

# Vorlesung 3a

## Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

### Teil 3

### Linearität des Erwartungswertes

(vgl. (Buch S. 52))

## **Satz 1. (Homogenität des EW)**

Der Erwartungswert des  $c$ -fachen einer diskreten reellwertigen Zufallsvariablen  $X$  ist das  $c$ -fache des Erwartungswertes:

$$\mathbf{E}[cX] = c\mathbf{E}[X]$$

## Satz 1. (Homogenität des EW)

Der Erwartungswert des  $c$ -fachen einer diskreten reellwertigen Zufallsvariablen  $X$  ist das  $c$ -fache des Erwartungswertes:

$$h(a) := ca, \quad Y := h(X) = cX.$$

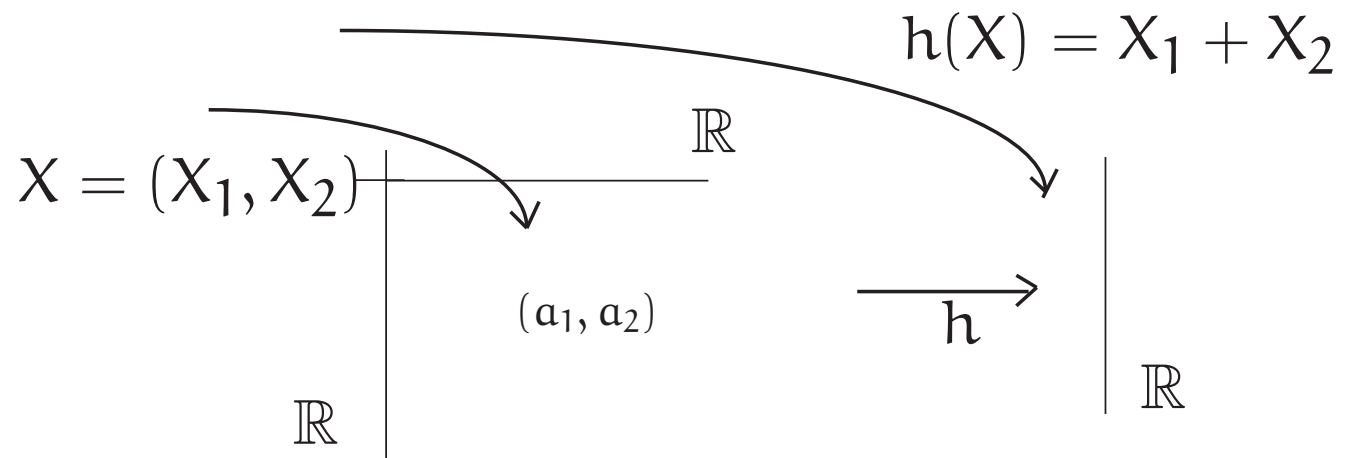
$$\begin{aligned} \mathbf{E}[cX] &= \mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a) \mathbf{P}(X = a) \\ &= \sum_{a \in S} ca \mathbf{P}(X = a) = c \sum_{a \in S} a \mathbf{P}(X = a) = c\mathbf{E}[X]. \end{aligned}$$

## **Satz 2. (Additivität des Erwartungswertes)**

Sei  $(X_1, X_2)$  ein zufälliges Paar reellwertiger ZV'er,  
für die  $\mathbf{E}[X_1]$  und  $\mathbf{E}[X_2]$  existieren und endlich sind.

Dann gilt

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]$$



$$h(a_1, a_2) = a_1 + a_2$$

## Beweis von Satz 2

(hier nur für **diskrete** Zufallsvariable):

Seien  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}$  abzählbar mit

$$\mathbf{P}(X_1 \in S_1) = \mathbf{P}(X_2 \in S_2) = 1.$$

Aus der **Transformationsformel** folgt mit

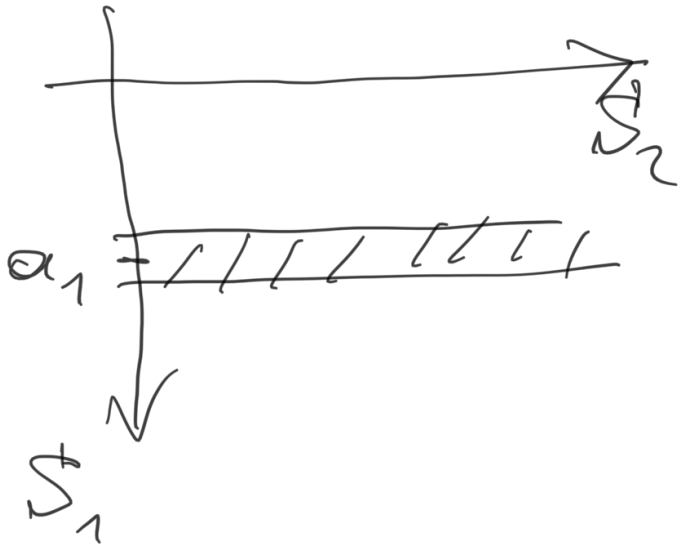
$$h(a_1, a_2) := a_1 + a_2:$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \sum_{(a_1, a_2) \in S_1 \times S_2} \underbrace{(a_1 + a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)}_{= h(a_1, a_2)}$$

In der nächsten Umformung werden wir  
die in V2b1 besprochene Beziehung

$$\sum_{a_2 \in S_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2) = \mathbf{P}(X_1 \in a_1)$$

verwenden.



$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} (a_1 + a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} a_1 \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$+ \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} a_2 \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$



$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} (a_1 + a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} a_1 \mathbf{P}(X_1 = a_1)$$

$$+ \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} a_2 \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} (a_1 + a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} a_1 \mathbf{P}(X_1 = a_1)$$

$$+ \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} a_2 \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in S_1} \sum_{a_2 \in S_2} (a_1 + a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \mathbf{E}[X_1]$$

$$+ \sum_{a_2 \in S_2} a_2 \sum_{a_1 \in S_1} \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2]$$

$$= \sum_{a_1 \in \mathcal{S}_1} \sum_{a_2 \in \mathcal{S}_2} (a_1 + a_2) \mathbf{P}(X_1 = a_1, X_2 = a_2)$$

$$= \mathbf{E}[X_1]$$

$$+ \mathbf{E}[X_2]$$

□

Korollar aus Satz 1 und Satz 2  
**(Linearität des Erwartungswertes)**  
(Buch S. 52)

Für reellwertige Zufallsvariable  $X_1, X_2$   
für die  $\mathbf{E}[X_1]$  und  $\mathbf{E}[X_2]$  existieren und endlich sind,  
gilt

$$\mathbf{E}[c_1 X_1 + c_2 X_2] = c_1 \mathbf{E}[X_1] + c_2 \mathbf{E}[X_2], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$