

# Vorlesung 3b

## Indikatorvariable

Rechnen mit Ereignissen und  
Wahrscheinlichkeiten.

### **Teil 1**

**Ereignisse und ihre Indikatorvariablen**

(Buch S. 36-37)

Wir wissen schon:

**Ein- und dasselbe Ereigniss kann man  
auf verschiedene Weisen darstellen:**

Beispiel:

Sei  $X = (X_1, X_2)$  das Paar der Augenzahlen  
beim zweimaligen (gewöhnlichen) Würfeln. Dann gilt:

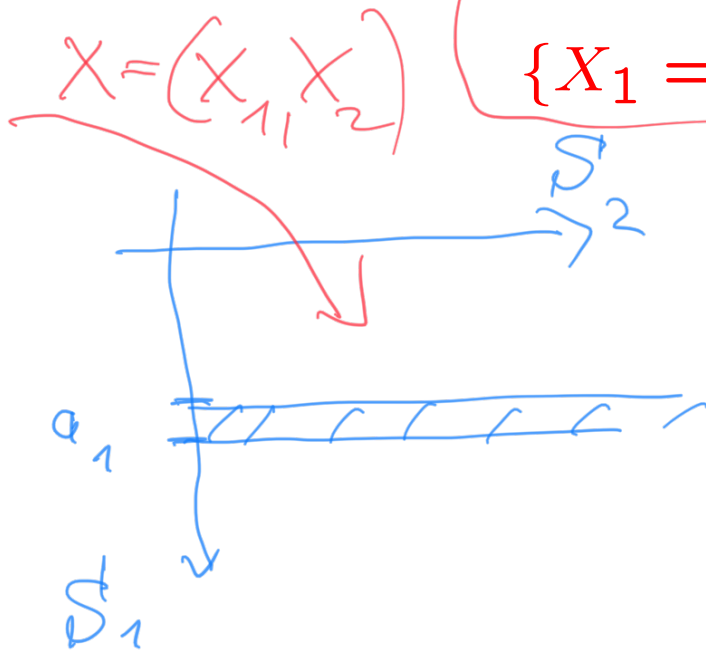
$$\{X_1 = 3\} = \{X_1 = 3, X_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

Allgemeiner:

Sei  $X = (X_1, X_2)$  ein zufälliges Paar  
mit Wertebereich  $S_1 \times S_2$ .

Dann ist für  $a_1 \in S_1$

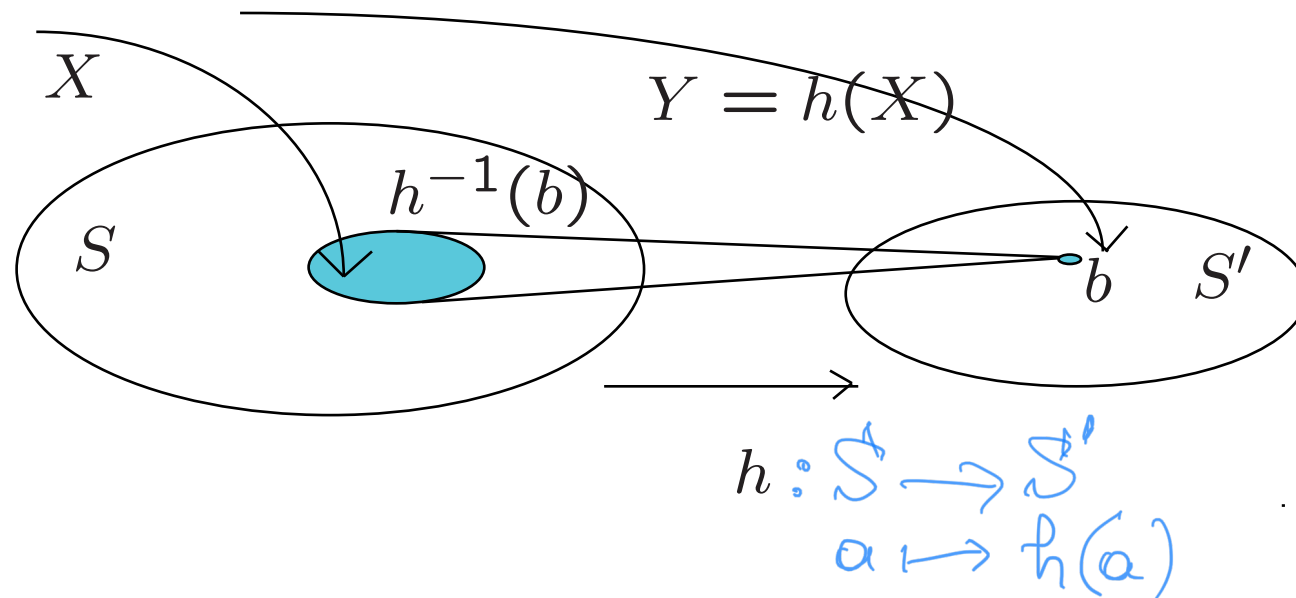
$$\{X_1 = a_1\} = \{X_1 \in a_1, X_2 \in S_2\}.$$



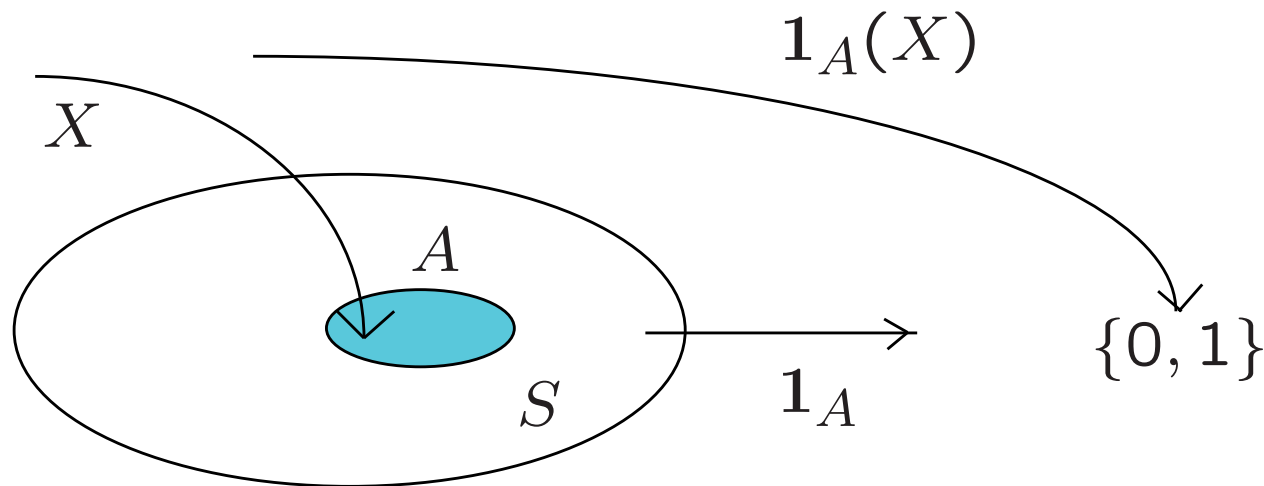
Noch allgemeiner gilt

für die “Verarbeitung”  $Y = h(X)$  einer Zufallsvariablen  $X$ :

$$\{Y = b\} = \{X \in h^{-1}(b)\}.$$

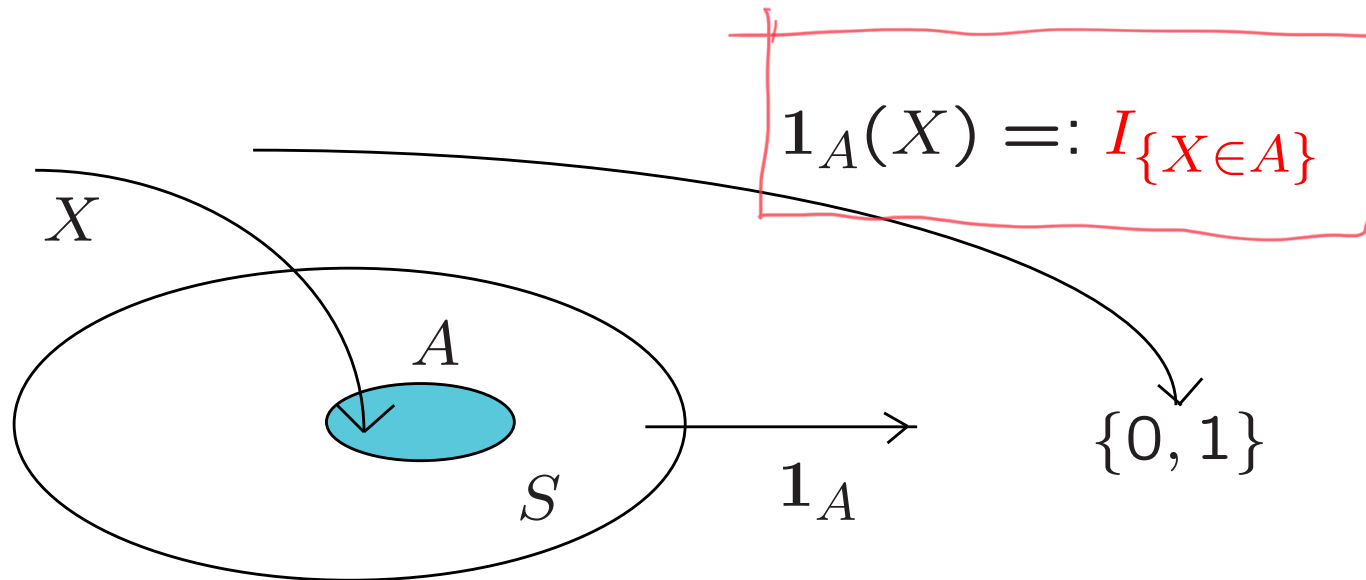


Ein wichtiger Spezialfall hiervon ist die Verarbeitung von  $X$  mittels der Indikatorfunktion  $\mathbf{1}_A$  einer Teilmenge  $A$  von  $S$ :



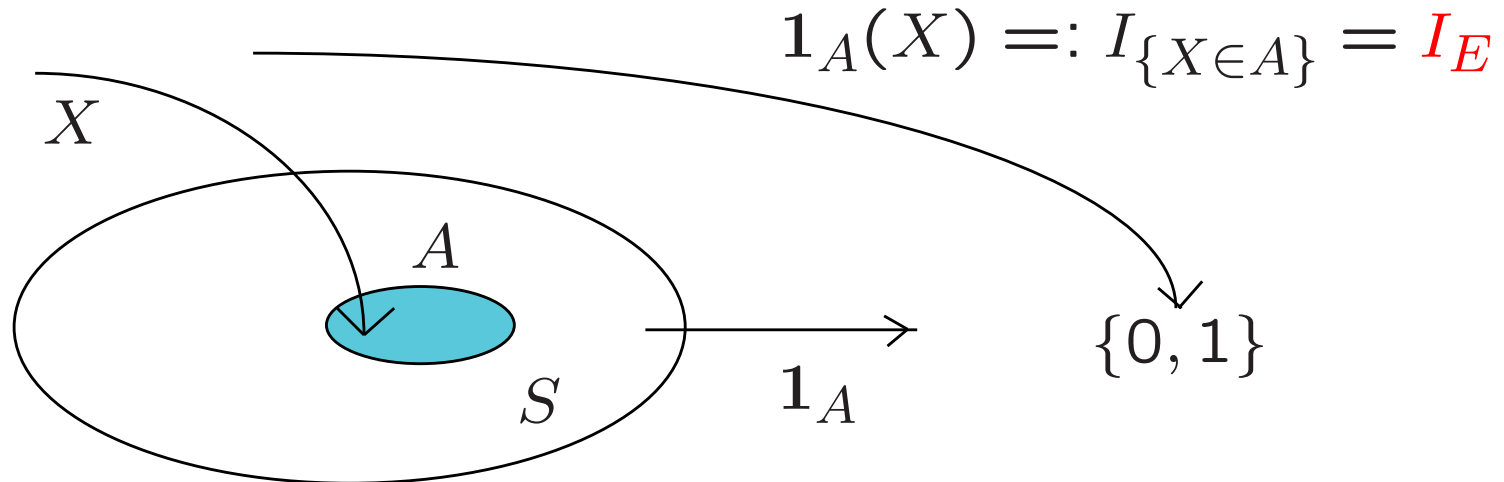
$$\{X \in A^c\} = \{1_A(X) = 0\}$$

$$\{X \in A\} = \{1_A(X) = 1\}$$



$$\{X \in A\} = \{\mathbf{1}_A(X) = 1\}$$

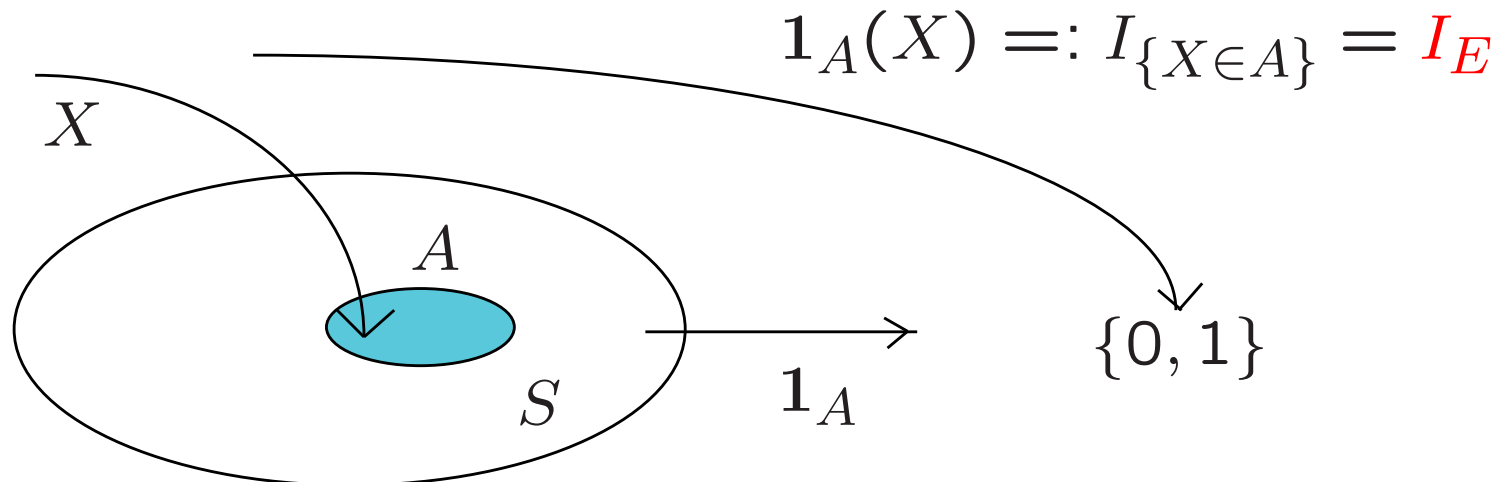
$I_{\{X \in A\}}$  heißt **Indikatorvariable** des Ereignisses  $\{X \in A\}$



$$E := \{X \in A\} = \{\mathbf{1}_A(X) = 1\}$$

$$E = \{I_E = 1\}$$

$I_E$  fällt auf den Wert 1 genau dann,  
wenn das Ereignis  $E$  eintritt.



$$\mathbf{E} := \{X \in A\} = \{\mathbf{1}_A(X) = 1\}$$

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{I}_E = 1\}$$

$\mathbf{I}_E$  fällt auf den Wert 0 genau dann,  
wenn das Ereignis  $\mathbf{E}$  nicht eintritt.



$$E = \{I_E = 1\}.$$

Ereignisse sind gleich,  
wenn ihre Indikatorvariablen gleich sind  
(in dem Sinn, dass beide stets gemeinsam auf 0  
oder gemeinsam auf 1 fallen)

$$E = \{I_E = 1\}.$$

Ereignisse sind gleich,  
wenn ihre Indikatorvariablen gleich sind  
(in dem Sinn, dass beide stets gemeinsam auf 0  
oder gemeinsam auf 1 fallen)

Wann “sind zwei Zufallsvariablen gleich”?

Intuitiv dann, wenn stets  
die eine auf denselben Wert fällt wie die andere.

Das präzisieren wir im Folgenden.

## Das sichere Ereignis

Für jede Zufallsvariable  $X$  mit Wertebereich  $S$  gilt:

$$I_{\{X \in S\}} = \mathbf{1}_S(X)$$

ist eine Zufallsvariable, die “sicher” auf den Ausgang 1 fällt.

## Das sichere Ereignis

Für jede Zufallsvariable  $X$  mit Wertebereich  $S$  gilt:

$$I_{\{X \in S\}} = \mathbf{1}_S(X)$$

ist eine Zufallsvariable, die “sicher” auf den Ausgang 1 fällt.

Das *sichere Ereignis*  $E_S$  ist dadurch charakterisiert, dass seine Indikatorvariable stets auf den Wert 1 fällt:

$$I_{E_S} = 1.$$

Die Aussage  $X = Y$  und das Ereignis  $\{X = Y\}$

Seien  $X, Y$  Zufallsvariable mit demselben Wertebereich  $S$ .

$D := \{(x, y) \in S^2 : x = y\}$ , die „Diagonale“ in  $S^2$ .

Die Aussage  $X = Y$  und das Ereignis  $\{X = Y\}$

Seien  $X, Y$  Zufallsvariable mit demselben Wertebereich  $S$ .

$D := \{(x, y) \in S^2 : x = y\}$ , die „Diagonale“ in  $S^2$ .

Wir definieren **das Ereignis „ $X$  und  $Y$  fallen gleich aus“**

als

$$\{X = Y\} := \{(X, Y) \in D\}$$

Ist dieses Ereignis gleich dem sicheren Ereignis,  
so schreiben wir dafür kurz:

$$X = Y$$