

Vorlesung 3a

Der Erwartungswert

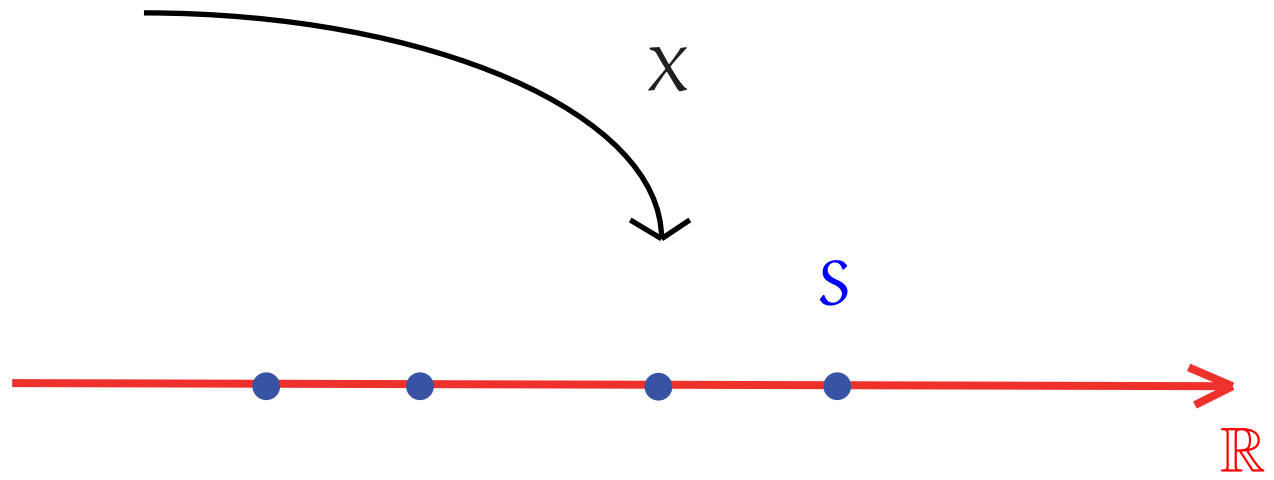
von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 1

Der Erwartungswert als gewichtetes Mittel

(Buch S. 23)

Unter einer **diskreten reellwertigen** Zufallsvariablen verstehen wir eine ZV'e, deren Wertebereich **die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen** (oder einer Teilmenge davon) ist, und für die eine **endliche oder abzählbar unendliche Menge S ($\subset \mathbb{R}$)** existiert mit **$\mathbf{P}(X \in S) = 1$** .

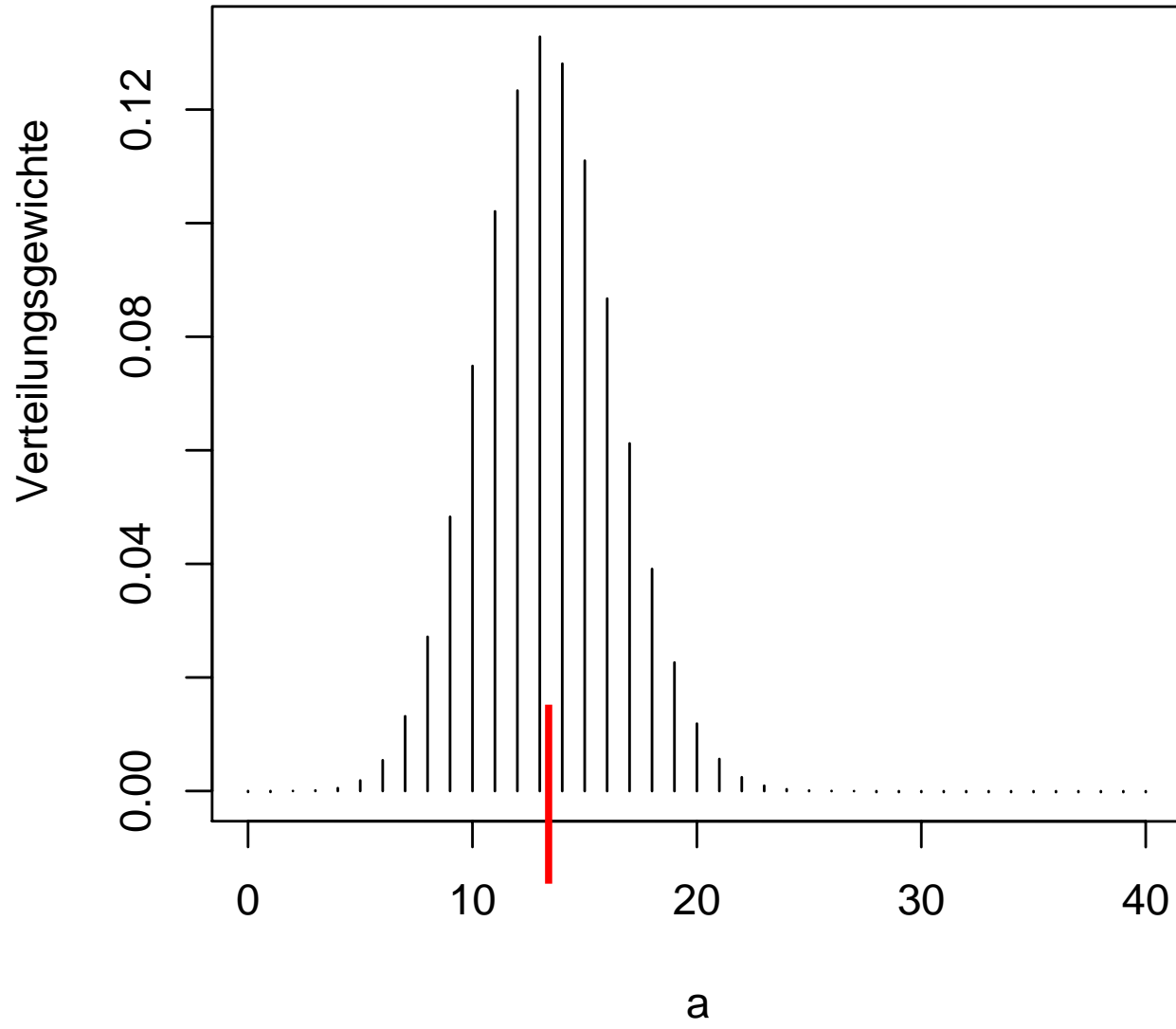


Eine einprägsame Kenngröße
für die *Lage* der Verteilung von X

ist das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel
der möglichen Werte von X :

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in \mathcal{S}} a \mathbf{P}(X = a) .$$

Man spricht vom *Erwartungswert von X* .
(Wir bezeichnen ihn auch mit μ oder μ_X .)



Das elementarste Beispiel:

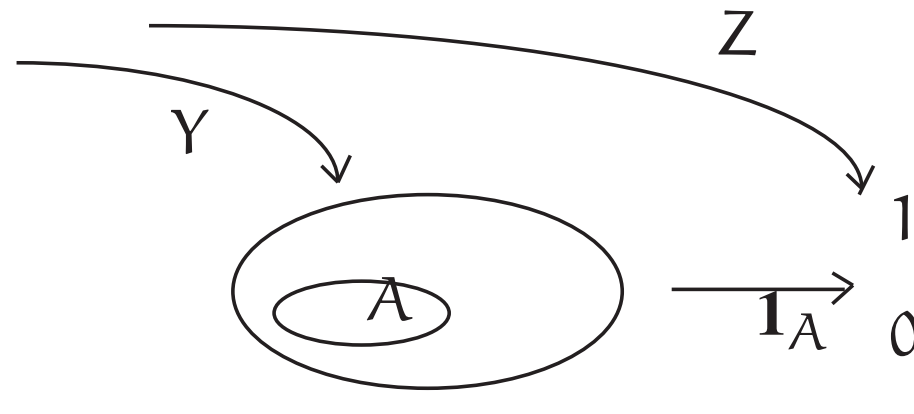
$$Z = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } q = 1 - p \end{cases}$$

Z beschreibt also einen einfachen p -Münzwurf.

$$\mathbf{E}[Z] = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p$$

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1).$$

Indikatorvariable von Ereignissen



$$Z = \mathbf{1}_A(Y) =: I_{\{Y \in A\}}$$

.... die *Indikatorvariable* des Ereignisses $\{Y \in A\}$

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1)$$

$$\{Z = 1\} = \{Y \in A\}$$

$$\mathbf{E}[I_{\{Y \in A\}}] = \mathbf{P}(Y \in A).$$

$$\mathbf{E}[I_{\{Y \in A\}}] = \mathbf{P}(Y \in A).$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich dem Erwartungswert der Indikatorvariable des Ereignisses.

Für eine diskrete reellwertige ZV'e X hatten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{a \in S} a \mathbf{P}\{X = a\} \\ &= \sum_{a \in S} a \rho(a). \end{aligned}$$

Dabei sind die Zahlen $\rho(a)$ die Verteilungsgewichte von X .

Merke:

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X
hängt nur von ihrer Verteilung ρ ab.

Synonym sprechen wir daher auch manchmal vom
Erwartungswert der Verteilung ρ .

Gilt $S \subset \mathbb{R}_+$ oder $\sum_{a \in S} |a| \rho(a) < \infty$,

dann hängt der Summenwert $\sum_{a \in S} a \rho(a)$
nicht von der Reihenfolge der Summanden ab.

Man sagt dann:

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X mit Verteilung ρ

ist wohldefiniert

oder kurz: Der Erwartungswert von X *existiert*.

Merke:

X

ist eine Zufallsgröße;

$E[X]$

ist eine Zahl.