

# Vorlesung 3

## Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 4

Beispiele

# 1. Der Erwartungswert der Binomialverteilung

(als Erwartungswert der Anzahl der Erfolge  
beim  $n$ -fachen  $p$ -Münzwurf)

(Buch S. 49)

$X$  sei  $\text{Bin}(n, p)$ -verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

$X$  sei  $\text{Bin}(n, p)$ -verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

$$\sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \dots$$

$X$  sei  $\text{Bin}(n, p)$ -verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

$$\sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \dots$$

Es GEHT so (vgl Buch Seite 23-24 )

Aber es geht auch einfacher (vgl. Buch S. 49):

Sei  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$  ein  $n$ -facher  $p$ -Münzwurf.

Dann ist  $(Z_1 + \dots + Z_n)$   $\text{Bin}(n, p)$ -verteilt.

$$\mathbf{E}[Z_1 + \dots + Z_n] = \mathbf{E}[Z_1] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

Fazit:

Der Erwartungswert einer  $\text{Bin}(n, p)$  verteilten ZV ist

$np$ .

## 2. Der Erwartungswert der hypergeometrischen Verteilung

(als Erwartungswert der Anzahl der “Erfolge”  
beim  $n$ -fachen Ziehen ohne Zurücklegen)

(Buch S. 50 und S. 28)

$$P = \frac{r}{r+b} = \frac{r}{g} = \frac{8}{13}$$

BEISPIEL

Ziehen ohne Zurücklegen

$$g = 13$$

Eine Urne enthält  $r$  rote und  $b$  blaue Kugeln.

oooooooooooo

$r = 8$     $b = 5$

Aus der Urne werden ohne Zurücklegen  $n$  Kugeln gezogen.

oooooooooooo

$$n = 9$$

$R :=$  Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$$E[R] = ?$$



$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$  falls  $i$ -te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$  falls  $i$ -te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo       $r = 8$      $b = 5$

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$  falls  $i$ -te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$  falls  $i$ -te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo       $r = 8$      $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$  falls  $i$ -te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$  falls  $i$ -te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo       $r = 8$      $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

Man stelle sich vor, die Nummern der Züge werden als rein zufällige Permutation an die  $r + b$  Kugeln vergeben.

$\{Z_i = 1\}$  ist das Ereignis “die  $i$ -te gezogene Kugel ist rot”.

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$  falls i-te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$  falls i-te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo       $r = 8$      $b = 5$

$$P(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b} \quad \approx 0$$

$$E[Z_1 + \dots + Z_n] = E[Z_1] + \dots + E[Z_n] \\ = np$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$  falls  $i$ -te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$  falls  $i$ -te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo       $r = 8$      $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \frac{r}{r + b}$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$  falls  $i$ -te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$  falls  $i$ -te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo       $r = 8$      $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Z_1] + \mathbf{E}[Z_2] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$


$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$  falls  $i$ -te gezogene Kugel rot

$Z_i = 0$  falls  $i$ -te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo       $r = 8$      $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \frac{r}{r + b}$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Z_1] + \mathbf{E}[Z_2] + \dots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\mathbf{E}[R] = n \frac{r}{r + b}$$

$\approx n p$

## BEISPIEL

### Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält  $r$  rote und  $b$  blaue Kugeln.

ooooooooooooo       $r = 8$      $b = 5$

Aus der Urne werden ohne Zurücklegen  $n$  Kugeln gezogen.

ooooooo       $n = 9$

$R :=$  Anzahl der gezogenen roten Kugeln

**Verteilung** von  $R$ ?

$$P(R = k) = ?$$

Verteilungsgewichte von R ?

$$\mathbf{P}(R = k) = ?$$

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} / \binom{r+b}{n}$$

$$(k = 0, \dots, n)$$

Eine ZV mit diesen Verteilungsgewichten  
heißt

**hypergeometrisch verteilt** zu den Parametern  $(\underline{n}, \underbrace{r+b}_g, r)$ .

(vgl. Buch Seite 28)

$$p = \frac{r}{g}$$

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} / \binom{r+b}{n}$$

$$\mathbf{E}(R) = ?$$


$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} / \binom{r+b}{n}$$

$$\mathbf{E}(R) = ?$$

$$\mathbf{E}[R] = \sum_{k=0}^n k \binom{r}{k} \binom{b}{n-k} / \binom{r+b}{n} = \dots$$

*(Handwritten red annotations: a red oval around the fraction, a red arrow pointing from the fraction to the handwritten text "= P(R=k)", and blue arrows pointing from the variable 'k' to the binomial coefficients.)*

Es GEHT so (vgl. Buch Seite 32)

Aber wie wir eben gesehen haben,

(über die Darstellung von R als Summe von Zählern)

geht's auch einfacher (vgl. Buch S. 50/51).

### 3. Der Erwartungswert einer Anzahl von Runs

## Runs beim fairen Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$  n-facher fairer Münzwurf

$$P\{Z_i = 1\} = \frac{1}{2} \quad P\{Z_i = 0\} = \frac{1}{2}$$

Run: ein Block von Nullen (Einsen),  
der nicht echt in einem größeren Block enthalten ist

## Runs beim fairen Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$  n-facher fairer Münzwurf

$$P\{Z_i = 1\} = \frac{1}{2} \quad P\{Z_i = 0\} = \frac{1}{2}$$

Run: ein Block von Nullen (Einsen),  
der nicht echt in einem größeren Block enthalten ist

$R :=$  Anzahl Runs in  $Z$

00000000       $R = 1$

11100011       $R = 3$

10101010       $R = 8$

$$\mathbf{E}[R] = ?$$

*Indikator-  
variable*

Dazu schreiben wir  $R$  als Summe von **Zählern**.

Bei jedem Wurf zählen wir eins dazu,  
wenn bei diesem Wurf ein Run beginnt:

$Y_i := 1$  falls bei  $i$  ein Run beginnt,  $Y_i := 0$  sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$Y_i := 1$  falls bei  $i$  ein Run beginnt,  $Y_i := 0$  sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0, 1) \text{ oder } (1, 0)\} \quad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (i > 1)$$

$Y_i := 1$  falls bei  $i$  ein Run beginnt,  $Y_i := 0$  sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0, 1) \text{ oder } (1, 0)\} \quad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[Y_i] = \frac{1}{2} \quad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Y_1] + \mathbf{E}[Y_2] + \mathbf{E}[Y_3] + \dots + \mathbf{E}[Y_n]$$

$$\mathbf{E}[R] = 1 + \frac{1}{2}(n - 1)$$