Vorlesung 3

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 4

Beispiele

1. Der Erwartungswert der Binomialverteilung

(als Erwartungswert der Anzahl der Erfolge

beim n-fachen p-Münzwurf)

(Buch S. 49)

X sei Bin(n, p)-verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

X sei Bin(n, p)-verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \boxed{\mathbf{P}(X = k)} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \ \ldots$$

X sei Bin(n, p)-verteilt.

$$\mathbf{E}[X] = ?$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \ ...$$

Es GEHT so (vgl Buch Seite 23-24)

Aber es geht auch einfacher (vgl. Buch S. 49):

Sei $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf.

Dann ist $(Z_1 + \cdots + Z_n)$ Bin(n, p)-verteilt.

$$\mathbf{E}[Z_1 + \cdots + Z_n] = \mathbf{E}[Z_1] + \cdots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

Fazit:

Der Erwartungswert einer Bin(n, p) verteilten ZV ist

np.

2. Der Erwartungswert der hypergeometrischen Verteilung

(als Erwartungswert der Anzahl der “Erfolge”
beim n-fachen Ziehen ohne Zurücklegen)

(Buch S. 50 und S. 28)

$$P = \frac{r}{r+b} = \frac{r}{g} = \frac{8}{13}$$

BEISPIEL

$$\boxed{g = 13}$$

Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln.

ooooooooooooo $\quad r = 8 \quad b = 5$

Aus der Urne werden ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen.

ooooooooo $\quad \boxed{n = 9}$

$R :=$ Anzahl der gezogenen roten Kugeln

$$\mathbf{E}[R] = ?$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te gezogogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i-te gezogene Kugel blau

oooooooooooooo $\quad r = 8 \quad b = 5$

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te gezogogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i-te gezogene Kugel blau

oooooooo ooooo $\qquad r = 8 \quad b = 5$

$$\boxed{\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r+b}}$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te gezogogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i-te gezogene Kugel blau

oooooooooooooo $\quad r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r+b}$$

Man stelle sich vor, die Nummern der Züge werden

als rein zufällige Permutation an die $r + b$ Kugeln vergeben.

$\{Z_i = 1\}$ ist das Ereignis "die i-te gezogene Kugel ist rot".

$$R = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te gezogogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i-te gezogene Kugel blau

oooooooooooooo $\quad r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r + b}$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te gezogogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i-te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo $\qquad r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r+b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \frac{r}{r+b}$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te gezogogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i-te gezogene Kugel blau

ooooooooooooo $\qquad r = 8 \quad b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r+b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \frac{r}{r+b}$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Z_1] + \mathbf{E}[Z_2] + \ldots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$R = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$Z_i = 1$ falls i-te gezogogene Kugel rot

$Z_i = 0$ falls i-te gezogene Kugel blau

oooooooooooooo $r = 8$ $b = 5$

$$\mathbf{P}(Z_i = 1) = \frac{r}{r+b}$$

$$\mathbf{E}[Z_i] = \frac{r}{r+b}$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Z_1] + \mathbf{E}[Z_2] + \ldots + \mathbf{E}[Z_n]$$

$$\boxed{\mathbf{E}[R] = n\,\frac{r}{r+b}}$$

BEISPIEL

Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält r rote und b blaue Kugeln.

ooooooooooooo $\quad r = 8 \quad b = 5$

Aus der Urne werden ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen.

ooooooooo $\quad n = 9$

$R :=$ Anzahl der gezogenen roten Kugeln

Verteilung von R?

Verteilungsgewichte von R ?

$$\mathbf{P}(R = k) = ?$$

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n}$$

$$(k = 0, \ldots, n)$$

Eine ZV mit diesen Verteilungsgewichten

heißt

hypergeometrisch verteilt zu den Parametern $(n,\ r+b,\ r)$.

(vgl. Buch Seite 28)

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n}$$

$$\mathbf{E}(R) = ?$$

$$\mathbf{P}(R = k) = \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n}$$

$$\mathbf{E}(R) = ?$$

$$\mathbf{E}[R] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{r}{k}\binom{b}{n-k} \Big/ \binom{r+b}{n} = \ldots.$$

Es GEHT so (vgl. Buch Seite 32)

Aber wie wir eben gesehen haben,

(über die Darstellung von R als Summe von Zählern)

geht's auch einfacher (vgl. Buch S. 50/51).

3. Der Erwartungswert einer Anzahl von Runs

Runs beim fairen Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ n-facher fairer Münzwurf

$$P\{Z_i = 1\} = \frac{1}{2} \qquad P\{Z_i = 0\} = \frac{1}{2}$$

Run: ein Block von Nullen (Einsen),

der nicht echt in einem größeren Block enthalten ist

Runs beim fairen Münzwurf

$Z := (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ n-facher fairer Münzwurf

$$P\{Z_i = 1\} = \frac{1}{2} \qquad P\{Z_i = 0\} = \frac{1}{2}$$

Run: ein Block von Nullen (Einsen),

der nicht echt in einem größeren Block enthalten ist

$R :=$ Anzahl Runs in Z

$$00000000 \qquad R = 1$$

$$11100011 \qquad R = 3$$

$$10101010 \qquad R = 8$$

$$\mathbf{E}[R] = ?$$

Dazu schreiben wir R als Summe von Zählern.

Bei jedem Wurf zählen wir eins dazu,

wenn bei diesem Wurf ein Run beginnt:

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $\quad Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $\quad Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0,1) \text{ oder } (1,0)\} \qquad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad (i > 1)$$

$Y_i := 1$ falls bei i ein Run beginnt, $\quad Y_i := 0$ sonst

$$R = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$Y_1 \equiv 1$$

$$\{Y_i = 1\} = \{(Z_{i-1}, Z_i) = (0,1) \text{ oder } (1,0)\} \qquad (i > 1)$$

$$P(Y_i = 1) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[Y_i] = \tfrac{1}{2} \qquad (i > 1)$$

$$\mathbf{E}[R] = \mathbf{E}[Y_1] + \mathbf{E}[Y_2] + \mathbf{E}[Y_3] + \ldots + \mathbf{E}[Y_n]$$

$$\boxed{\mathbf{E}[R] = 1 + \tfrac{1}{2}(n-1)}$$