertem Erwartungswert gilt

$$\mathbf{E}[X_1] \leq \mathbf{E}[X_2].$$

Beweis:

$X_1 \leq X_2$ ist gleichbedeutend mit $X_2 - X_1 \geq 0$.

Aus der Positivität und der Linearität des Erwartungswertes

folgt $\mathbf{E}[X_2] - \mathbf{E}[X_1] \geq 0$. $\square$

$(*)\quad \mathbb{P}(E) = \mathbb{E}[I_E]$

Die Ungleichung von Markov

X reellwertige Zufallsvariable mit $X \geq 0$, $c > 0$. Dann gilt

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geq c) \leq \frac{1}{c}\mathbf{E}[X]}$$

$$c\,\mathbb{P}(X \geq c) \leq \mathbb{E}[X]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$c\,\mathbb{E}[I_{\{X \geq c\}}] \leq \mathbb{E}[X]$$

$(*)$

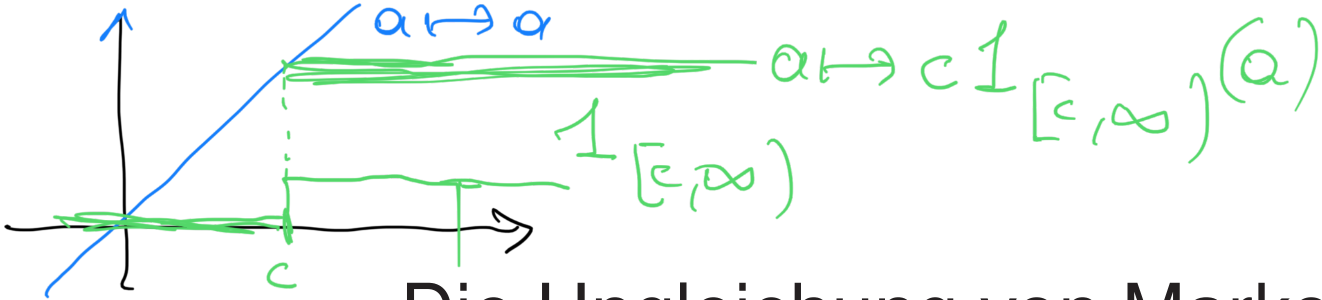
$$\Longleftrightarrow$$

Linearität

$$\mathbb{E}[c\,I_{\{X \geq c\}}] \leq \mathbb{E}[X]$$

<u>Beh:</u> Für alle $a \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$c\,1_{[c,\infty)}(a) \leq a$$



Die Ungleichung von Markov

X reellwertige Zufallsvariable mit $X \geq 0$, $c > 0$. Dann gilt

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geq c) \leq \frac{1}{c}\mathbf{E}[X]}$$

Beweis:

Wegen $\quad c\mathbf{1}_{[c,\infty)}(a) \leq a, \quad a \geq 0,$

gilt

$$cI_{\{X \geq c\}} \leq X.$$

Die Ungleichung von Markov

X reellwertige Zufallsvariable mit $X \geq 0$, $c > 0$. Dann gilt

$$\boxed{\mathbf{P}(X \geq c) \leq \frac{1}{c}\mathbf{E}[X]}$$

Beweis:

Wegen $$c\mathbf{1}_{[c,\infty)}(a) \leq a, \quad a \geq 0,$$

gilt

$$cI_{\{X \geq c\}} \leq X.$$

Aus Linearität und Monotonie des Erwartungswertes folgt:

$$c\mathbf{E}[I_{\{X \geq c\}}] \leq \mathbf{E}[X]. \quad \square$$