Vorlesung 3b

Indikatorvariable

Rechnen mit Ereignissen und Wahrscheinlichkeiten.

Teil 1

Ereignisse und ihre Indikatorvariablen

(Buch S. 36-37)

Wir wissen schon:

Ein- und dasselbe Ereigniss kann man

auf verschiedene Weisen darstellen:

Beispiel:

Sei $X = (X_1, X_2)$ das Paar der Augenzahlen

beim zweimaligen (gewöhnlichen) Würfeln. Dann gilt:

$$\{X_1 = 3\} = \big\{X_1 = 3,\ X_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\big\}$$

Allgemeiner:

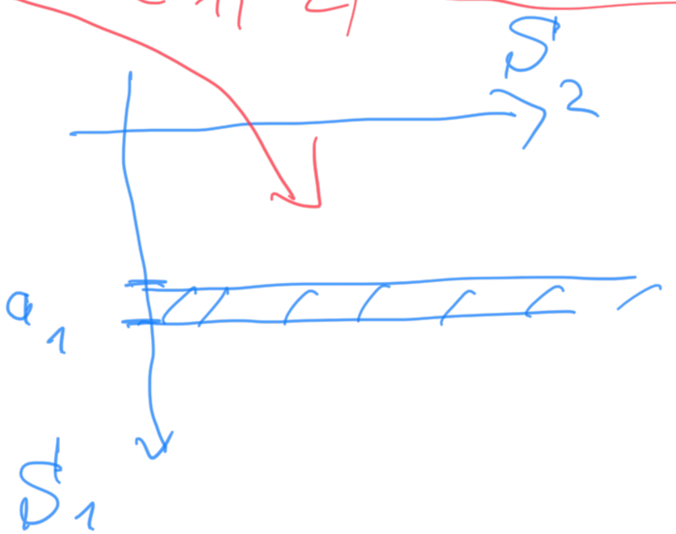
Sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliges Paar

mit Wertebereich $S_1 \times S_2$.

Dann ist für $a_1 \in S_1$

$X = (X_1, X_2)$

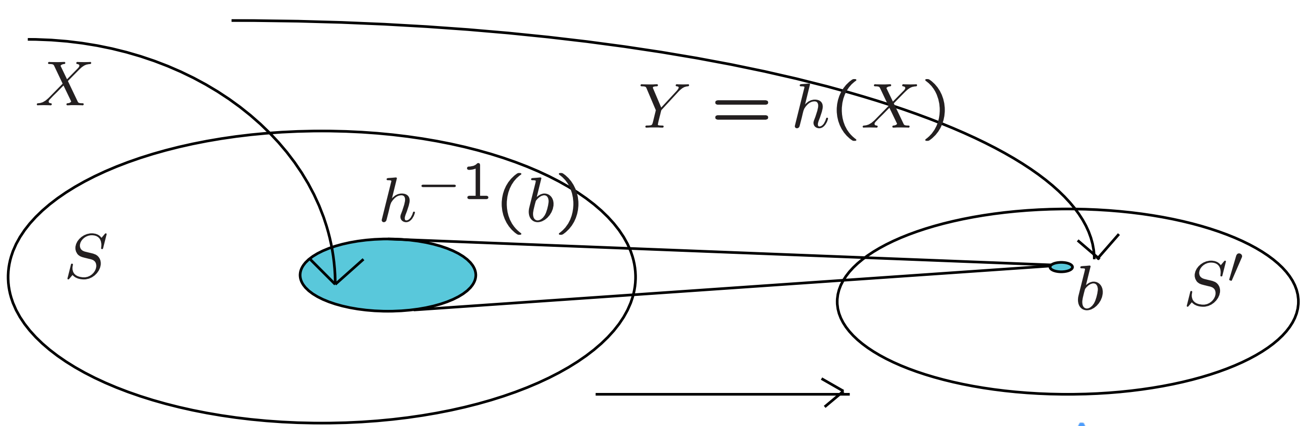
$$\{X_1 = a_1\} = \{X_1 \in a_1, X_2 \in S_2\}.$$



Noch allgemeiner gilt

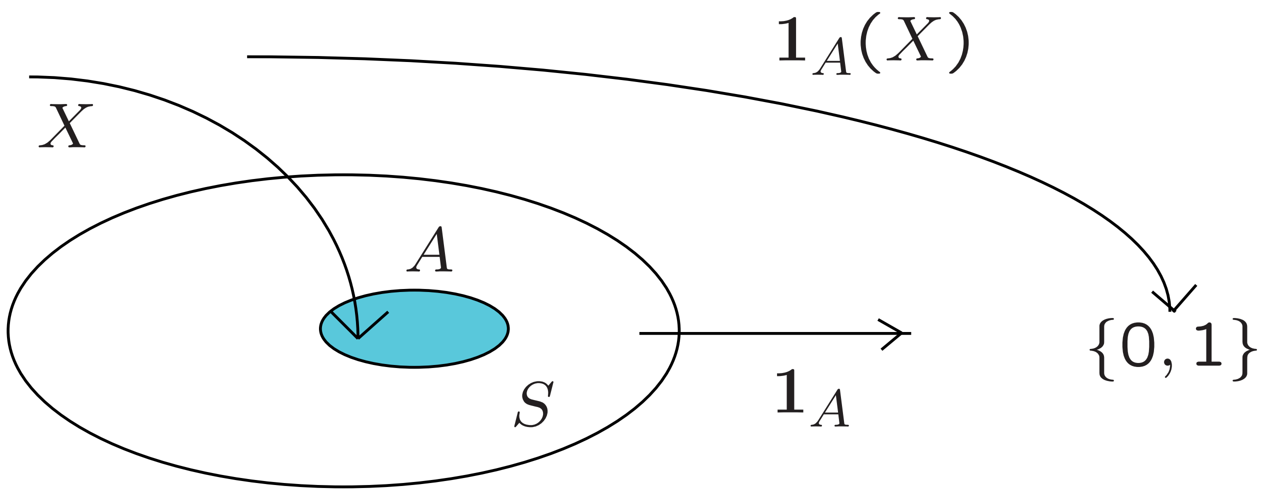
für die “Verarbeitung” $Y = h(X)$ einer Zufallsvariablen X:

$$\boxed{\{Y = b\} = \{X \in h^{-1}(b)\}.}$$



$$h: S \longrightarrow S'$$
$$a \longmapsto h(a)$$

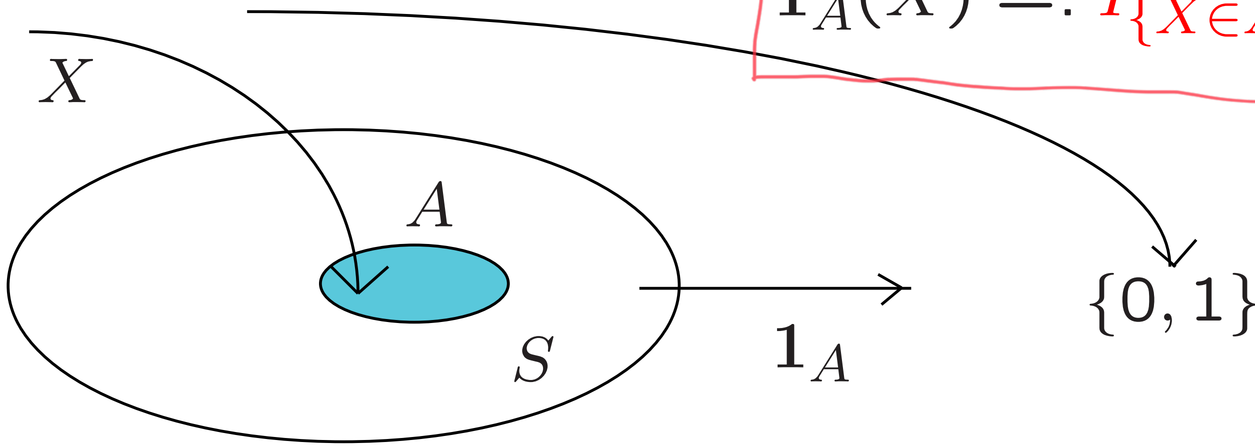
Ein wichtiger Spezialfall hiervon ist die Verarbeitung von X mittels der Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A$ einer Teilmenge A von S:



$$\boxed{\{X \in A\} = \{\mathbf{1}_A(X) = 1\}}$$

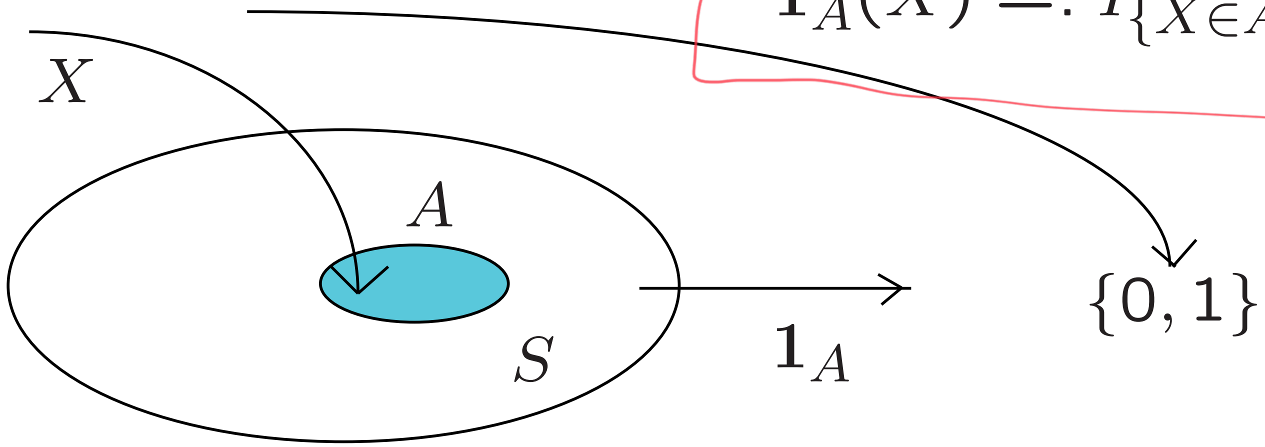
$\{X \in A^c\} = \{1_A(X) = 0\}$

$$\boxed{\mathbf{1}_A(X) =: I_{\{X\in A\}}}$$



$$\{X \in A\} = \{\mathbf{1}_A(X) = 1\}$$

$I_{\{X\in A\}}$ heißt Indikatorvariable des Ereignisses $\{X \in A\}$

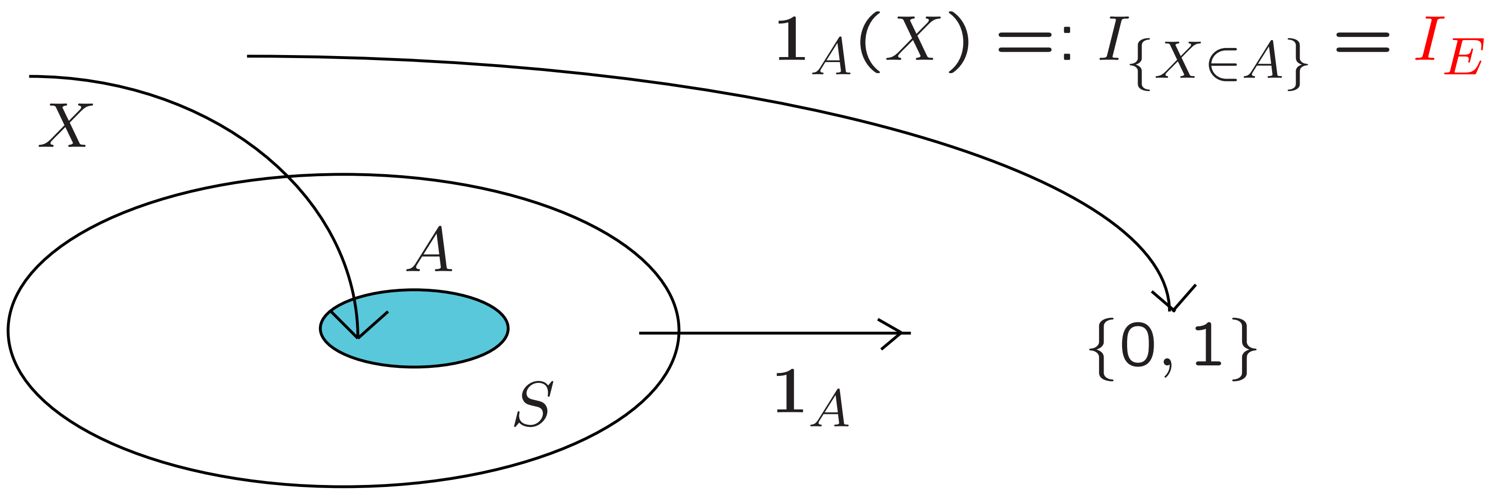


$$\boxed{\mathbf{1}_A(X) =: I_{\{X \in A\}} = I_E}$$

$$\boxed{E := \{X \in A\} = \{\mathbf{1}_A(X) = 1\}}$$

$$E = \{I_E = 1\}$$

I_E fällt auf den Wert 1 genau dann, wenn das Ereignis E eintritt.



$$E := \{X \in A\} = \{\mathbf{1}_A(X) = 1\}$$

$$E = \{I_E = 1\}$$

I_E fällt auf den Wert 0 genau dann,

wenn das Ereignis E nicht eintritt.

$$\boxed{E = \{I_E = 1\}.}$$

Ereignisse sind gleich,

wenn ihre Indikatorvariablen gleich sind

(in dem Sinn, dass beide stets gemeinsam auf 0

oder gemeinsam auf 1 fallen)

$$E = \{I_E = 1\}.$$

Ereignisse sind gleich,

wenn ihre Indikatorvariablen gleich sind

(in dem Sinn, dass beide stets gemeinsam auf 0

oder gemeinsam auf 1 fallen)

Wann “sind zwei Zufallsvariablen gleich”?

Intuitiv dann, wenn stets

die eine auf denselben Wert fällt wie die andere.

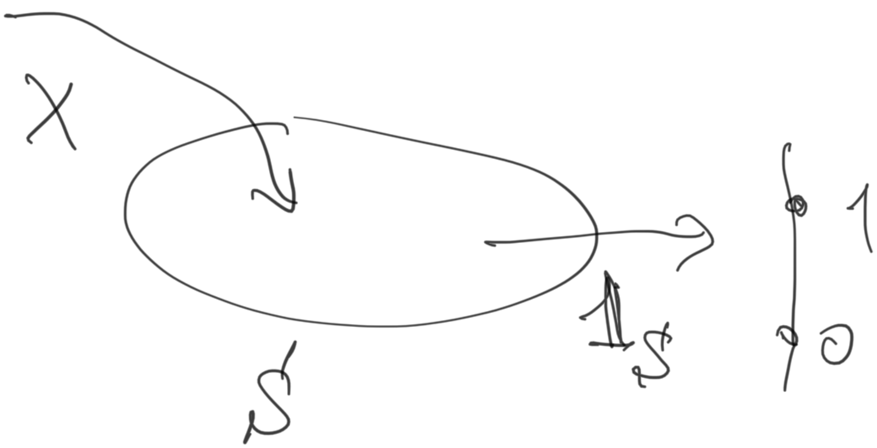
Das präzisieren wir im Folgenden.

Das sichere Ereignis

Für jede Zufallsvariable X mit Wertebereich S gilt:

$$\boxed{I_{\{X \in S\}} = \mathbf{1}_S(X)}$$

ist eine Zufallsvariable, die “sicher” auf den Ausgang 1 fällt.



Ereignisse: $\{X \in A\}$

Das sichere Ereignis

Für jede Zufallsvariable X mit Wertebereich S gilt:

$$I_{\{X \in S\}} = \mathbf{1}_S(X)$$

ist eine Zufallsvariable, die “sicher” auf den Ausgang 1 fällt.

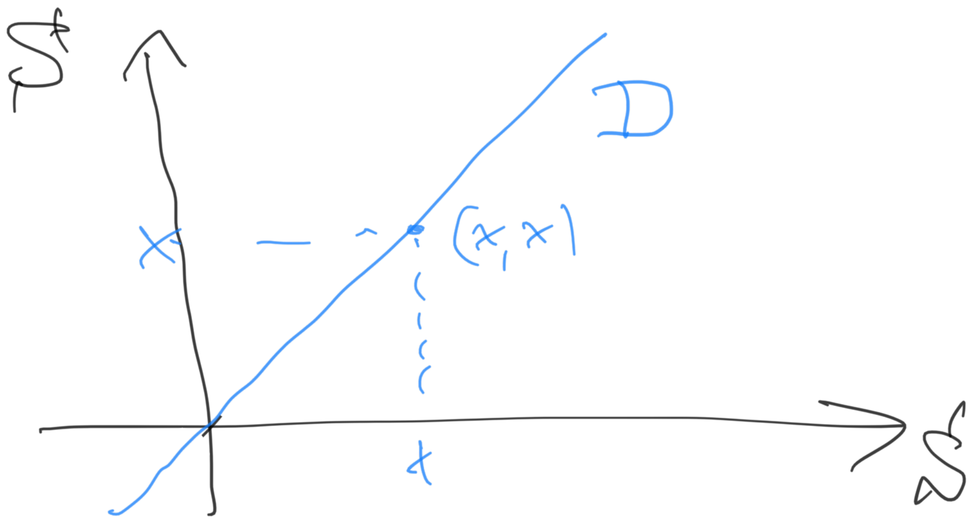
Das *sichere Ereignis* E_{s} ist dadurch charakterisiert, dass seine Indikatorvariable stets auf den Wert 1 fällt:

$$I_{E_{\mathsf{s}}} = 1.$$

Die Aussage $X = Y$ und das Ereignis $\{X = Y\}$

Seien X, Y Zufallsvariable mit demselben Wertebereich S.

$D := \{(x, y) \in S^2 : x = y\}$, die „Diagonale“ in S^2.



Die Aussage $X = Y$ und das Ereignis $\{X = Y\}$

Seien X, Y Zufallsvariable mit demselben Wertebereich S.

$D := \{(x, y) \in S^2 : x = y\}$, die „Diagonale" in S^2.

Wir definieren das Ereignis "X und Y fallen gleich aus"

als

$$\{X = Y\} := \{(X, Y) \in D\}$$

Ist dieses Ereignis gleich dem sicheren Ereignis,

so schreiben wir dafür kurz:

$$X = Y$$