

Vorlesung 3a

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 5

Wie erlebt man den Erwartungswert?

X

eine Zufallsgröße;

$E[X]$

eine Zahl.

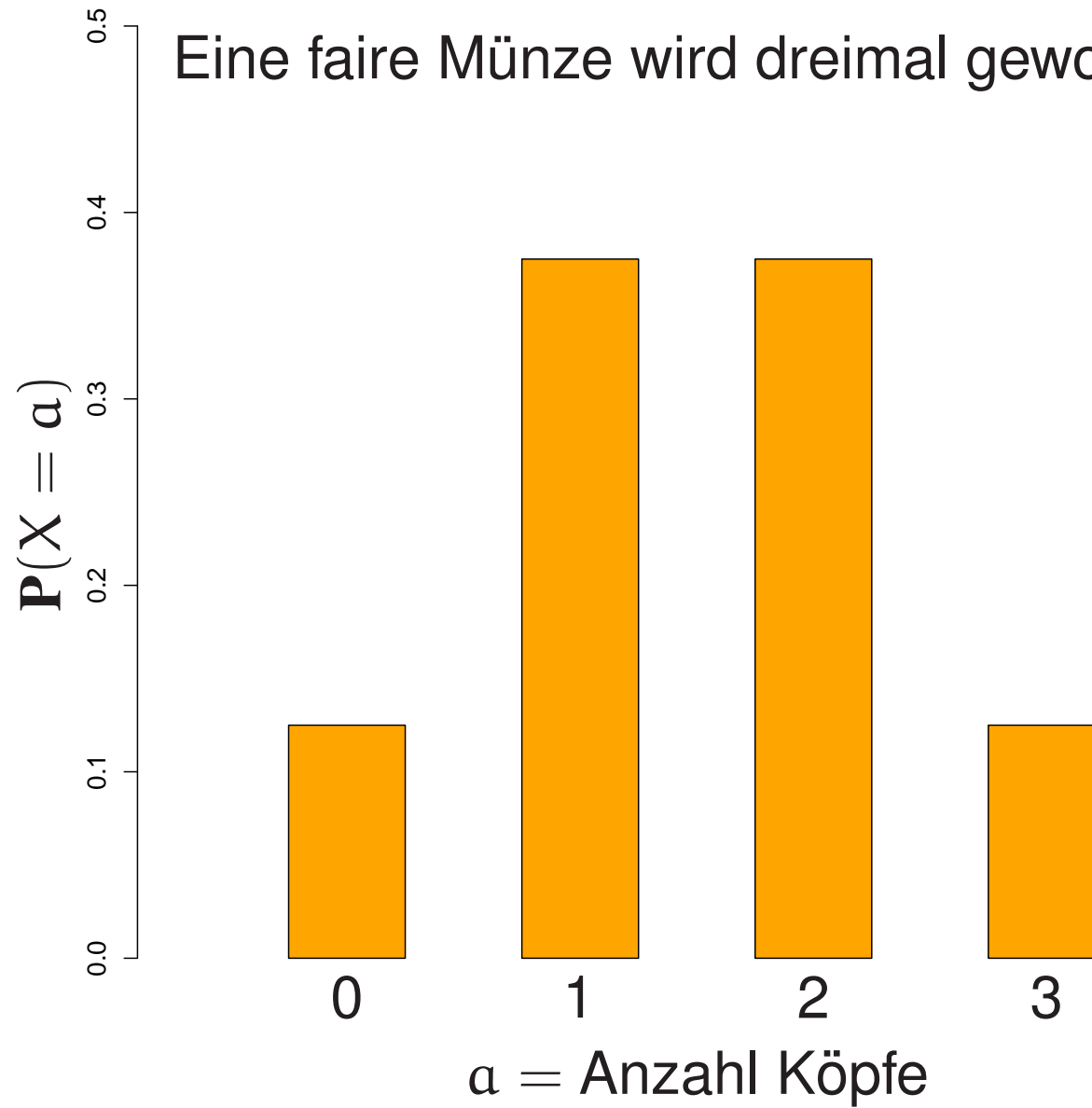
Ein Beispiel: Der Erwartungswert der Anzahl der Erfolge beim dreifachen Münzwurf

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

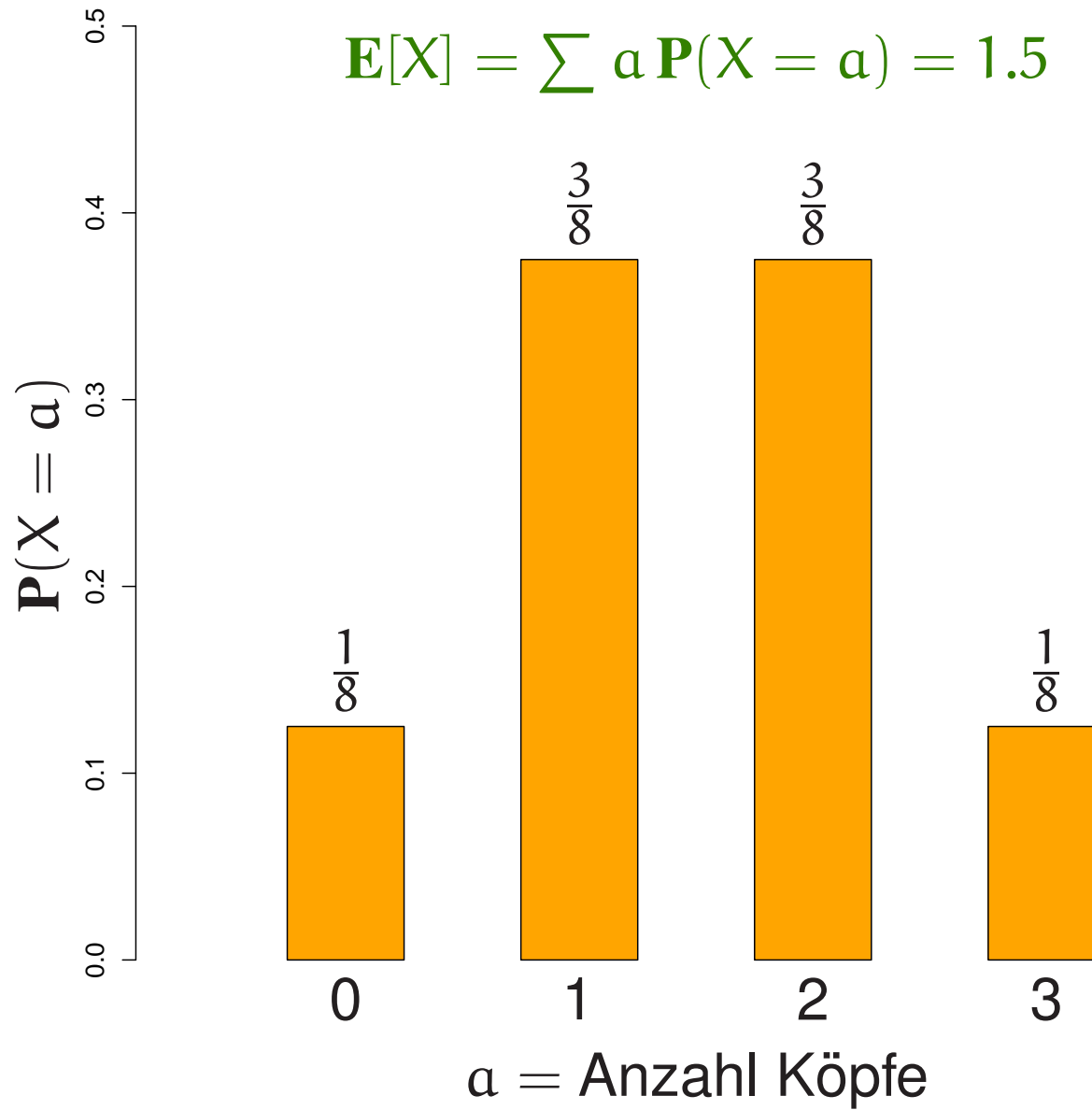
$X :=$ Anzahl der geworfenen Köpfe.

$S := \{0, 1, 2, 3\}$.

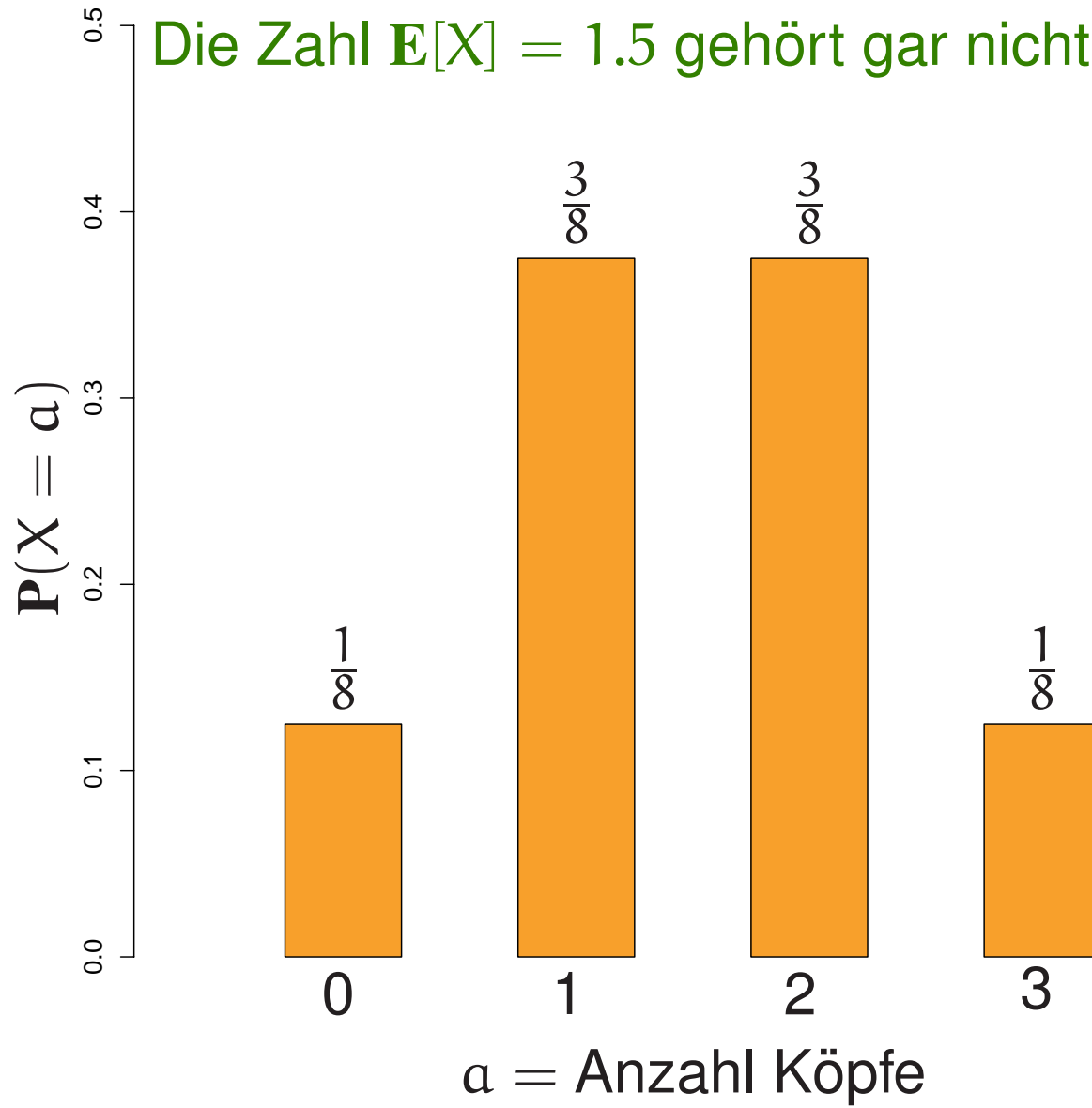
Eine faire Münze wird dreimal geworfen.



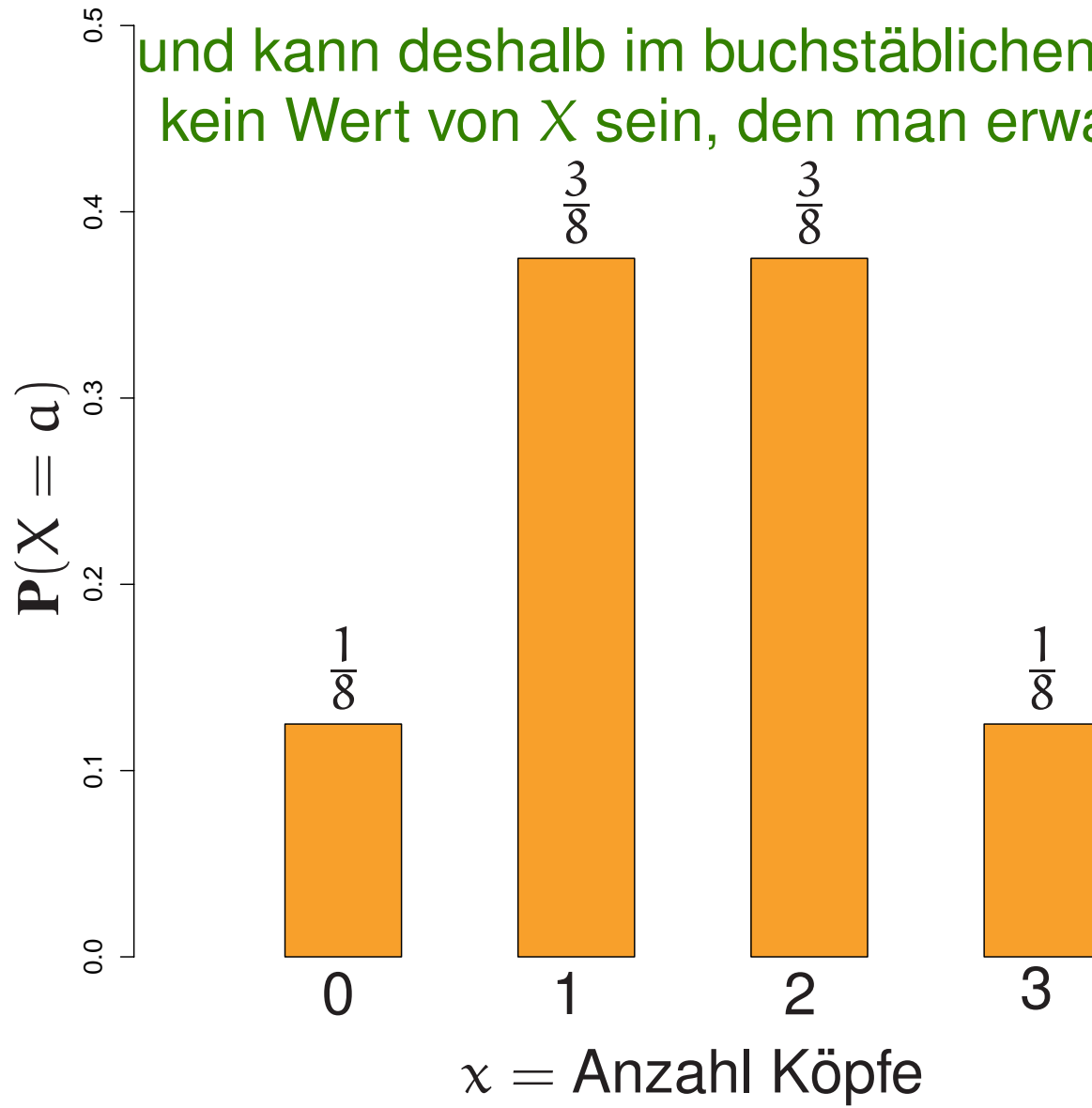
$$\mathbf{E}[X] = \sum a \mathbf{P}(X = a) = 1.5$$



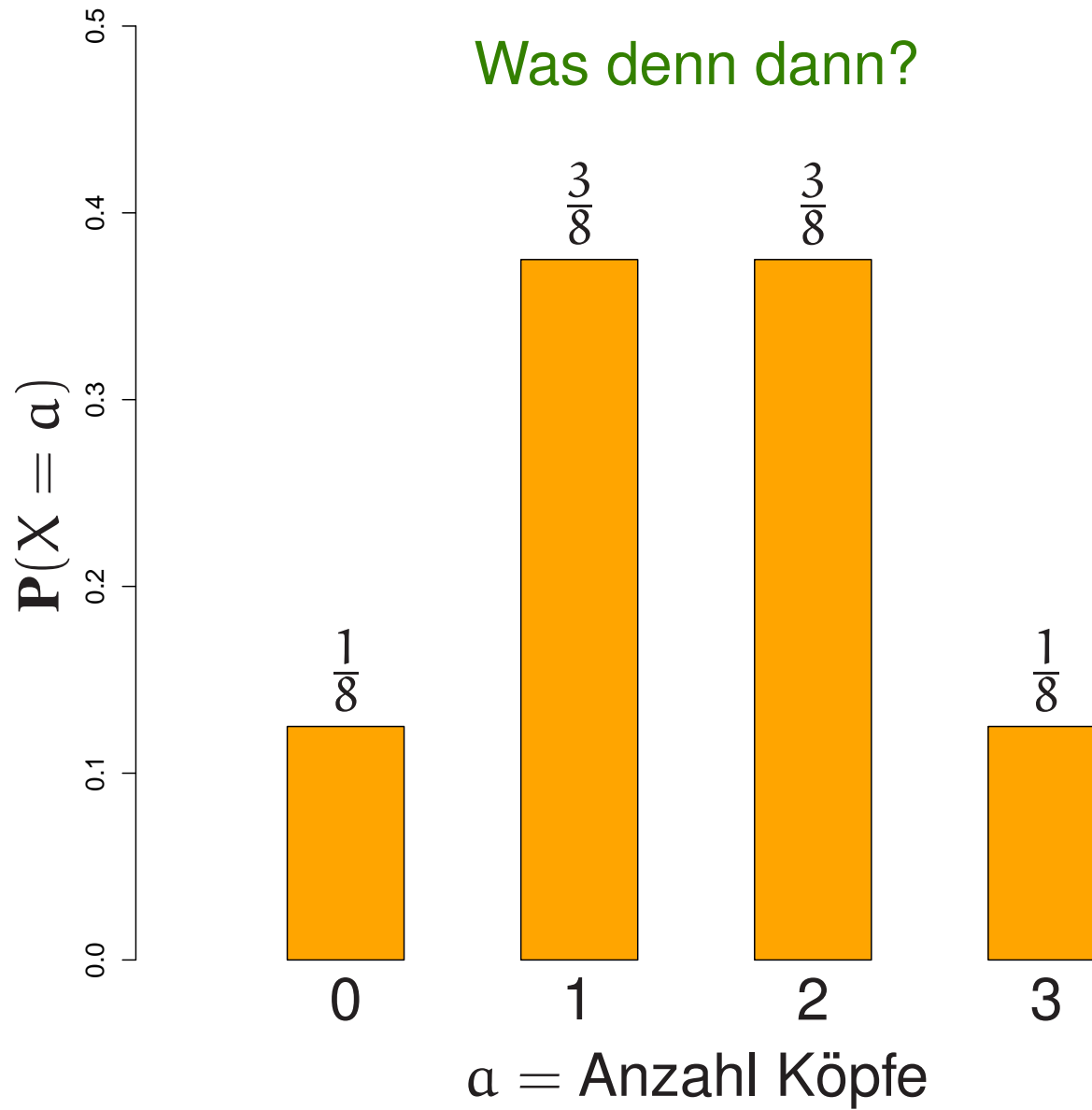
Die Zahl $E[X] = 1.5$ gehört gar nicht zu S



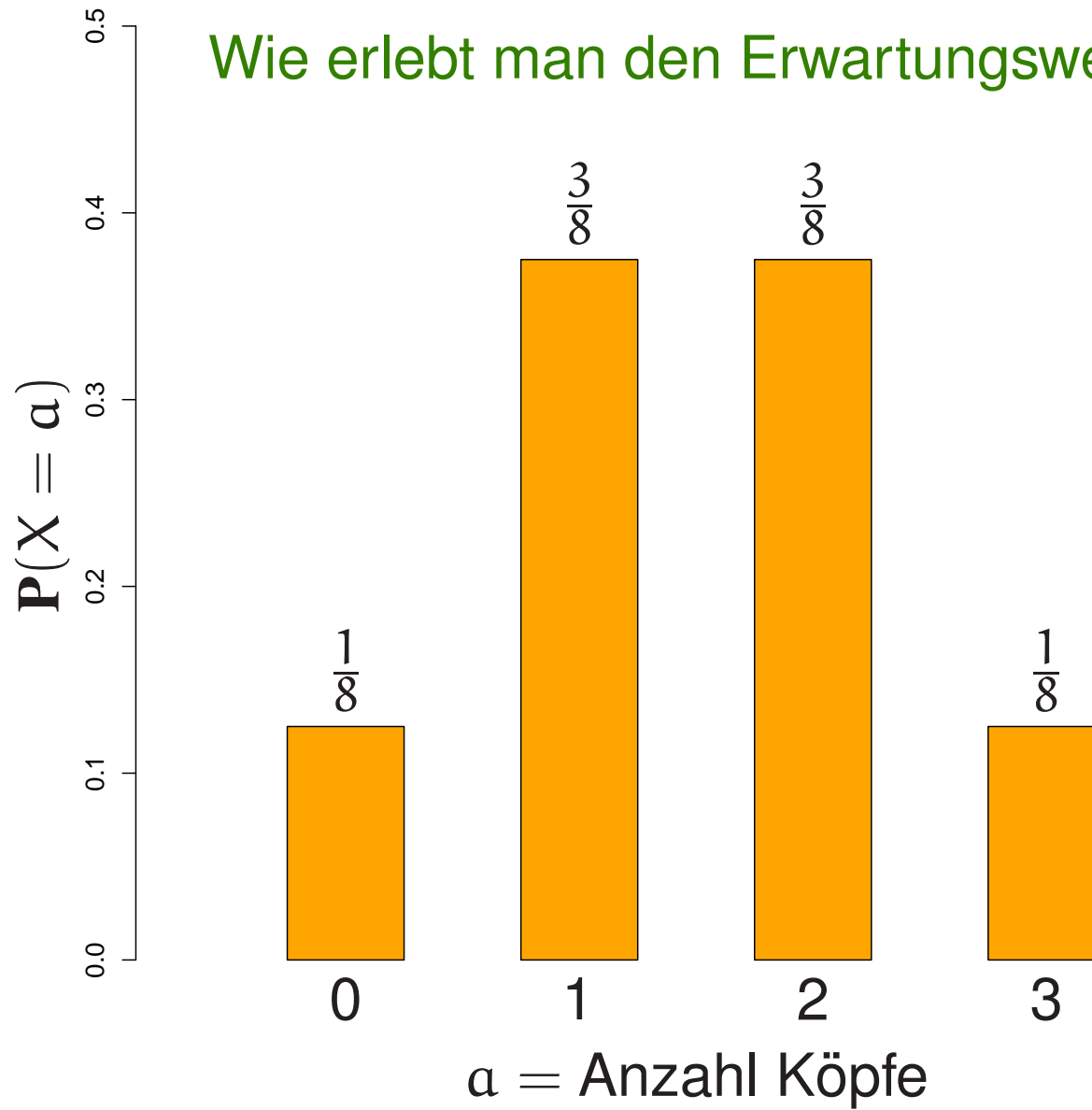
und kann deshalb im buchstäblichen Sinn kein Wert von X sein, den man erwartet.



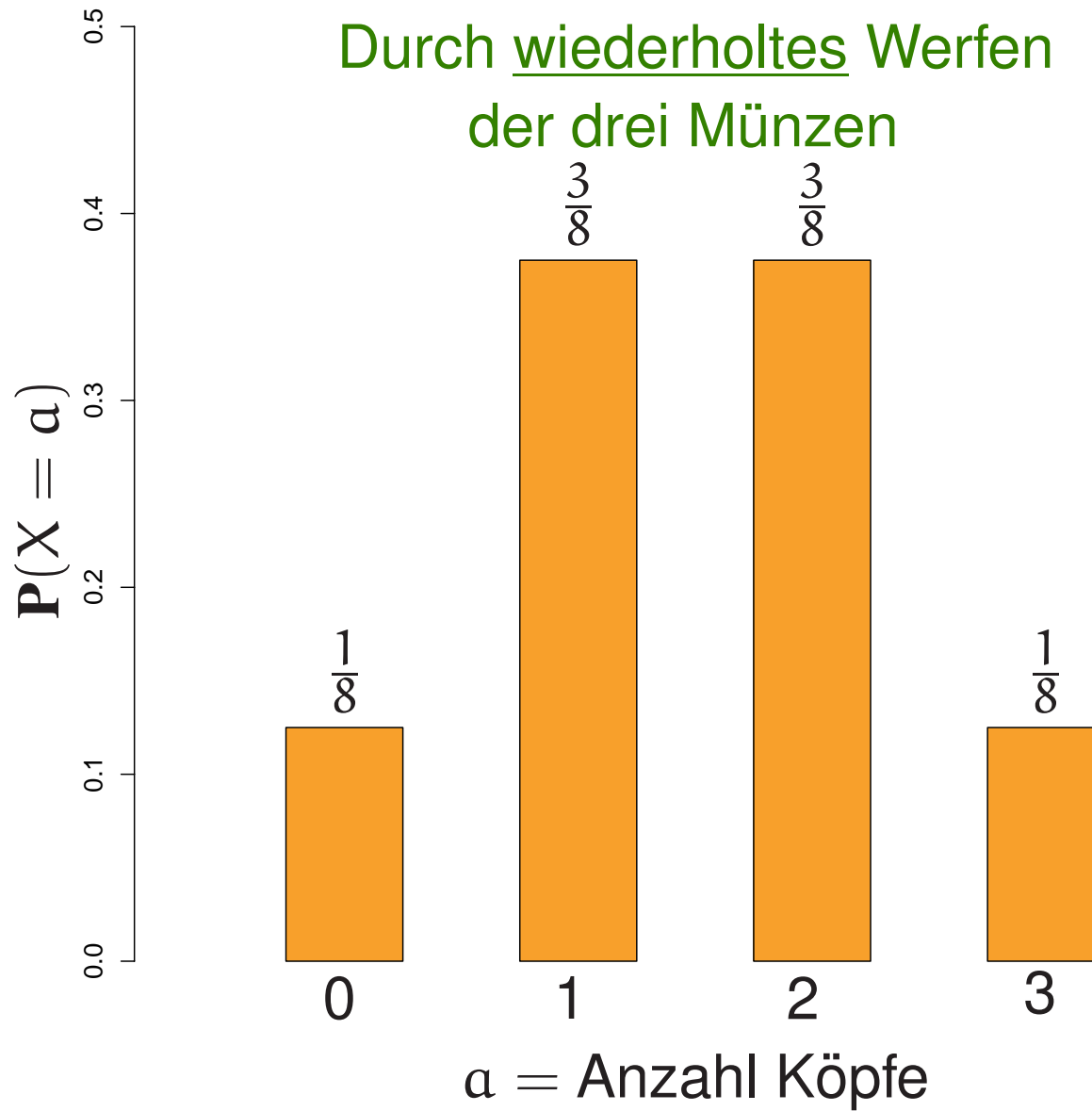
Was denn dann?



Wie erlebt man den Erwartungswert?



Durch wiederholtes Werfen
der drei Münzen

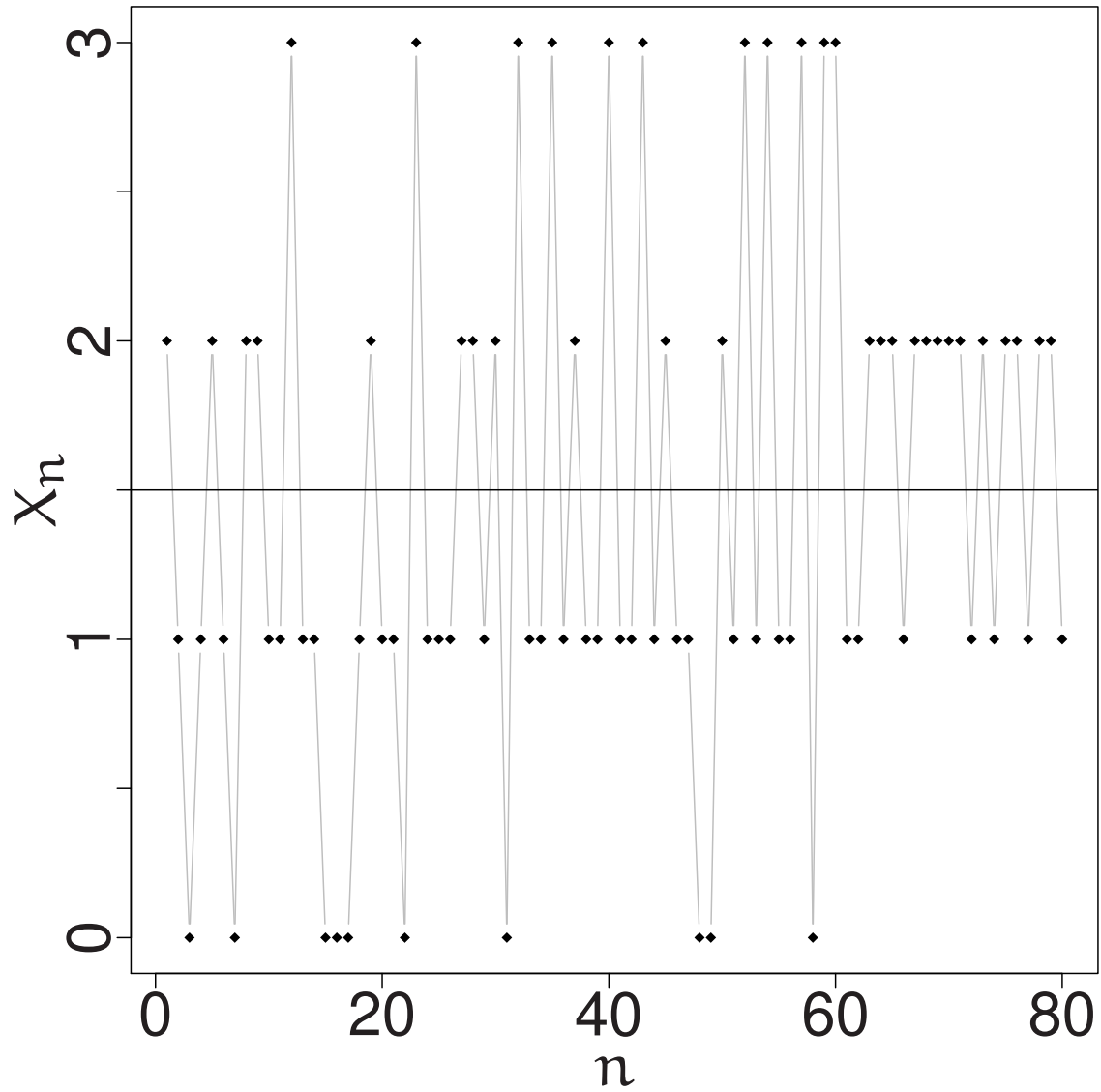


Der Erwartungswert als Langzeitmittel

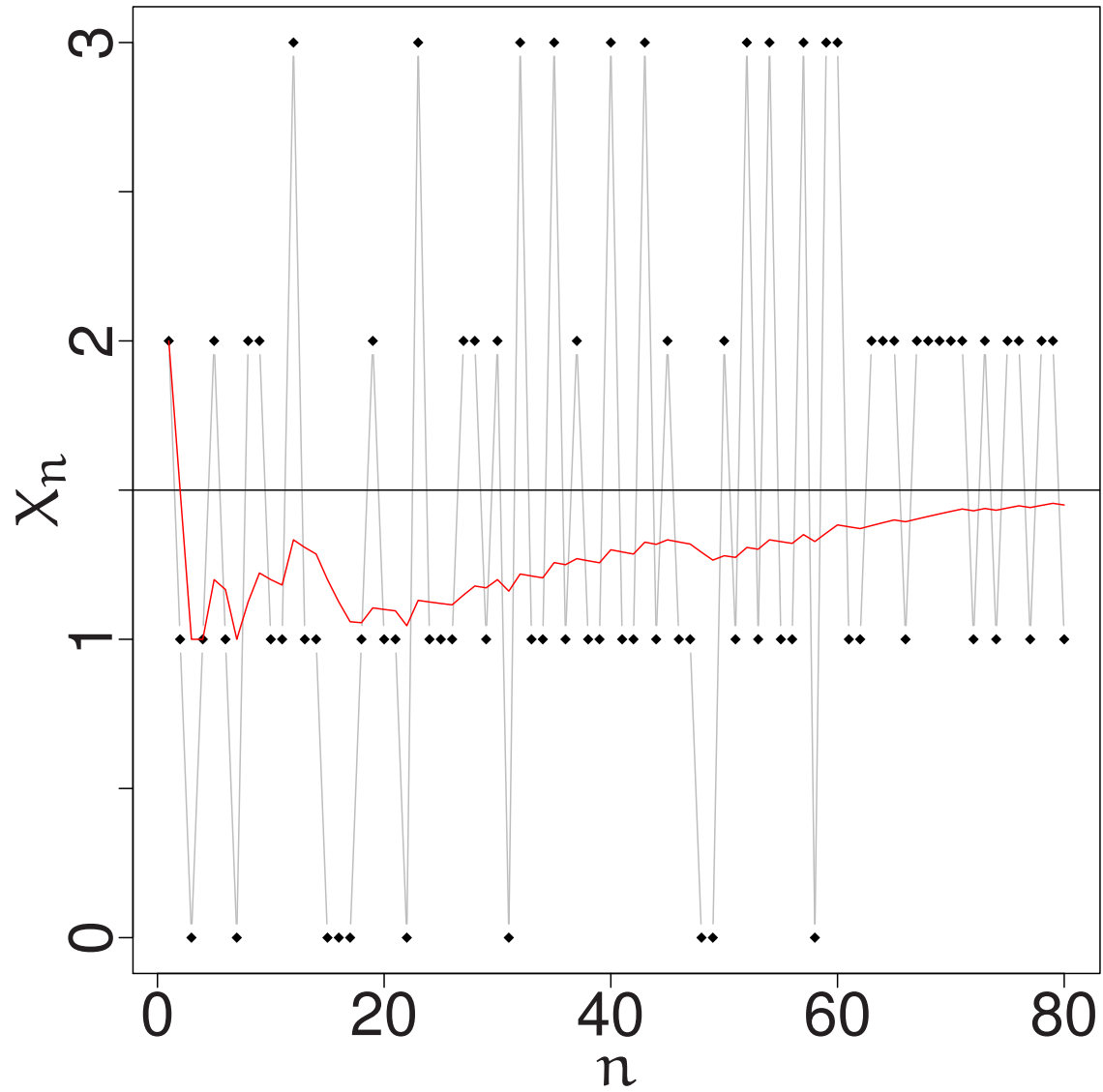
Beispiel:

X ... Anzahl Köpfe beim dreimaligen fairen Münzwurf

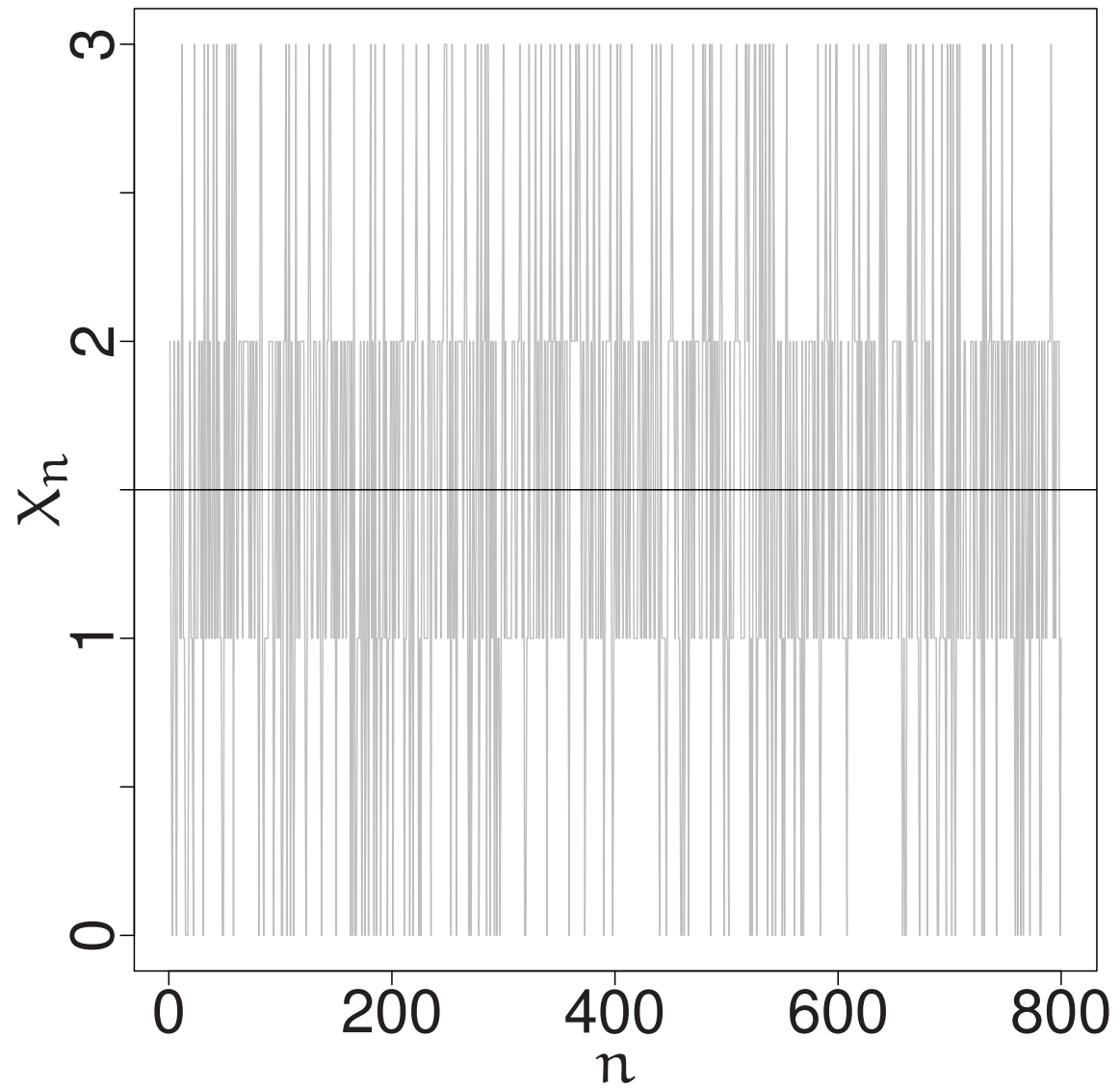
80 Wiederholungen: X_1, X_2, \dots, X_{80}



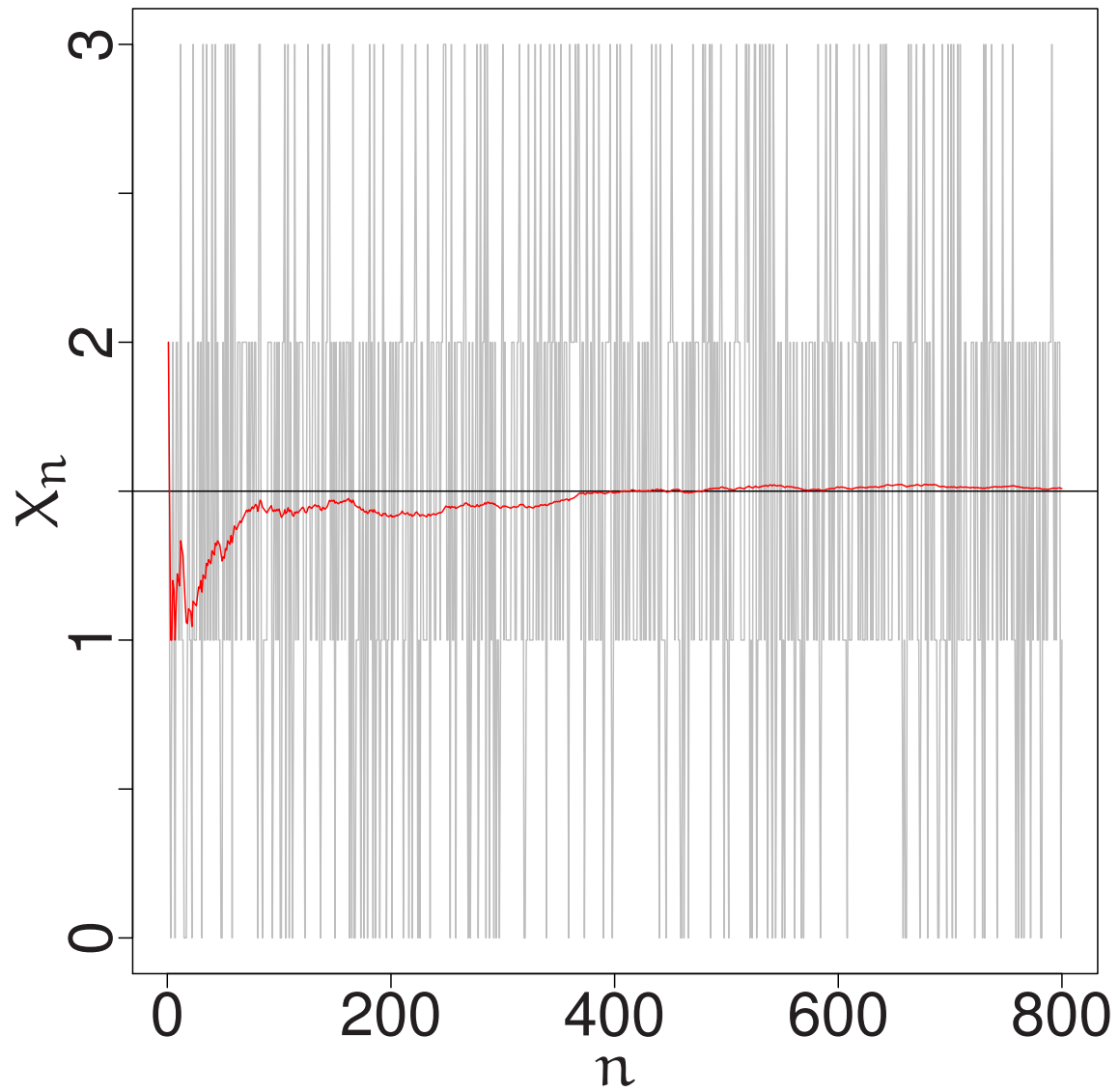
$$M_n := (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$$



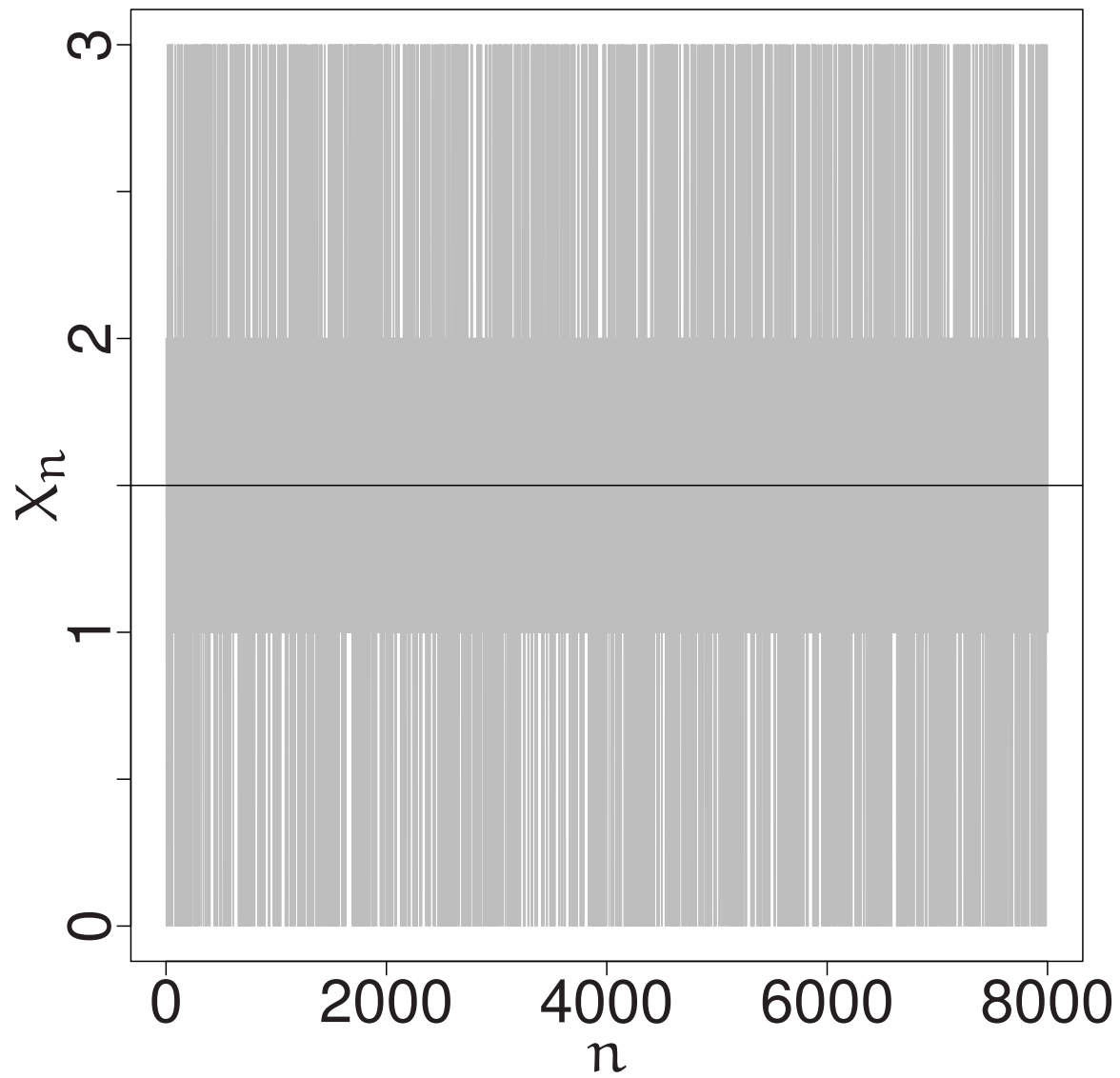
800 Wiederholungen: X_1, X_2, \dots, X_{800}



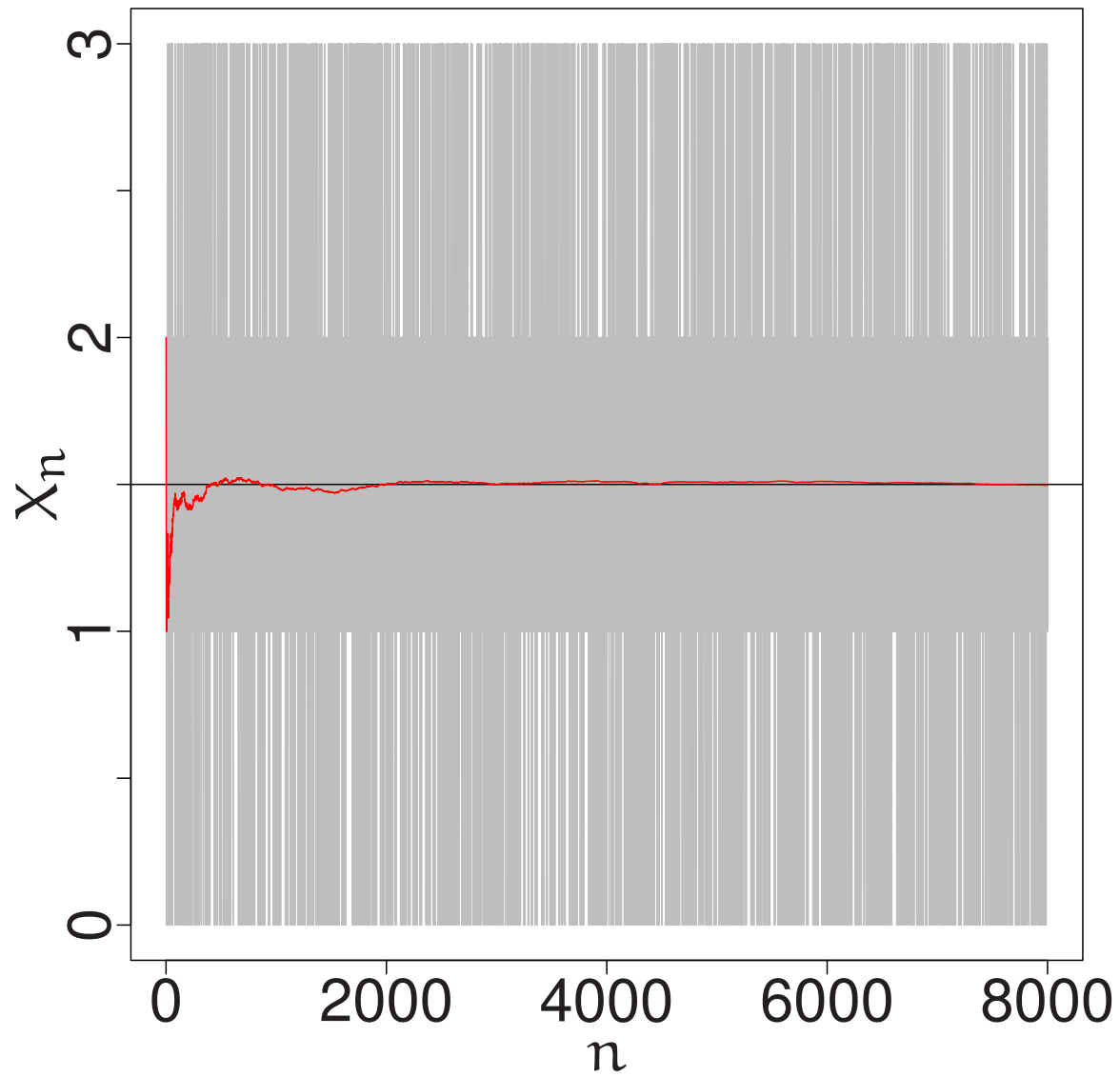
$$M_n := (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$$



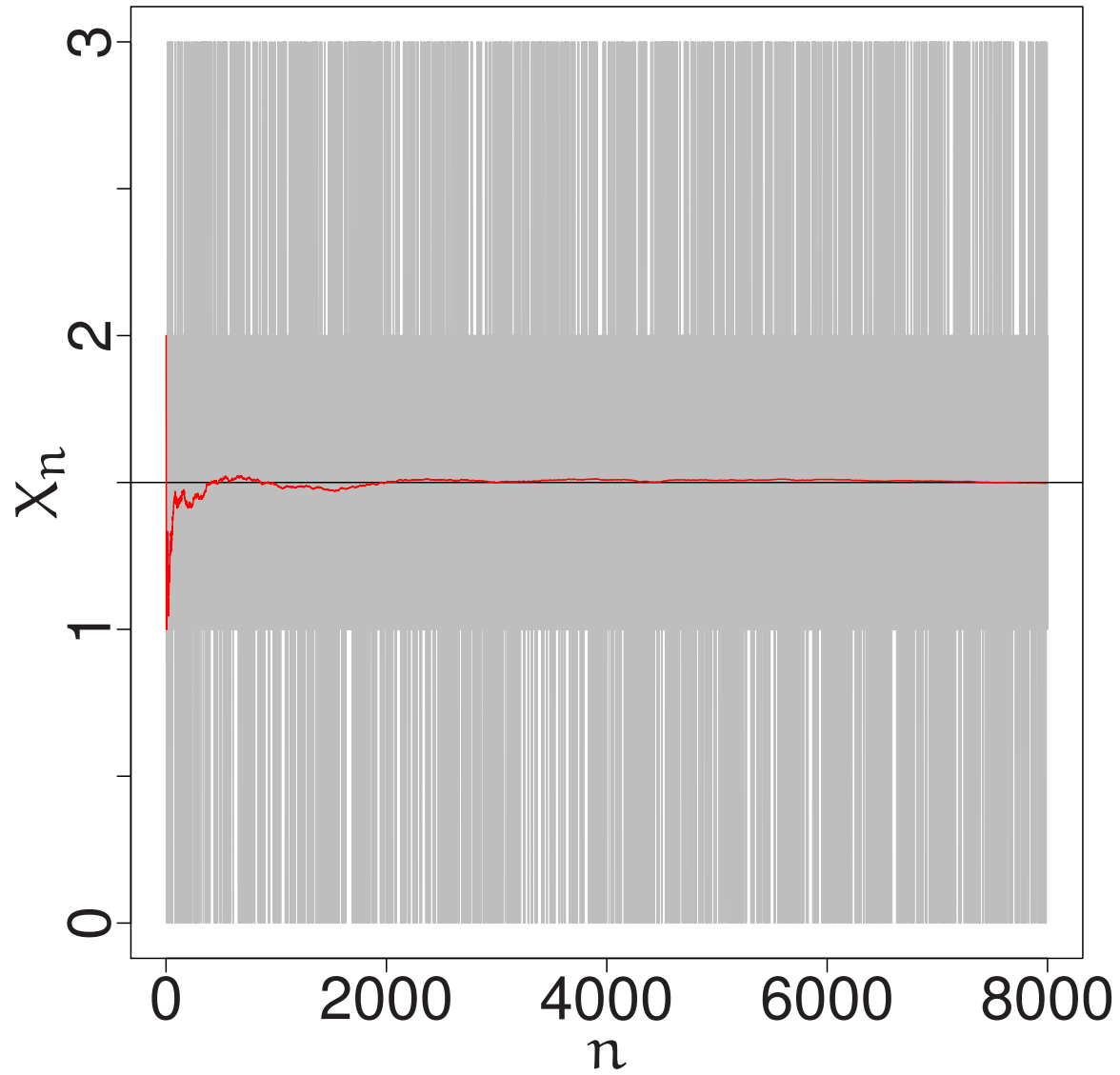
8000 Wiederholungen: $X_1, X_2, \dots, X_{8000}$



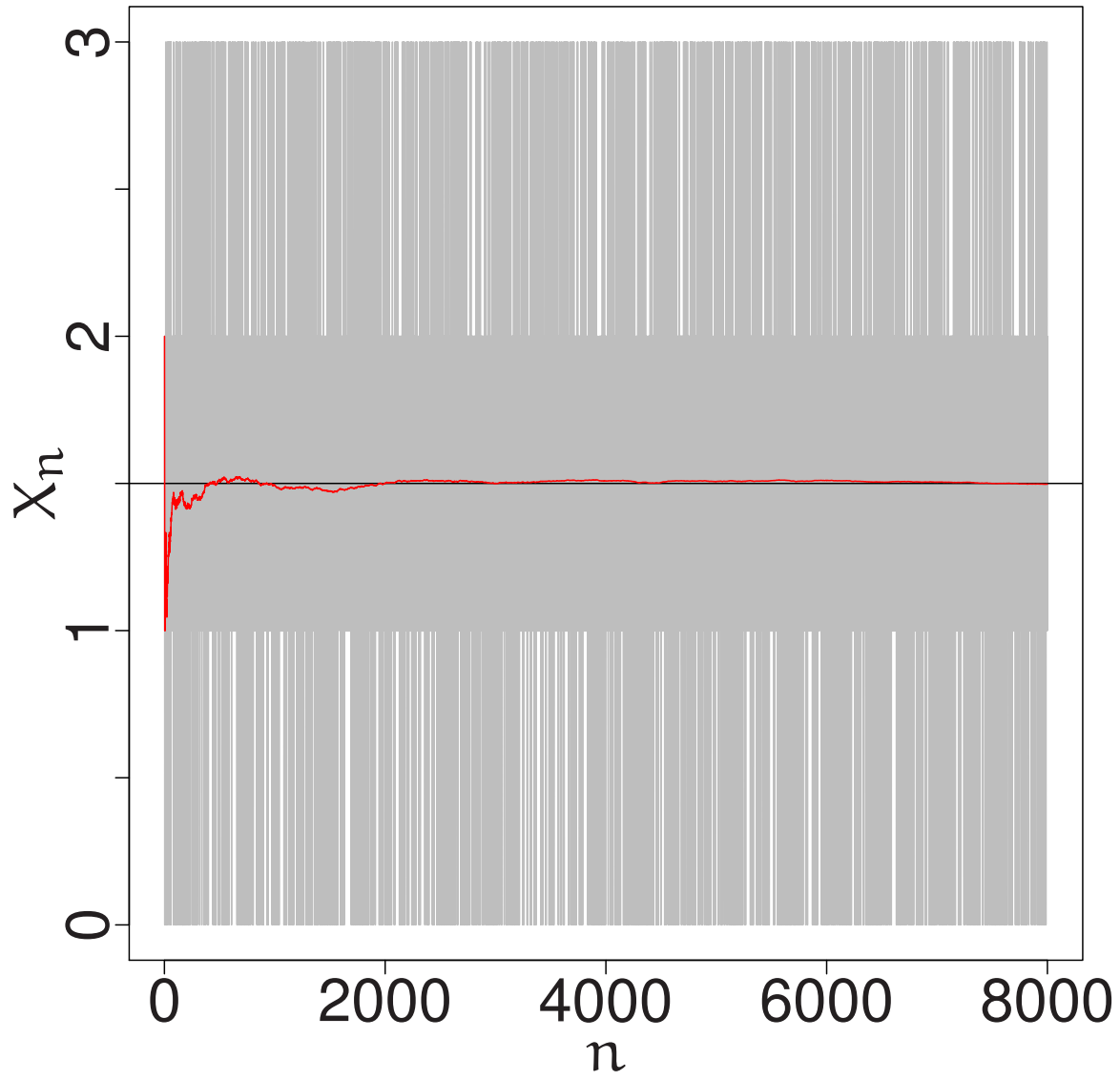
$$M_n := (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$$



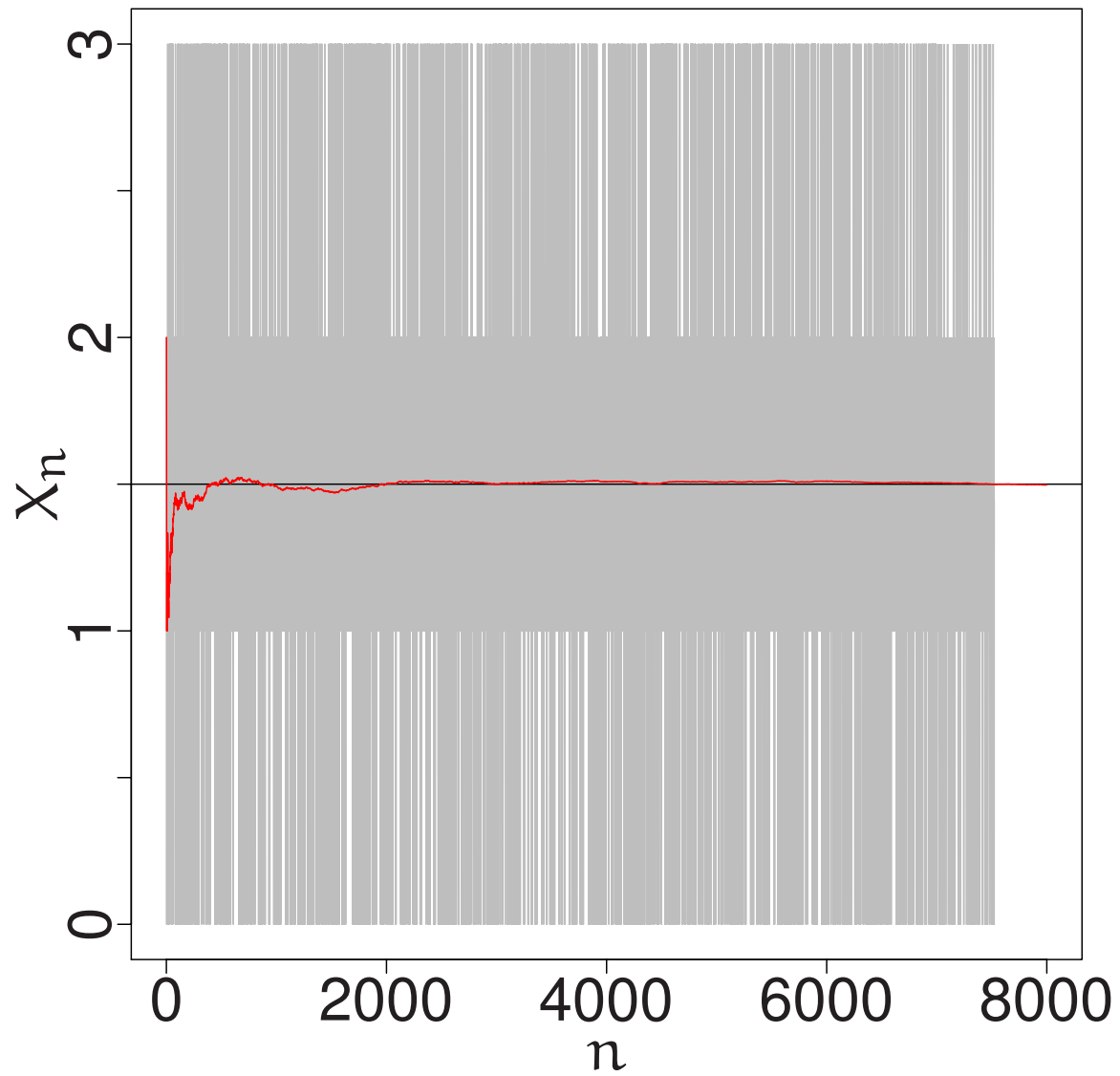
$$M_n \rightarrow \mathbf{E}[X]$$



Warum?



$$M_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$$



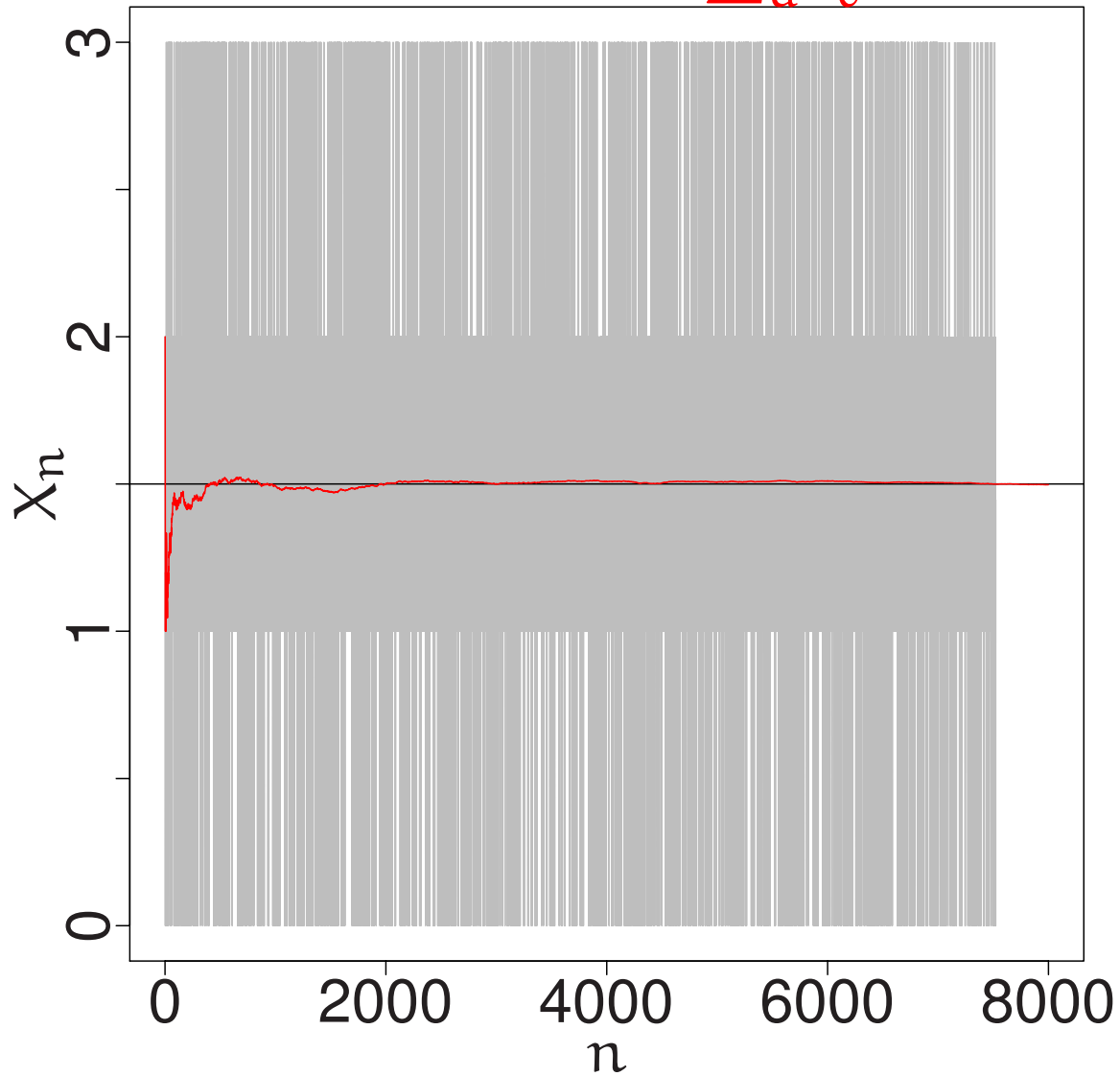
Die Summe von n Zahlen $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1, 2, 3\}$
kann man auch so berechnen:

Man zählt für $a = 1, 2, 3$, wieviele der x_i gleich a sind

und bekommt

$$x_1 + \dots + x_n = \sum_{a=0}^3 a \#\{i \leq n : x_i = a\}.$$

$$M_n = \sum_{a=0}^3 a \#\{i \leq n : X_i = a\}/n$$
$$\rightarrow \sum_{a=0}^3 a \mathbf{P}(X = a)$$



Dazu später mehr.

Für den Moment nur als kurzer Ausblick:

DAS GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien X_1, X_2, \dots unabhängige Kopien von X .

Dann gilt

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbf{E}[X]$$

Zu klären

1. Was heißt „ unabhängig “?

2. Was heißt „ \rightarrow “?

Diese Klärung wird in der Vorlesung
in wenigen Wochen erfolgen.

Jetzt halten wir erst einmal fest:

Zwei Vorstellungen von $\mathbf{E}[X]$

1. Gewichtetes Mittel

der möglichen Werte:

$$\mathbf{E}[X] := \sum a \mathbf{P}(X = a)$$

2. Langzeitmittelwert

bei “unabhängigen” Wiederholungen:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \mathbf{E}[X]$$

Zusammenfassung

des Wichtigsten

A.

Was ist der Erwartungswert?

$$\mathbf{E}[X] = \sum a \mathbf{P}(X = a)$$

und

$$\mathbf{E}[X] = \lim \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

für “unabhängige Wiederholungen” X_1, X_2, \dots

B.

Was ist die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswertes?

Die Linearität:

$$\mathbf{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbf{E}[X] + \beta \mathbf{E}[Y]$$

C.

Wie berechnet man $\mathbf{E}[X]$ am besten?

Oft dadurch,

dass man X als Summe schreibt:

$$X = Z_1 + \dots + Z_n$$

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Z_1] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$