Vorlesung 3b

Indikatorvariable

Rechnen mit Ereignissen und Wahrscheinlichkeiten.

Teil 4

Die Einschluss-Ausschlussformel

(Buch S. 57-58)

Bsp: $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3)$
$- \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) - \mathbb{P}(E_1 \cap E_3) - \mathbb{P}(E_2 \cap E_3)$
$+ \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

Die im vorigen Teil diskutierte Eigenschaft

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$

bzw. äquivalent dazu

$$\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) - \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$$

wird verallgemeinert durch die

Einschluss-Ausschluss-Formel:

$$\mathbf{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(E_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(E_i \cap E_j) + \cdots - \cdots \pm \mathbf{P}(E_1 \cap \cdots \cap E_n).$$

Beweis der Einschluss-Ausschluss-Formel:

$$1 - I_{E_1 \cup \cdots \cup E_n}$$

$1 - \max(b_1, \ldots, b_n)$

$= (1-b_1) \cdots (1-b_n)$

$= 1 - \sum b_i + \sum_{i<j} b_i \cdot b_j$

fällt genau dann auf 0,

wenn mindestens eines der I_{E_i} auf 1 fällt,

ist also gleich dem Produkt

$b_i \cdot b_j = \min(b_i, b_j)$

$$(1 - I_{E_1}) \cdots (1 - I_{E_n})$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$1 - \sum_i I_{E_i} + \sum_{i<j} I_{E_i \cap E_j} - \cdots .$$

Gehe dann über zum Erwartungswert. □

Beispiel (vgl Buch S. 58). $X = (X_1, \ldots, X_n)$ sei eine rein zufällige Permutation von $1, \ldots, n$.

Was ist die W'keit, dass X mindestens einen Fixpunkt hat?

Sei $E_i := \{X_i = i\}$. Wir arbeiten mit der E-A-Formel.

Offenbar gilt für $i_1 < \cdots < i_k$:

$$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap E_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{n}}$$

Beispiel (vgl Buch S. 58). $X = (X_1, \ldots, X_n)$ sei eine rein zufällige Permutation von $1, \ldots, n$.

Was ist die W'keit, dass X mindestens einen Fixpunkt hat?

Sei $E_i := \{X_i = i\}$. Wir arbeiten mit der E-A-Formel.

Offenbar gilt für $i_1 < \cdots < i_k$:

$$\mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap E_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

(denn es gibt $(n-k)!$ Permutationen von $1, \ldots, n$ mit Fixpunkten bei $i_1, \ldots, i_k$)

Für jedes k gibt es $\binom{n}{k}$ Mögl'k'ten, $i_1 < \cdots < i_k$ zu wählen.

Also:

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap E_{i_k}) = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap E_{i_k}) = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Mit der E-A-Formel folgt für die gefragte W'keit

$$\mathbf{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - \tfrac{1}{2!} + \cdots \pm \tfrac{1}{n!}. \quad \square$$

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \mathbf{P}(E_{i_1} \cap \cdots\cdots \cap E_{i_k}) = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Mit der E-A-Formel folgt für die gefragte W'keit

$$\mathbf{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - \tfrac{1}{2!} + \cdots \pm \tfrac{1}{n!}. \qquad \square$$

(Für $n \to \infty$ konvergiert das übrigens gegen $1 - e^{-1}$, denn aus der Mathe 1 ist bekannt:

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots,$$

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots$$