Vorlesung 3b

Indikatorvariable

Rechnen mit Ereignissen und

Wahrscheinlichkeiten.

Teil 3

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten.

(Buch S. 57)

$$\mathbf{E}[I_E] = \mathbf{P}(E)$$

Für Ereignisse und ihre Indikatorvariable

gelten die Beziehungen

$$E = \{I_E = 1\},$$

$$\mathbf{E}[I_E] = \mathbf{P}(I_E = 1) = \mathbf{P}(E).$$

Aus dem Rechnen mit Indikatorvariablen

und aus der Linearität des Erwartungswertes

ergeben sich die Regeln

für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten:

$$\text{(i)} \quad \mathbf{P}(E_{\mathsf{s}}) = 1, \qquad \mathbf{P}(E_{\mathsf{u}}) = 0,$$

denn

eine $\{0, 1\}$-wertige ZV'e, die stets den Wert 1 annimmt,

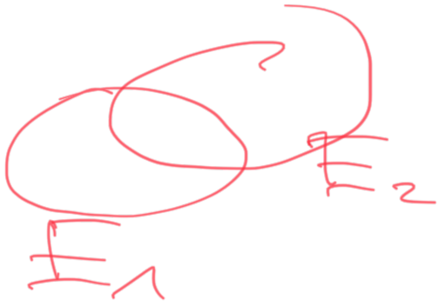
hat Erwartungswert 1.

Das passt auch zu unserer Vereinbarung der ersten Stunde:

Für eine S-wertige Zufallsvariable X ist

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1.$$

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$



Das sieht man aus der Identität

$$b_1 + b_2 = \max(b_1, b_2) + \min(b_1, b_2), \quad b_1,\, b_2 \in \{0, 1\}$$

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

$\mathbb{E}[\quad] = \mathbb{E}[\quad] + \mathbb{E}[\quad]$

zusammen mit der Linearität des Erwartungswertes.

$\mathbb{E}[I_{E_1}] + \mathbb{E}[I_{E_2}] = \mathbb{E}[I_{E_1 \cup E_2}] + \mathbb{E}[I_{E_1 \cap E_2}]$

$\square$

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$

Das sieht man aus der Identität

$$b_1 + b_2 = \max(b_1, b_2) + \min(b_1, b_2), \quad b_1,\, b_2 \in \{0, 1\}$$

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

zusammen mit der Linearität des Erwartungswertes.

Aus (ii) folgt sofort die Subadditivität:

$$\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$$

Eine weitere unmittelbare Konsequenz aus (ii) ist

(iii) $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$

falls E_1 und E_2 disjunkt.

“(endliche) Additivität”

Eine weitere unmittelbare Konsequenz aus (ii) ist

(iii) $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$

falls E_1 und E_2 disjunkt.

“(endliche) Additivität”

In der Wahrscheinlichkeitstheorie arbeitet man mit einer stärkeren Form dieser Eigenschaft, der σ-Additivität. Sie besagt:
Für unendliche Folgen $E_1, E_2, \ldots$ von paarweise disjunkten Ereignissen gilt $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \cdots$.
Diese Formel entspricht zusammen mit der Eigenschaft (i) den Axiomen von Kolmogorov für Wahrscheinlichkeitsmaße.

Eine unmittelbare Konsequenz aus

der Additivität des Erwartungswertes ist

(iv) $\mathbf{P}(E^c) = 1 - \mathbf{P}(E^{\cancel{c}})$

(Regel von der Gegenwahrscheinlichkeit)

denn: $I_{E^c} = 1 - I_E$.

Für je zwei Ereignisse E_1, E_2 gilt die folgende

"Zerlegung von E_2":

$$E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1^c \cap E_2),$$

dabei sind $E_1 \cap E_2$ und $E_1^c \cap E_2$ disjunkt.

Also folgt aus der Additivität:

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) \leq \mathbf{P}(E_2).$$

Für je zwei Ereignisse E_1, E_2 gilt die folgende

"Zerlegung von E_2":

$$E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1^c \cap E_2),$$

dabei sind $E_1 \cap E_2$ und $E_1^c \cap E_2$ disjunkt.

Also folgt aus der Additivität:

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) \leq \mathbf{P}(E_2).$$

Daraus ergibt sich

(v) $\mathbf{P}(E_1) \leq \mathbf{P}(E_2)$

falls das Ereignis E_1 das Ereignis E_2 nach sich zieht

(d.h. falls gilt: $E_1 = E_1 \cap E_2$)

Wir fassen zusammen:

(i) $\mathbf{P}(E_{\mathsf{s}}) = 1, \qquad \mathbf{P}(E_{\mathsf{u}}) = 0.$

(ii) $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$,
insbesondere $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$.

(iii) $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$
falls E_1 und E_2 disjunkt.

Additivität

(iv) $\mathbf{P}(E^c) = 1 - \mathbf{P}(E)$.

Gegenwk. Regel

(v) $\mathbf{P}(E_1) \leq \mathbf{P}(E_2)$, falls $E_1 \subset E_2$.

Monotonie