Vorlesung 3a

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 5

Wie erlebt man den Erwartungswert?

X

eine Zufallsgröße;

$\mathbf{E}[X]$

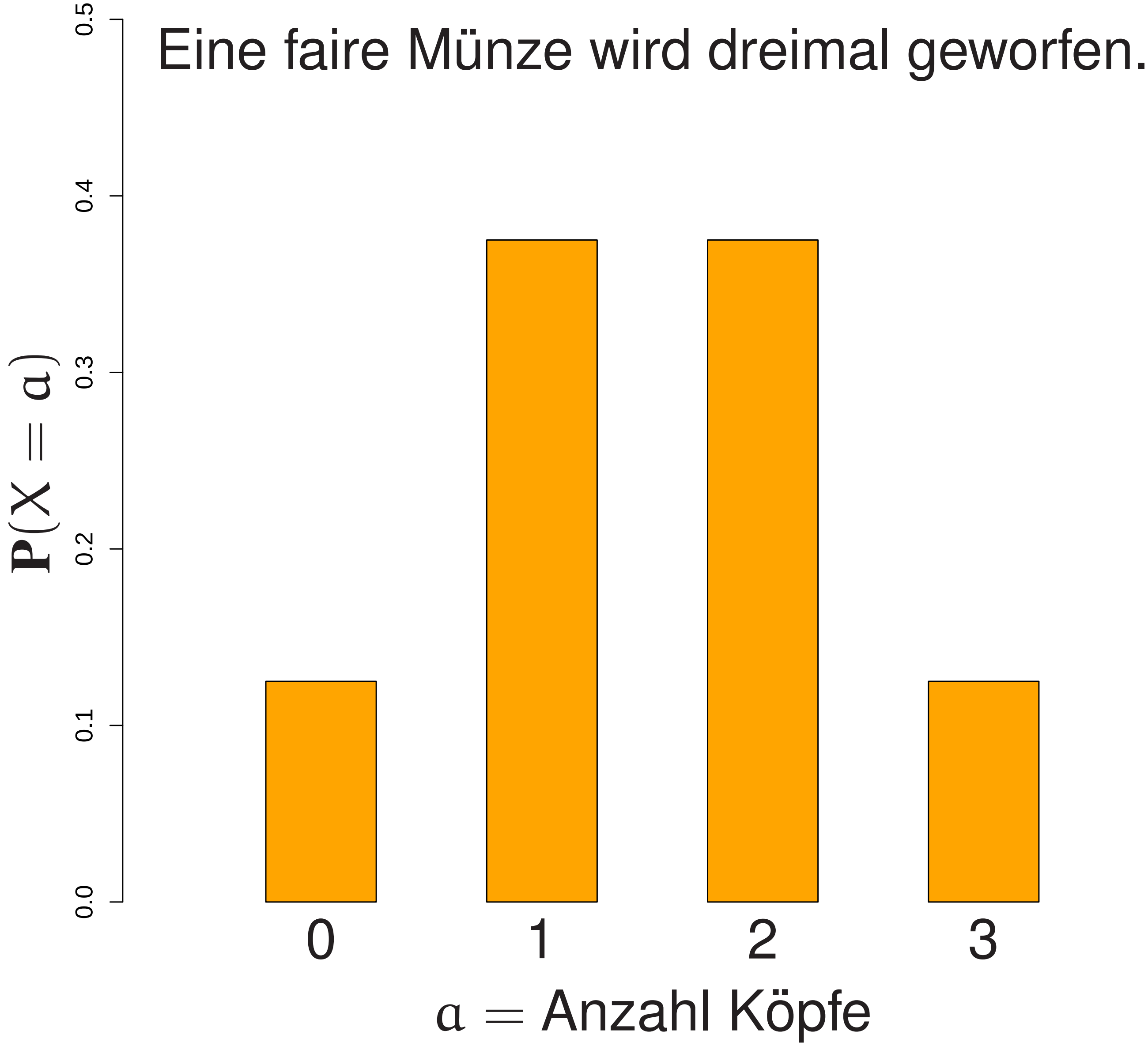
eine Zahl.

Ein Beispiel: Der Erwartungswert der Anzahl der Erfolge beim dreifachen Münzwurf

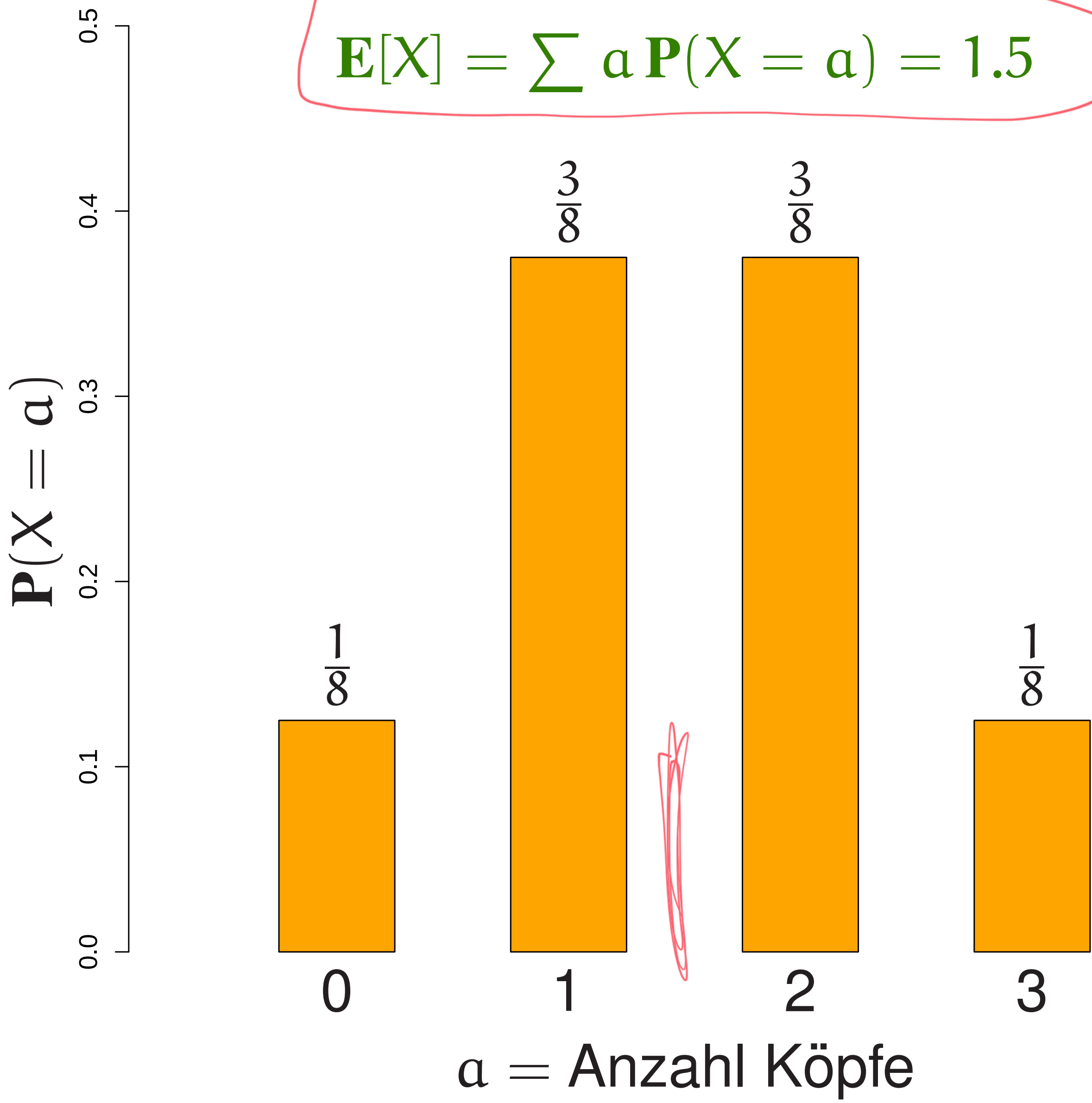
Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

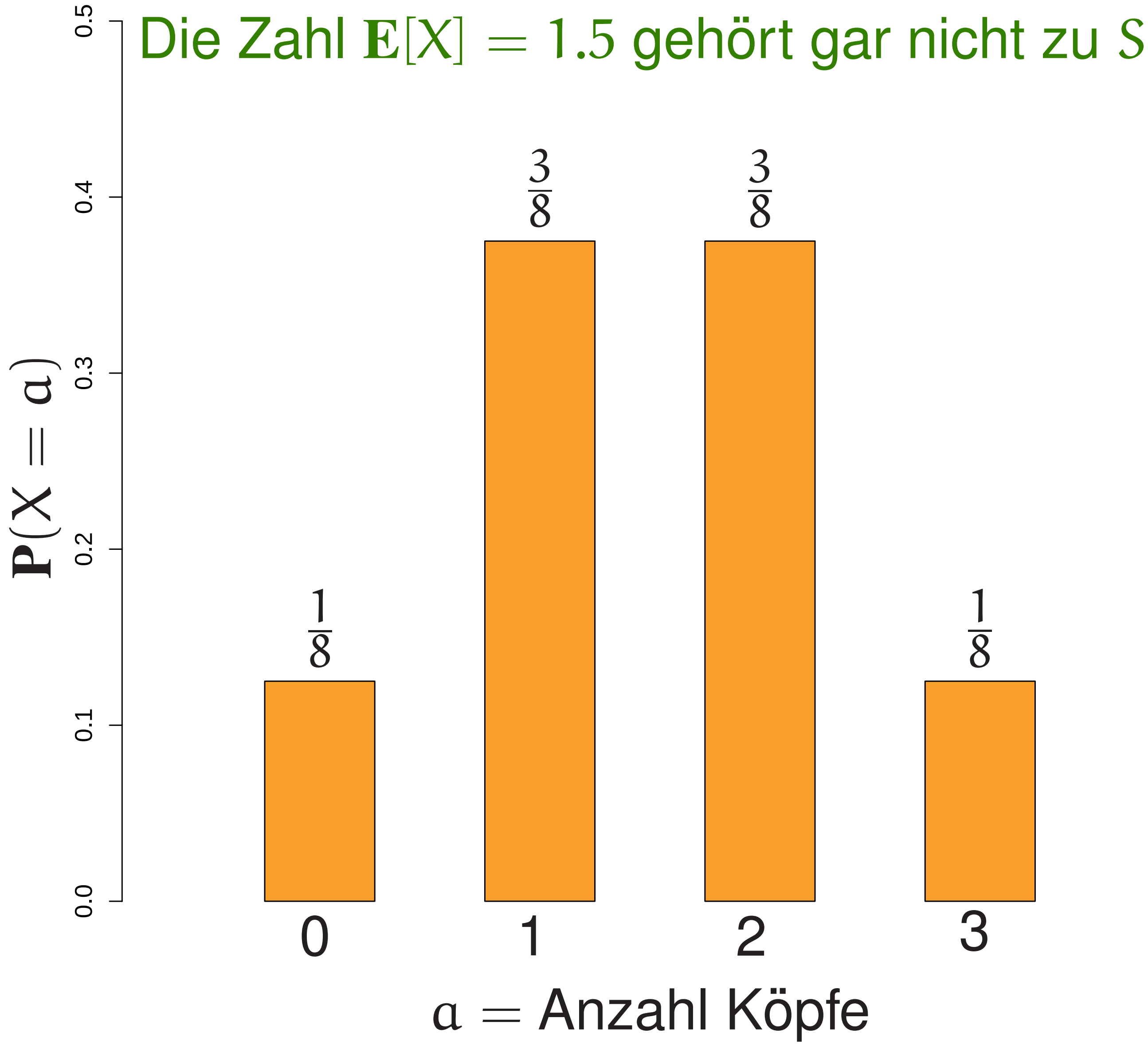
$X :=$ Anzahl der geworfenen Köpfe.

$$S := \{0, 1, 2, 3\}.$$

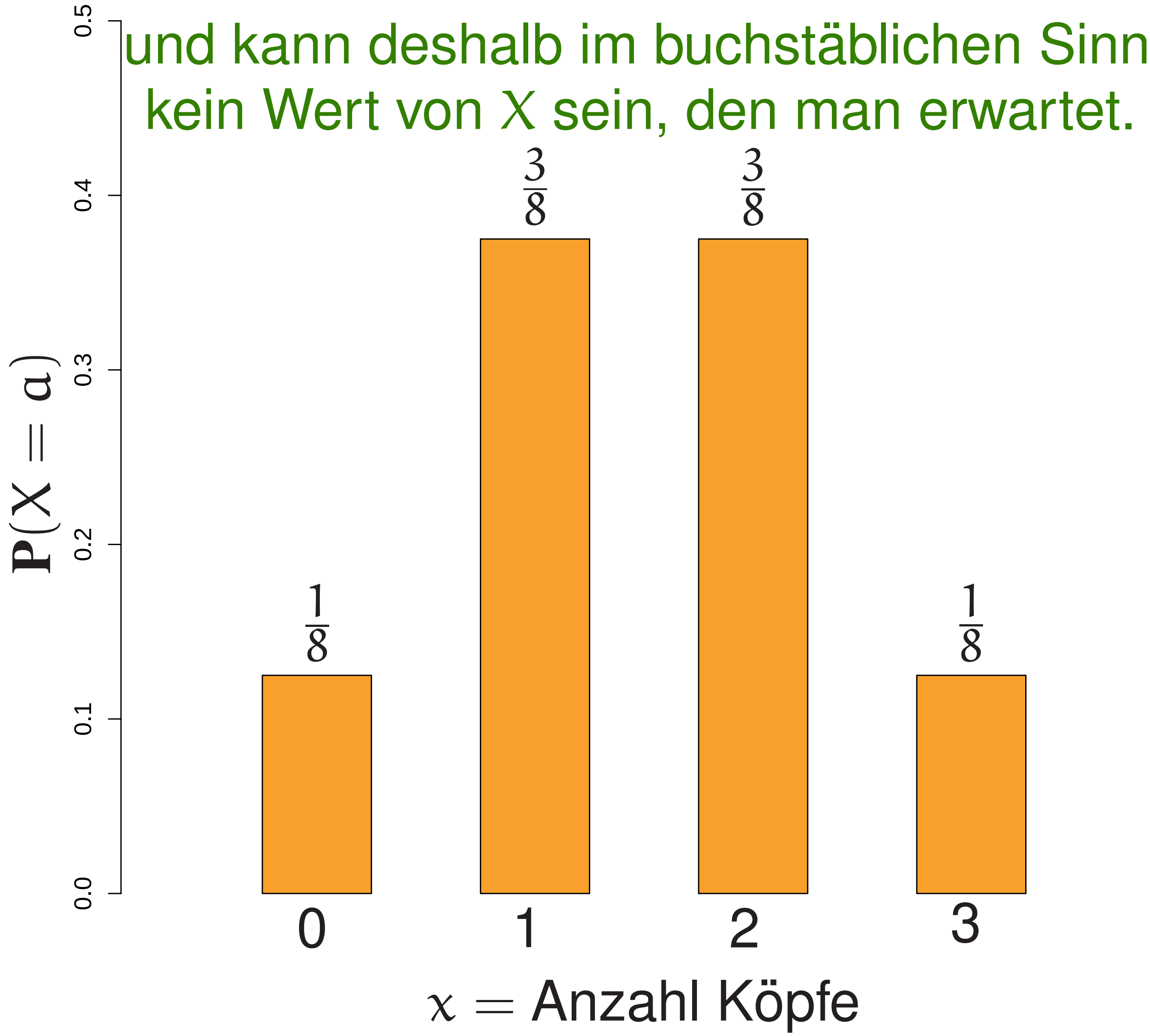

Eine faire Münze wird dreimal geworfen.
$\mathbf{P}(X = a)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
a = Anzahl Köpfe

$$\mathbf{E}[X] = \sum a \, \mathbf{P}(X = a) = 1.5$$

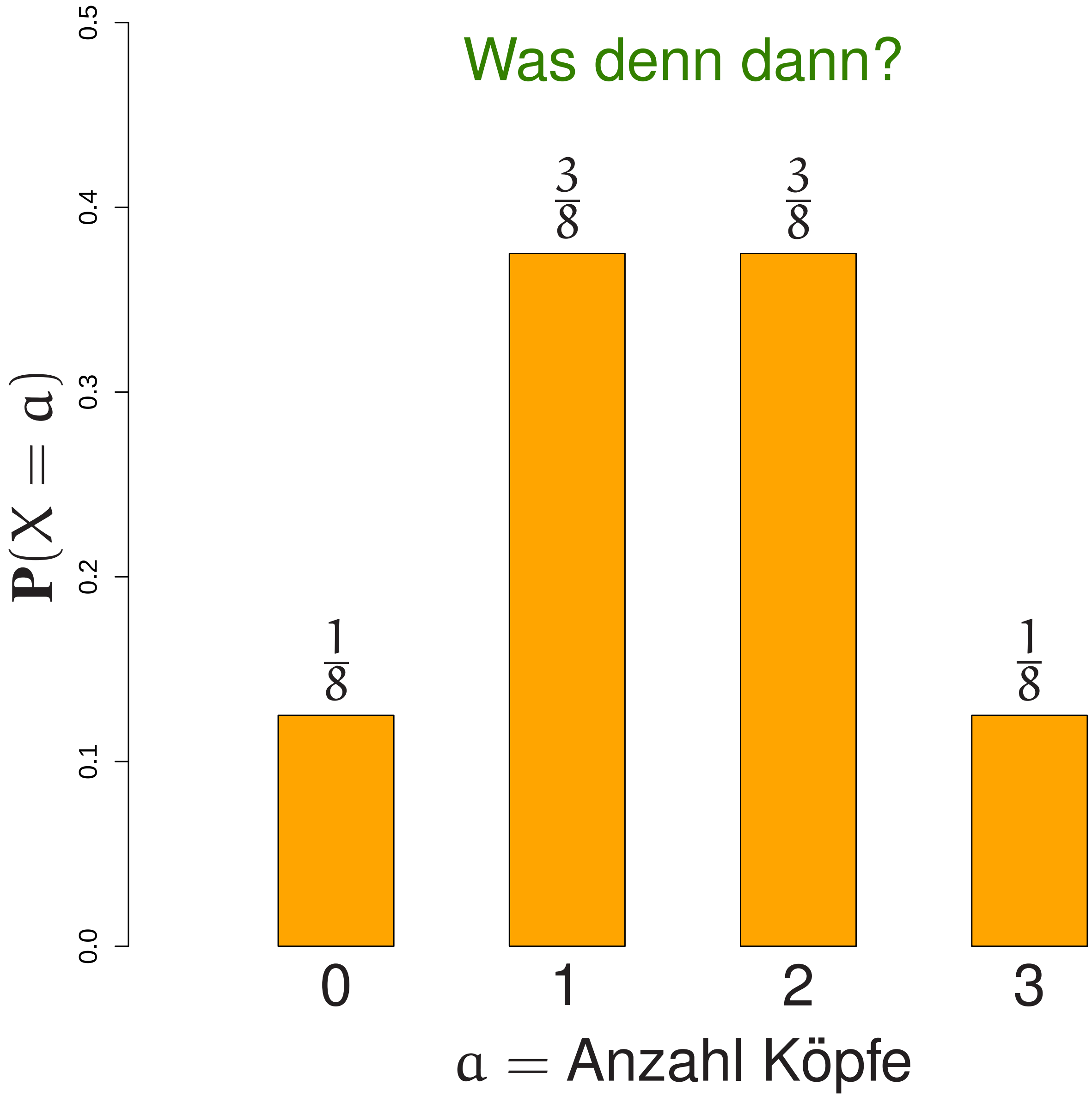




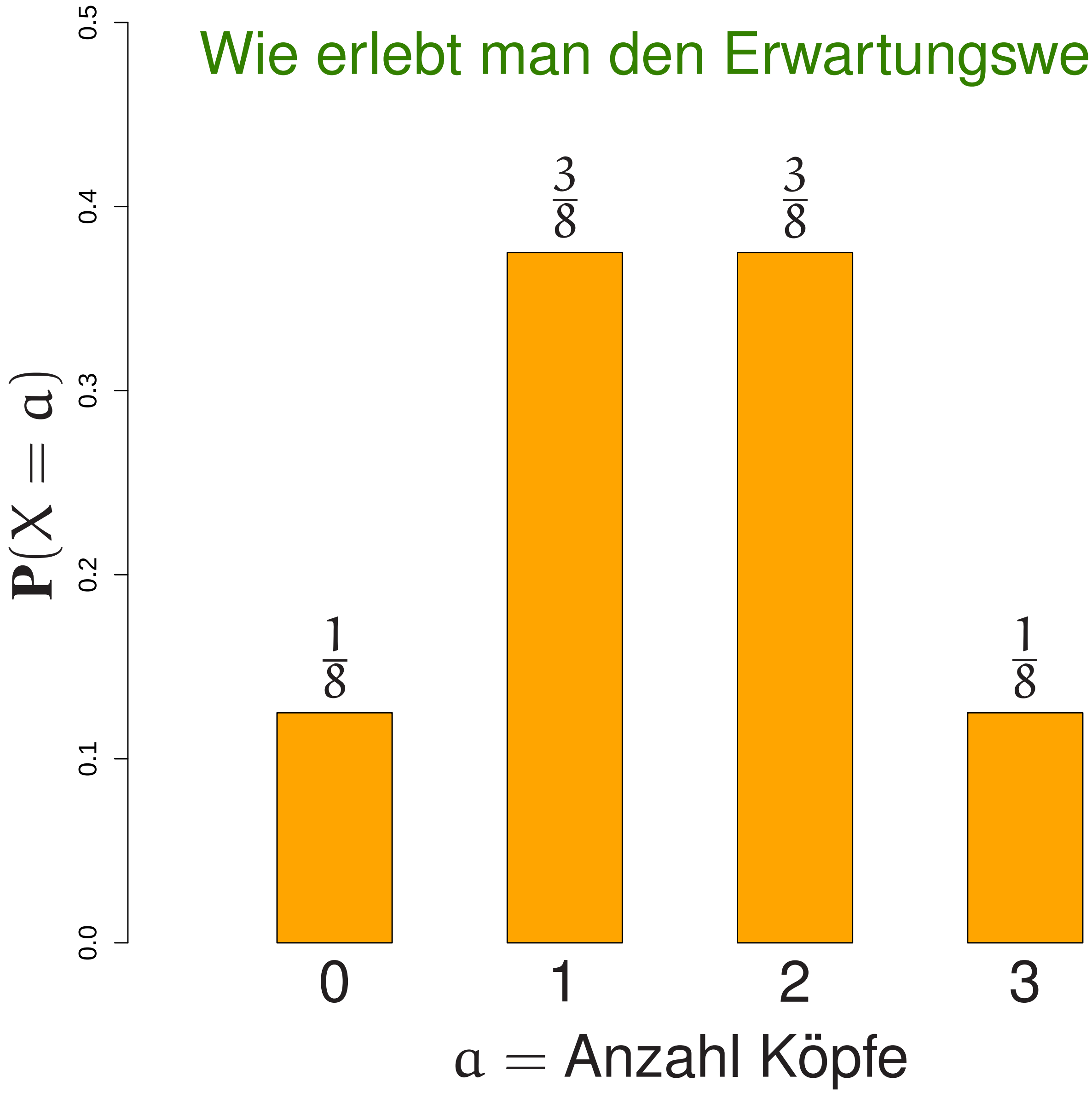
Die Zahl $\mathbf{E}[X] = 1.5$ gehört gar nicht zu S
$\mathbf{P}(X = a)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0
1
2
3
a = Anzahl Köpfe

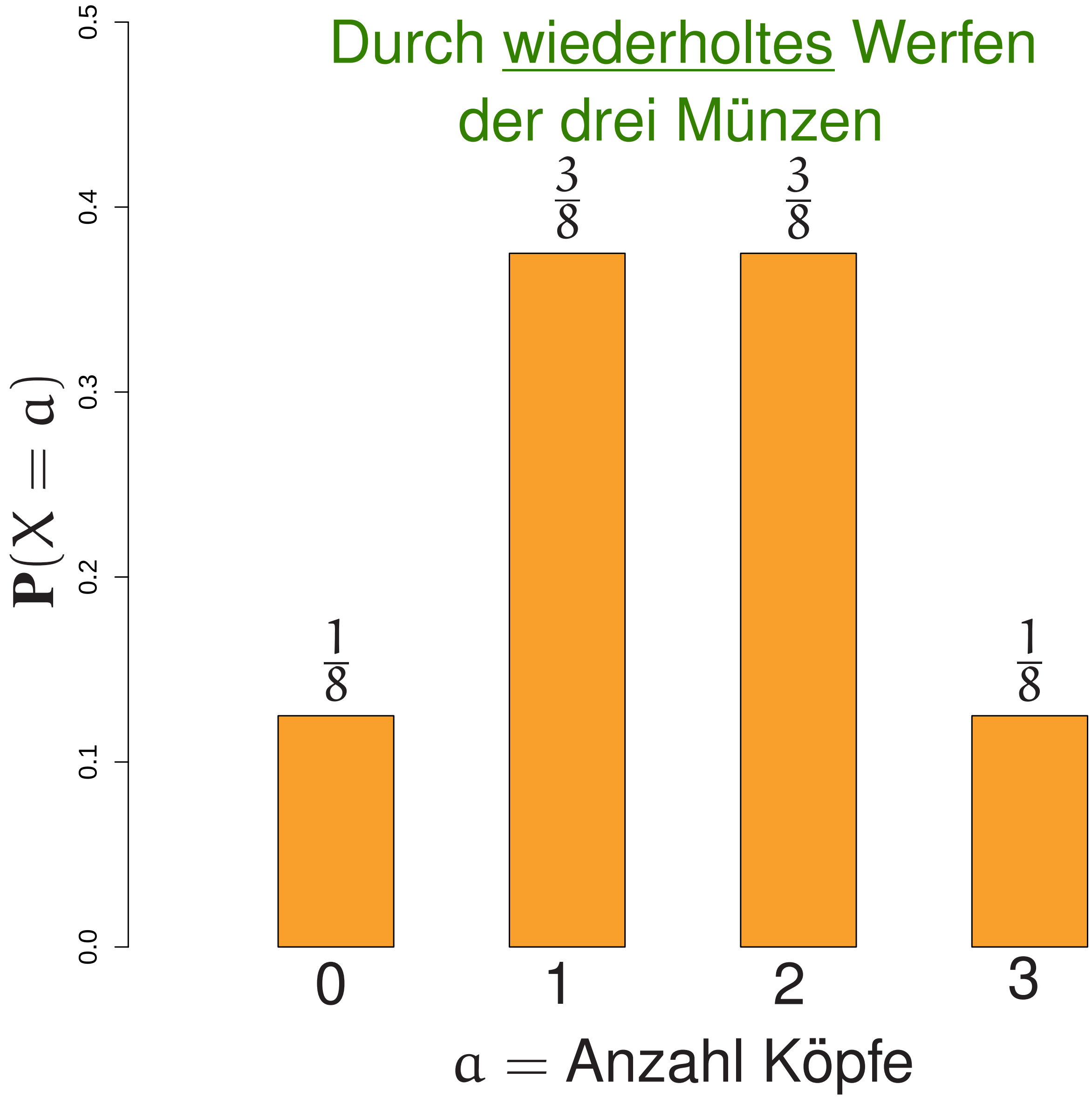


und kann deshalb im buchstäblichen Sinn
kein Wert von X sein, den man erwartet.
P(X = a)
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
1/8
3/8
3/8
1/8
0
1
2
3
x = Anzahl Köpfe


Was denn dann?
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
P(X = a)
1/8
3/8
3/8
1/8
0
1
2
3
a = Anzahl Köpfe

Wie erlebt man den Erwartungswert?





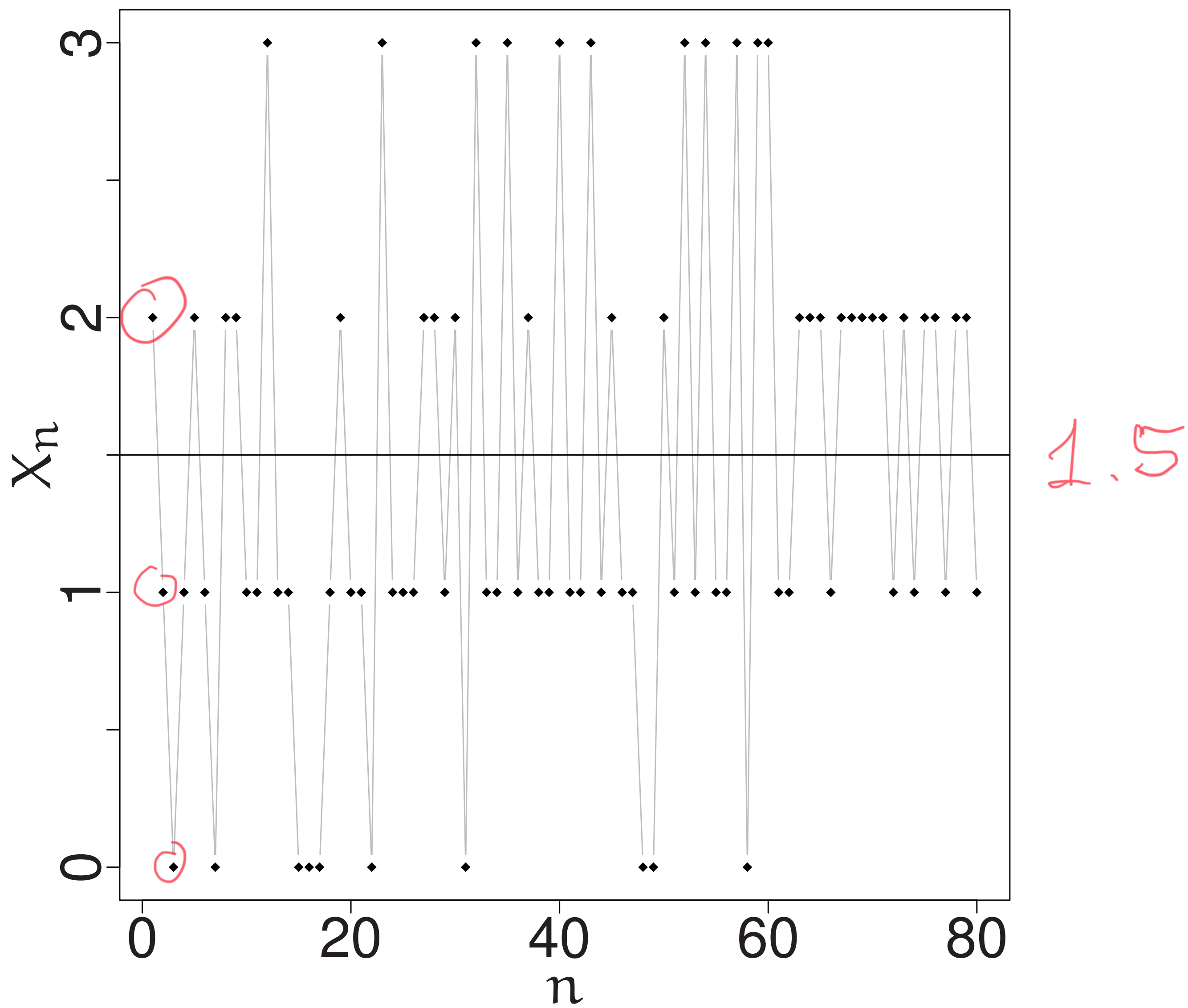
Durch wiederholtes Werfen
der drei Münzen
$\mathbf{P}(X = a)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
$\frac{1}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$
0
1
2
3
a = Anzahl Köpfe

Der Erwartungswert als Langzeitmittel

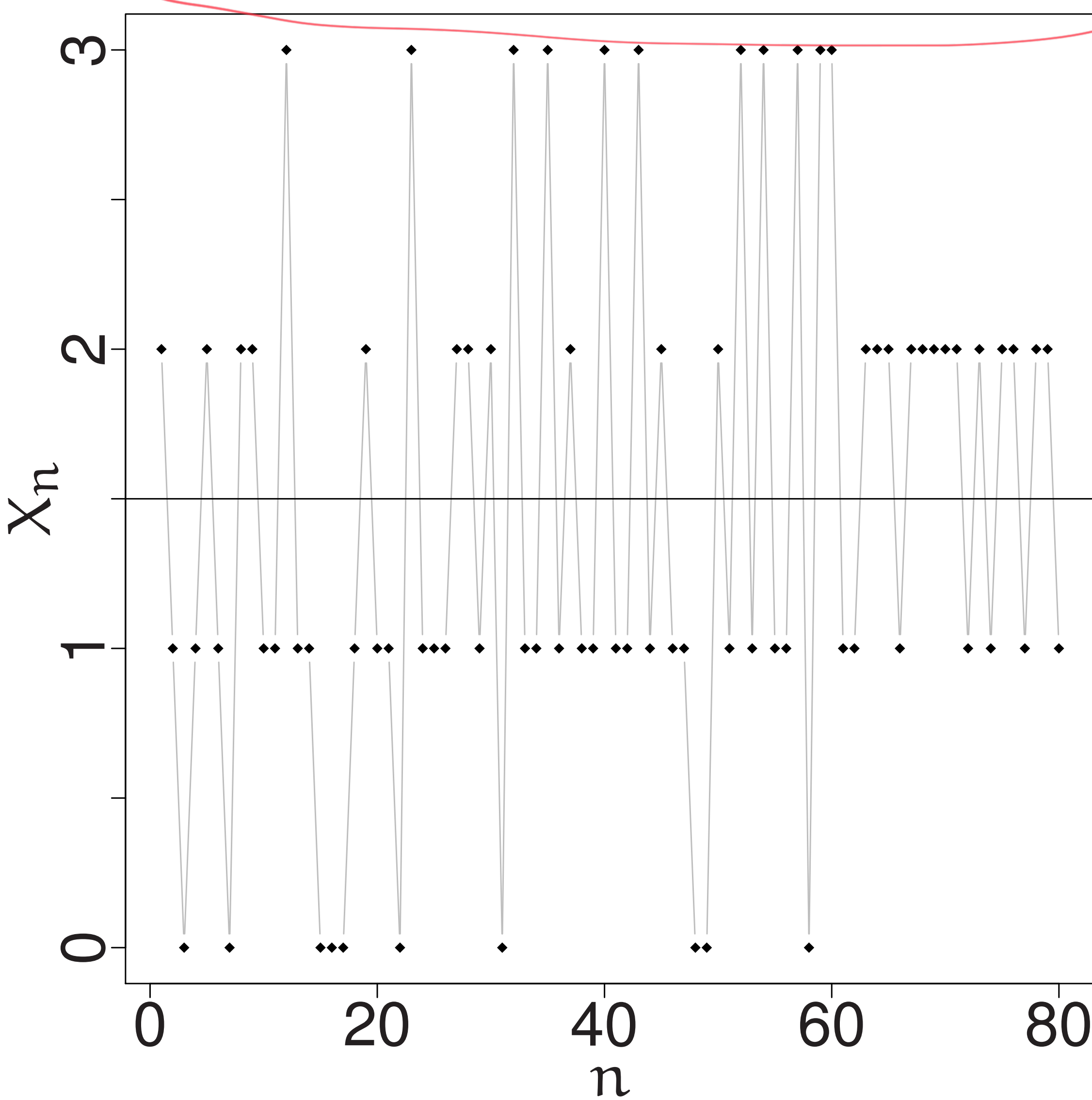
Beispiel:

X ... Anzahl Köpfe beim dreimaligen fairen Münzwurf

80 Wiederholungen: $X_1, X_2, ..., X_{80}$

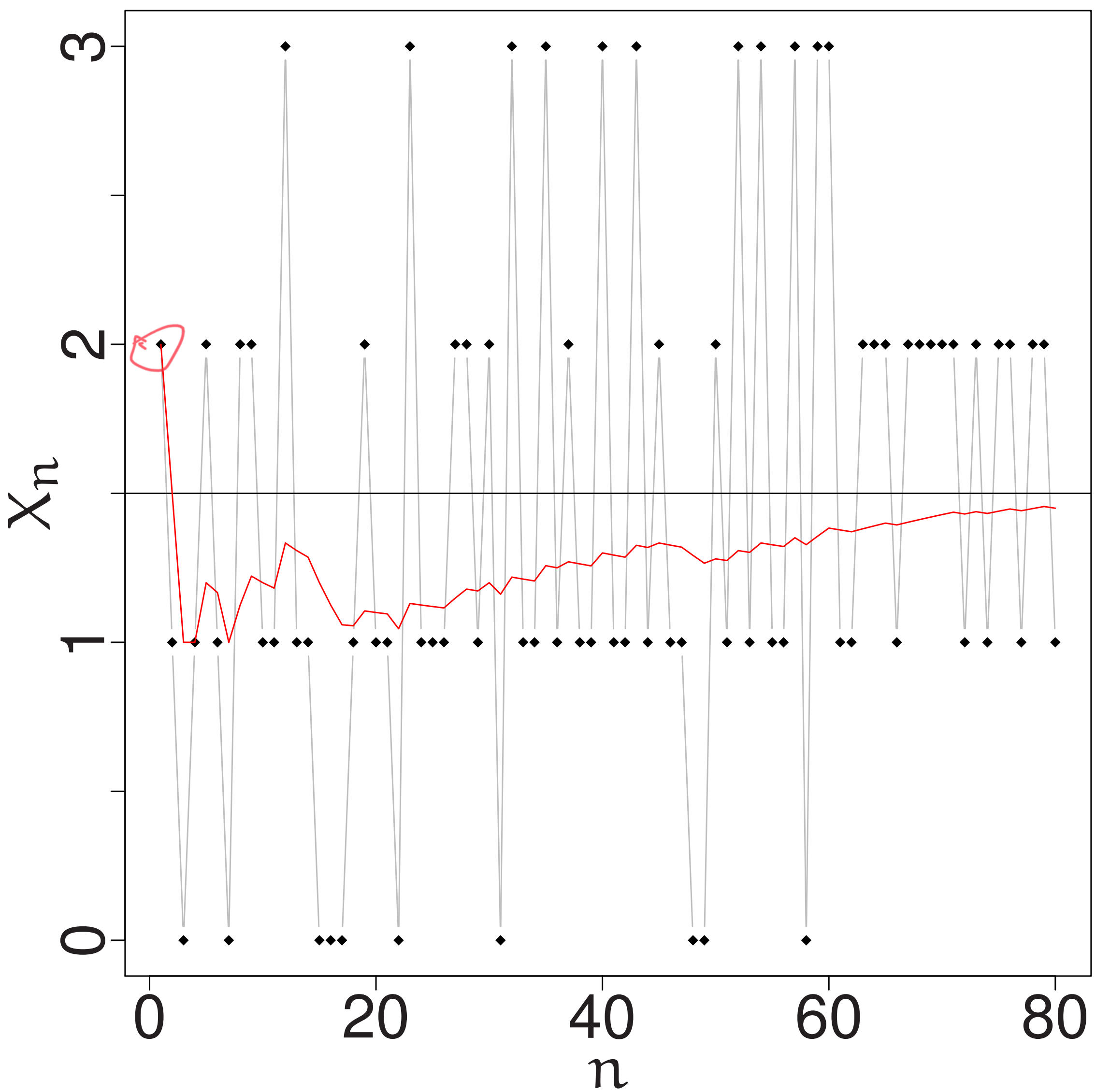


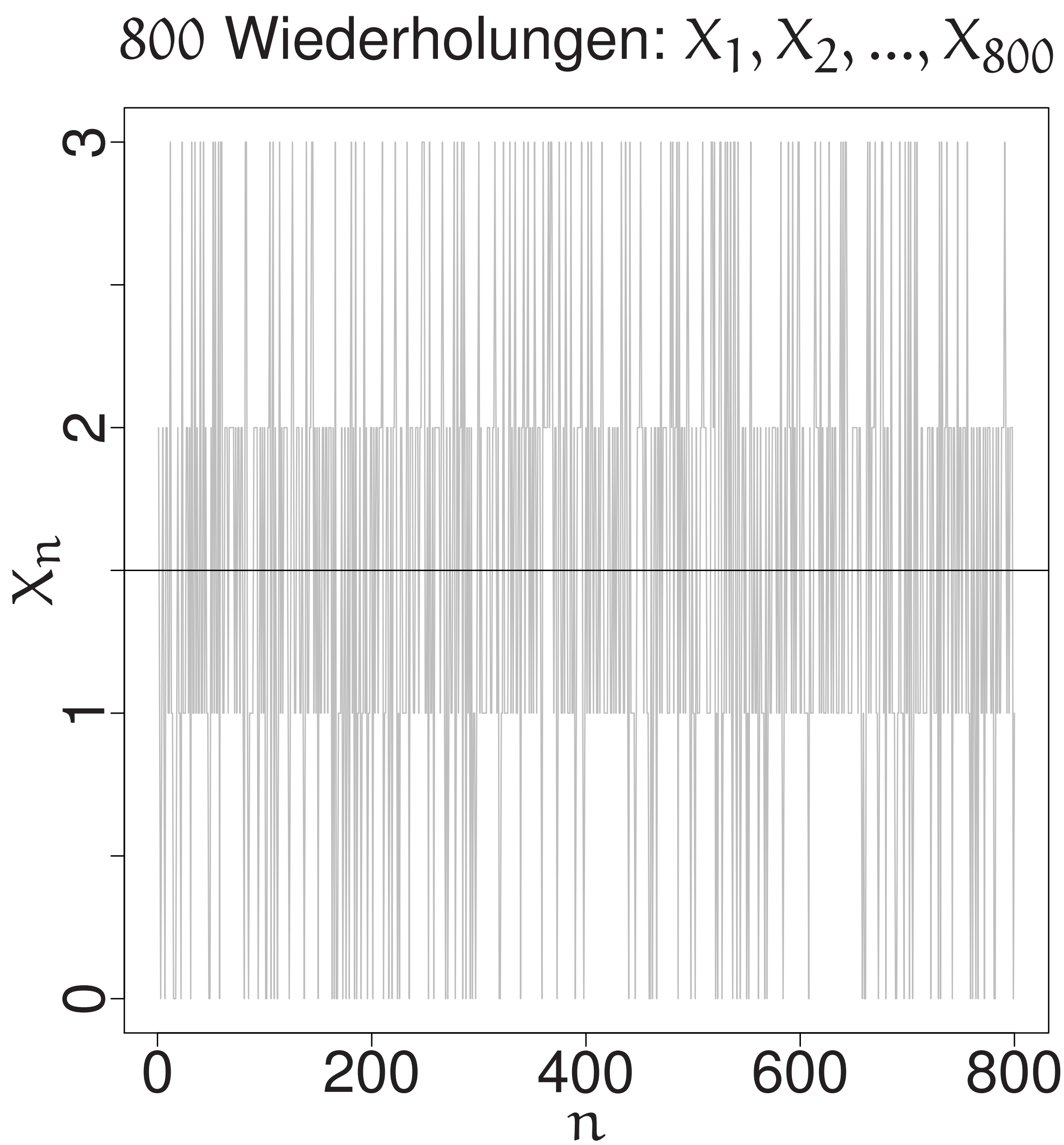
$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n$$



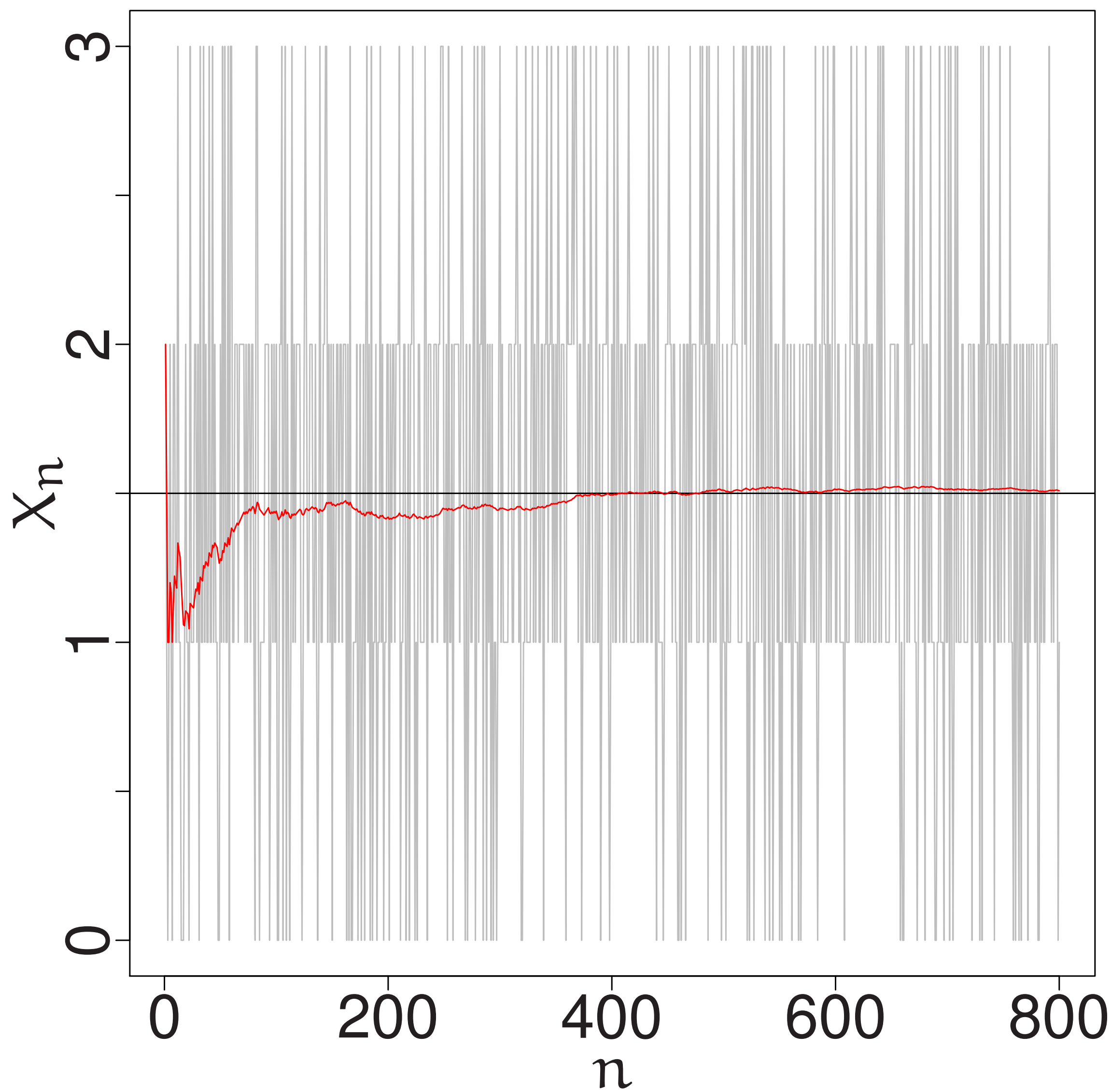
$n = 1, 2, \ldots, 80$

$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \,/\, n$$

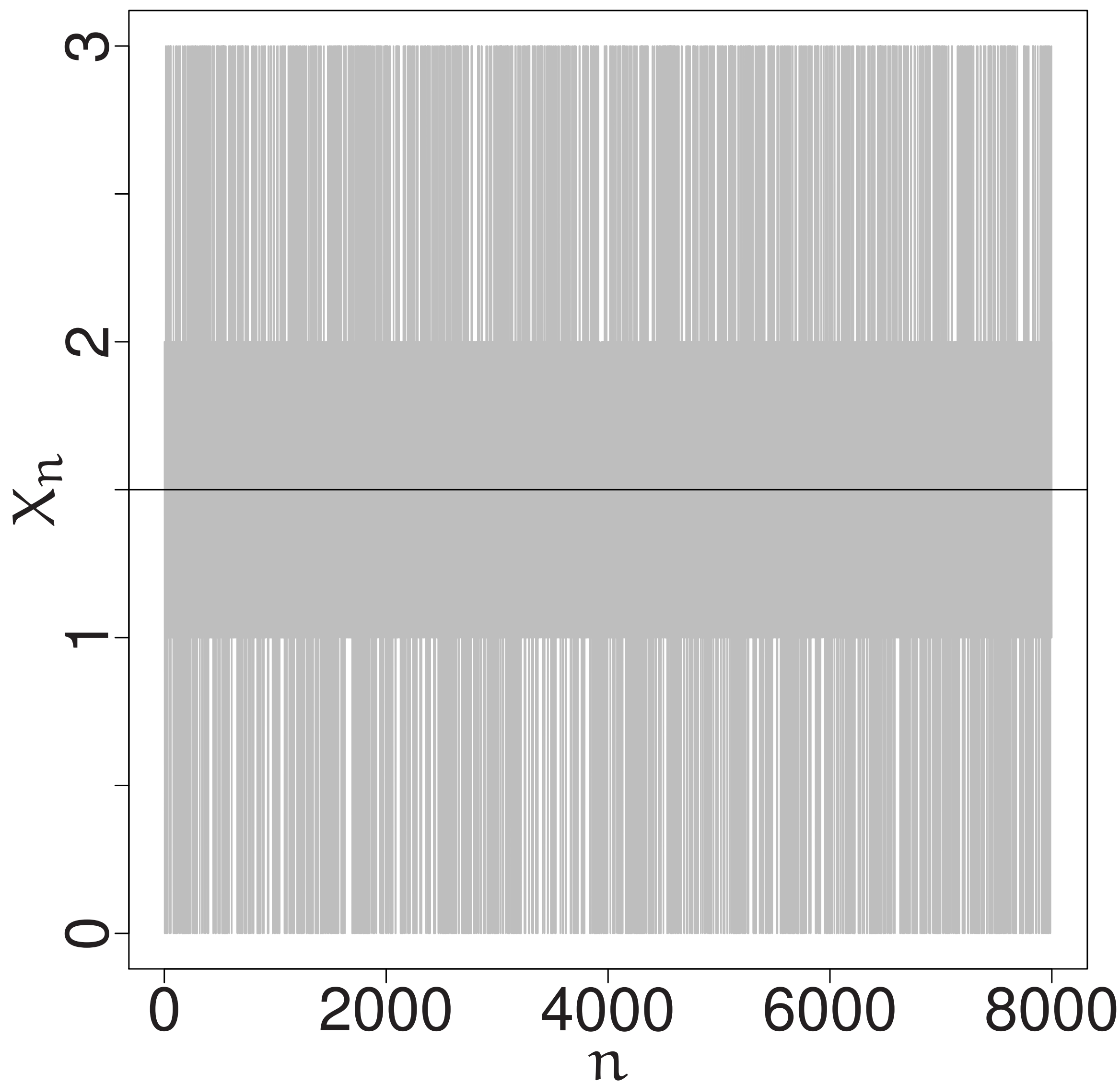


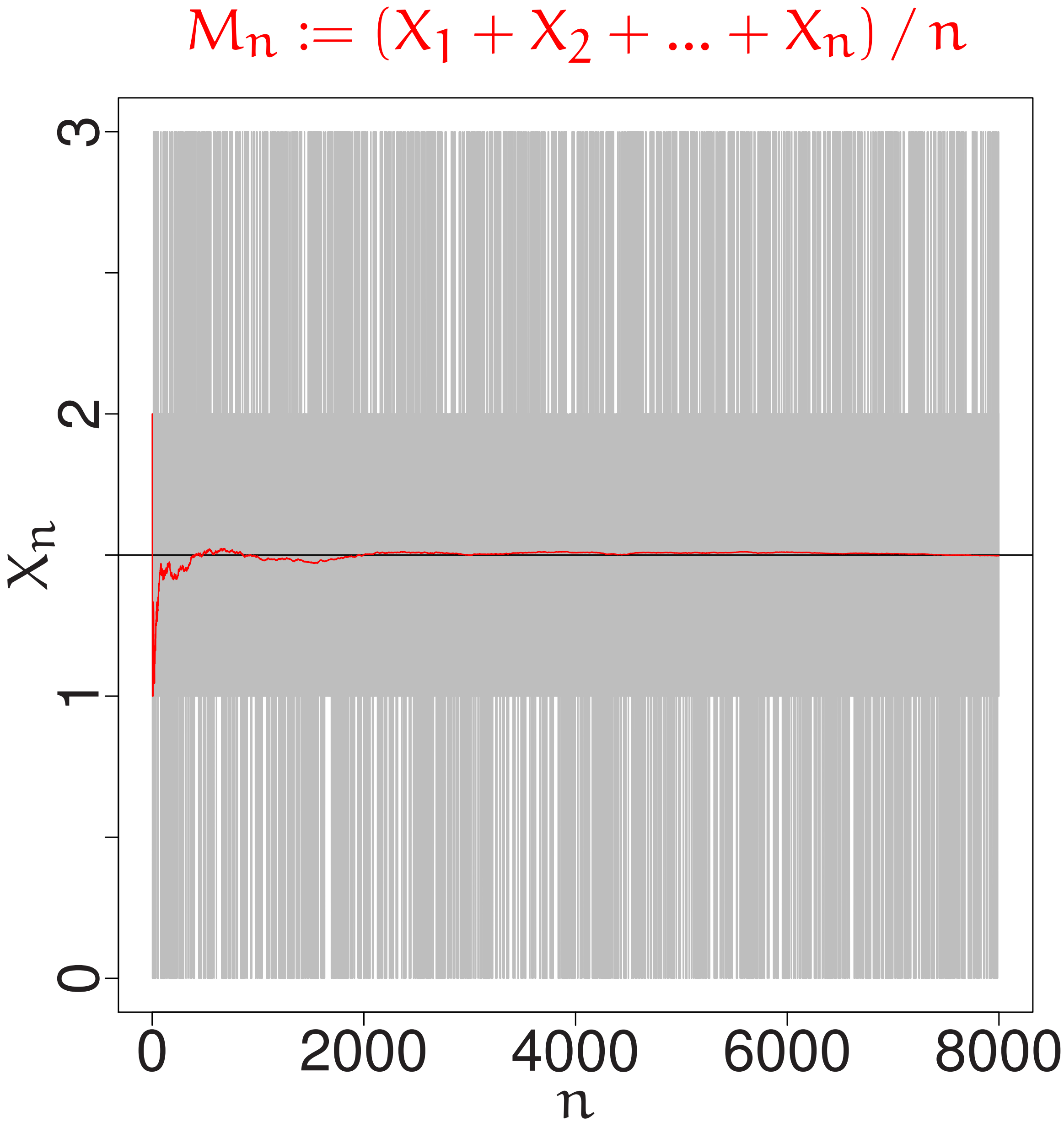

800 Wiederholungen: X1, X2, ..., X800
3
2
1
0
Xn
0
200
400
600
800
n

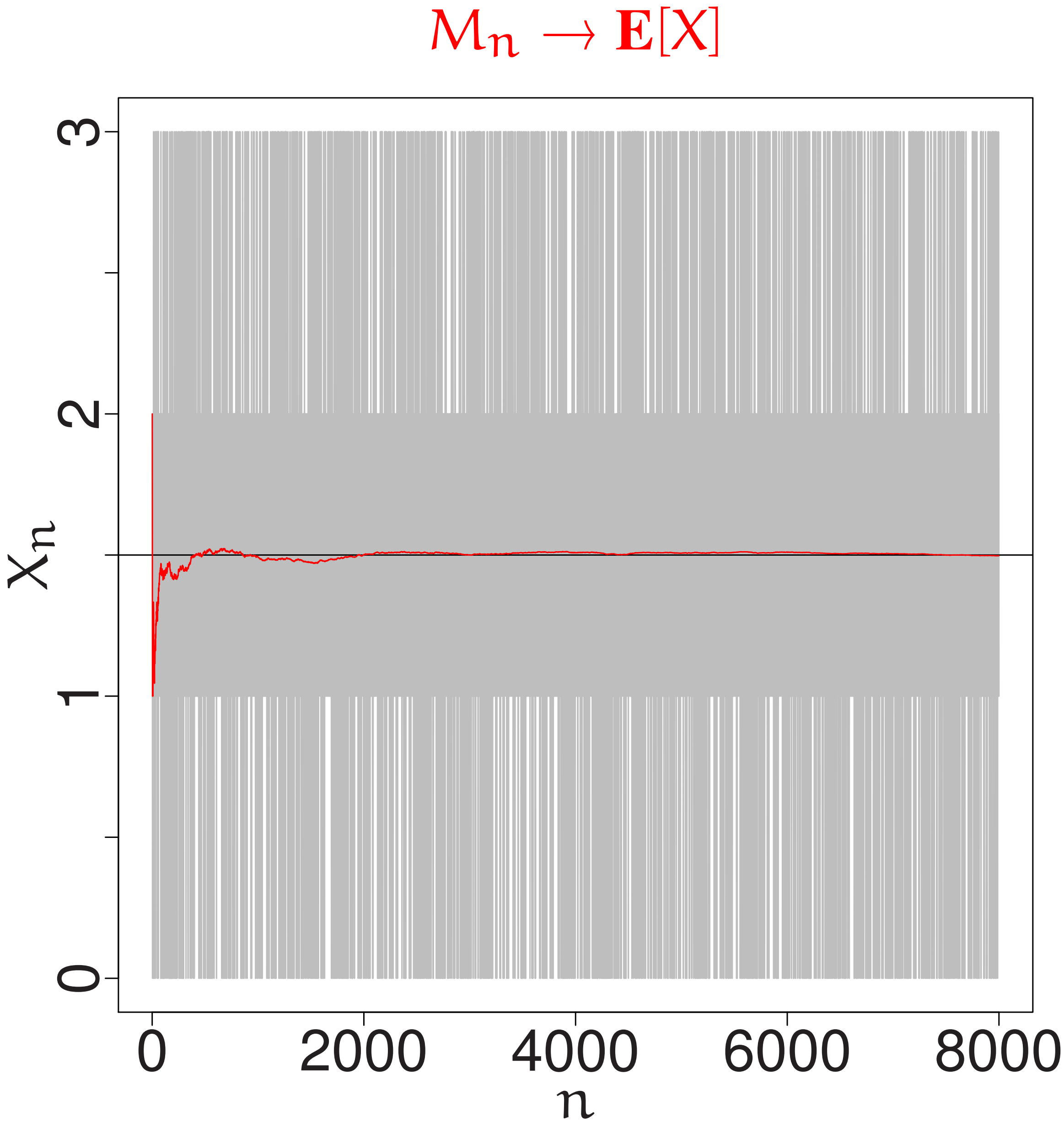
$$M_n := (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \,/\, n$$



8000 Wiederholungen: $X_1, X_2, ..., X_{8000}$

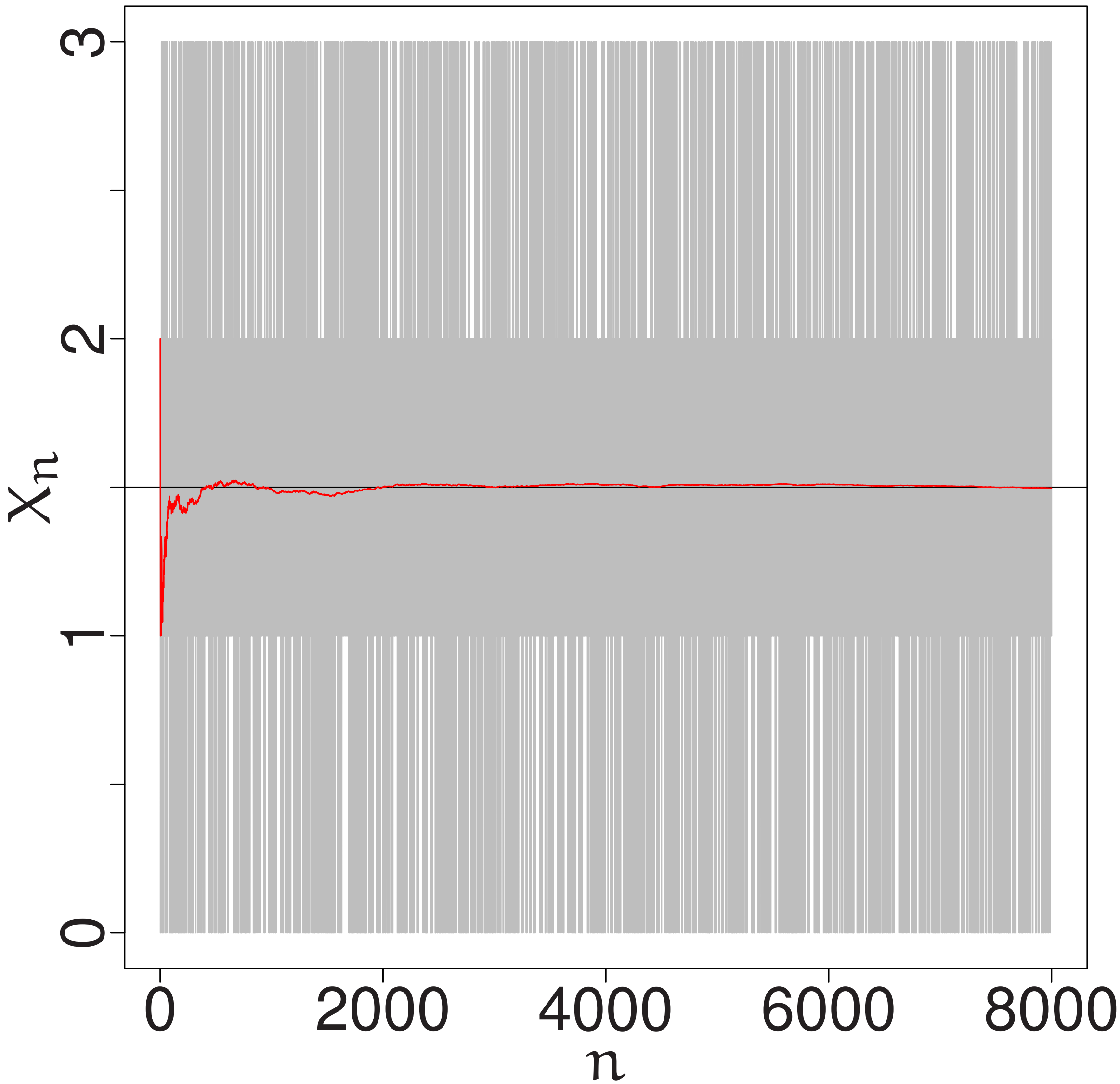



$M_n := (X_1 + X_2 + ... + X_n) / n$
3
2
1
0
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n

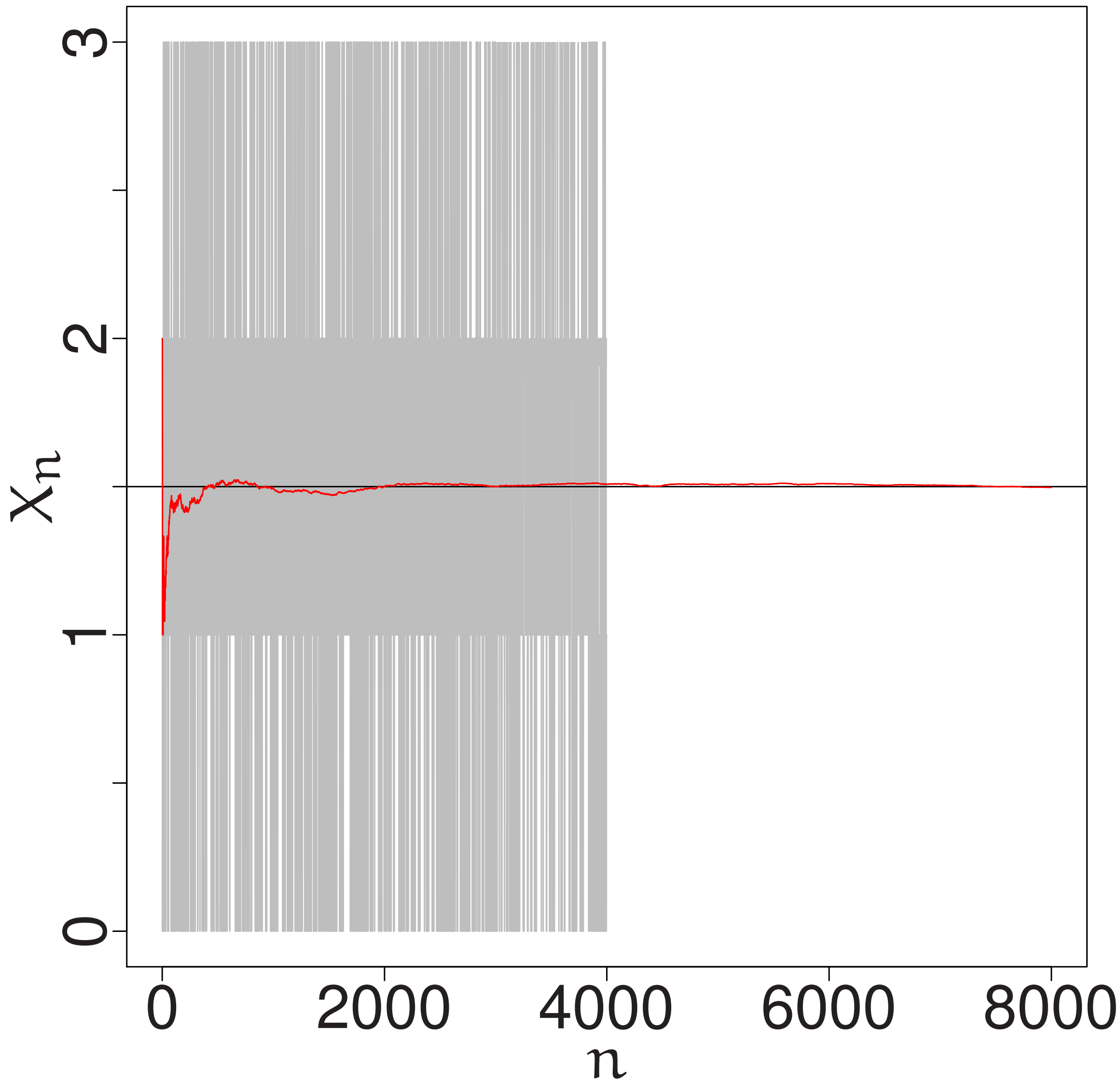


$M_n \to \mathbf{E}[X]$
3
2
1
0
X_n
0
2000
4000
6000
8000
n

Warum?



$$M_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n$$



Die Summe von n Zahlen $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1, 2, 3\}$

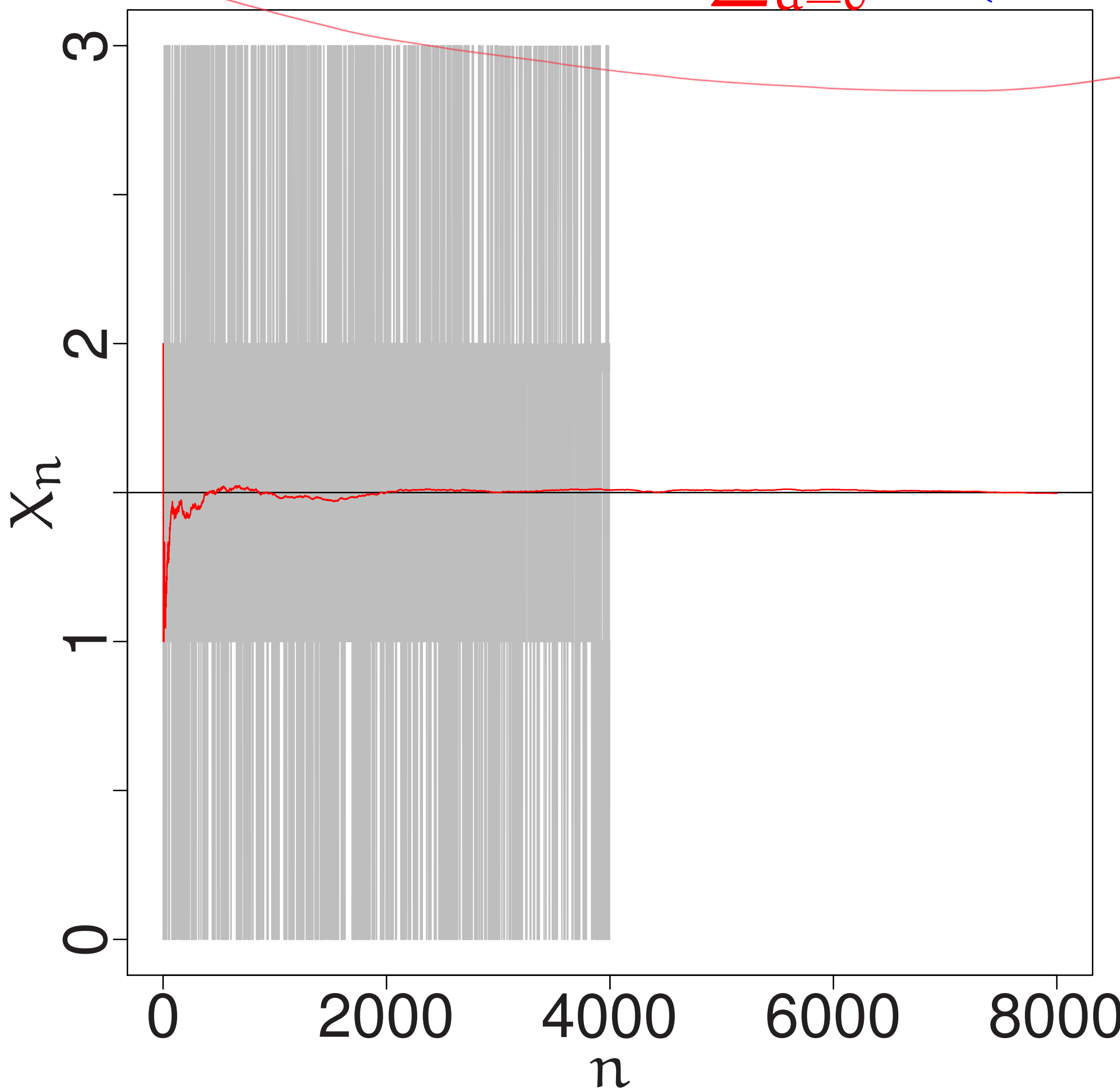
kann man auch so berechnen:

Man zählt für $a = 1, 2, 3$, wieviele der x_i gleich a sind

und bekommt

$$\boxed{x_1 + \ldots + x_n = \sum_{a=0}^{3} a \, \#\{i \leq n : x_i = a\}.}$$

$$M_n = \sum_{a=0}^{3} a \, \#\{i \leq n : X_i = a\}/n$$
$$\to \sum_{a=0}^{3} a \, \mathbf{P}(X = a)$$



Dazu später mehr.

Für den Moment nur als kurzer Ausblick:

DAS GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN

Sei X eine Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mathbf{E}[X]$.

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X.

Dann gilt

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbf{E}[X]$$

Zu klären

1. Was heißt „ unabhängig “?

2. Was heißt „ $\rightarrow$ “?

Diese Klärung wird in der Vorlesung

in wenigen Wochen erfolgen.

Jetzt halten wir erst einmal fest:

Zwei Vorstellungen von $\mathbf{E}[X]$

1. <u>Gewichtetes Mittel</u>

der möglichen Werte:

$$\mathbf{E}[X] := \sum a\,\mathbf{P}(X = a)$$

2. <u>Langzeitmittelwert</u>

bei “unabhängigen” Wiederholungen:

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to \mathbf{E}[X]$$

Zusammenfassung

des Wichtigsten

A.

Was ist der Erwartungswert?

$$\mathbf{E}[X] = \sum a\,\mathbf{P}(X = a)$$

<u>und</u>

$$\mathbf{E}[X] = \lim \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$

für “unabhängige Wiederholungen” $X_1, X_2, \ldots$

B.

Was ist die wichtigste Eigenschaft des Erwartungswertes?

Die Linearität:

$$\mathbf{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbf{E}[X] + \beta \mathbf{E}[Y]$$

C.

Wie berechnet man $\mathbf{E}[X]$ am besten?

Oft dadurch,

dass man X als Summe schreibt:

$$X = Z_1 + ... + Z_n$$

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Z_1] + ... + \mathbf{E}[Z_n]$$