

Vorlesung 3b

Indikatorvariable

Rechnen mit Ereignissen und
Wahrscheinlichkeiten.

Teil 3

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten.

(Buch S. 57)

$$E[I_E] = P(E)$$

Für Ereignisse und ihre Indikatorvariable
gelten die Beziehungen

$$E = \{I_E = 1\},$$

$$E[I_E] = P(I_E = 1) = P(E).$$

Aus dem Rechnen mit Indikatorvariablen
und aus der Linearität des Erwartungswertes
ergeben sich die Regeln
für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten:

$$(i) \mathbf{P}(E_S) = 1, \quad \mathbf{P}(E_U) = 0,$$

denn

eine $\{0, 1\}$ -wertige ZV'e, die stets den Wert 1 annimmt,
hat Erwartungswert 1.

Das passt auch zu unserer Vereinbarung der ersten Stunde:

Für eine S -wertige Zufallsvariable X ist

$$\mathbf{P}(X \in S) = 1.$$

$$(ii) \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$$

Das sieht man aus der Identität

$$b_1 + b_2 = \max(b_1, b_2) + \min(b_1, b_2), \quad b_1, b_2 \in \{0, 1\}$$

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

zusammen mit der Linearität des Erwartungswertes.

$$(ii) \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2)$$

Das sieht man aus der Identität

$$b_1 + b_2 = \max(b_1, b_2) + \min(b_1, b_2), \quad b_1, b_2 \in \{0, 1\}$$

$$I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1 \cup E_2} + I_{E_1 \cap E_2}$$

zusammen mit der Linearität des Erwartungswertes.

Aus (ii) folgt sofort die **Subadditivität**:

$$\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$$

Eine weitere unmittelbare Konsequenz aus (ii) ist

$$(iii) \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$$

falls E_1 und E_2 disjunkt.

“(endliche) Additivität”

Eine weitere unmittelbare Konsequenz aus (ii) ist

$$(iii) \quad \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$$

falls E_1 und E_2 disjunkt.

“(endliche) Additivität”

In der Wahrscheinlichkeitstheorie arbeitet man mit einer stärkeren Form dieser Eigenschaft, der σ -Additivität. Sie besagt:

Für unendliche Folgen E_1, E_2, \dots von paarweise disjunkten Ereignissen

$$\text{gilt } \mathbf{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + \dots.$$

Diese Formel entspricht zusammen mit der Eigenschaft (i) den Axiomen von Kolmogorov für Wahrscheinlichkeitsmaße.

Eine unmittelbare Konsequenz aus
der Additivität des Erwartungswertes ist

$$(iv) \quad \mathbf{P}(E^c) = 1 - \mathbf{P}(E)$$

(Regel von der Gegenwahrscheinlichkeit)

$$\text{denn: } I_{E^c} = 1 - I_E.$$

Für je zwei Ereignisse E_1, E_2 gilt die folgende
“Zerlegung von E_2 ”:

$$E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1^c \cap E_2),$$

dabei sind $E_1 \cap E_2$ und $E_1^c \cap E_2$ disjunkt.

Also folgt aus der Additivität:

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) \leq \mathbf{P}(E_2).$$

Für je zwei Ereignisse E_1, E_2 gilt die folgende
“Zerlegung von E_2 ”:

$$E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1^c \cap E_2),$$

dabei sind $E_1 \cap E_2$ und $E_1^c \cap E_2$ disjunkt.

Also folgt aus der Additivität:

$$\mathbf{P}(E_1 \cap E_2) \leq \mathbf{P}(E_2).$$

Daraus ergibt sich

$$\text{(v) } \mathbf{P}(E_1) \leq \mathbf{P}(E_2)$$

falls das Ereignis E_1 das Ereignis E_2 nach sich zieht

(d.h. falls gilt: $E_1 = E_1 \cap E_2$)

Wir fassen zusammen:

$$(i) \quad \mathbf{P}(E_S) = 1, \quad \mathbf{P}(E_U) = 0.$$

$$(ii) \quad \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) + \mathbf{P}(E_1 \cap E_2),$$

insbesondere $\mathbf{P}(E_1 \cup E_2) \leq \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$.

$$(iii) \quad \mathbf{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2)$$

falls E_1 und E_2 disjunkt.

$$(iv) \quad \mathbf{P}(E^c) = 1 - \mathbf{P}(E).$$

$$(v) \quad \mathbf{P}(E_1) \leq \mathbf{P}(E_2), \text{ falls } E_1 \subset E_2.$$