Vorlesung 3a

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

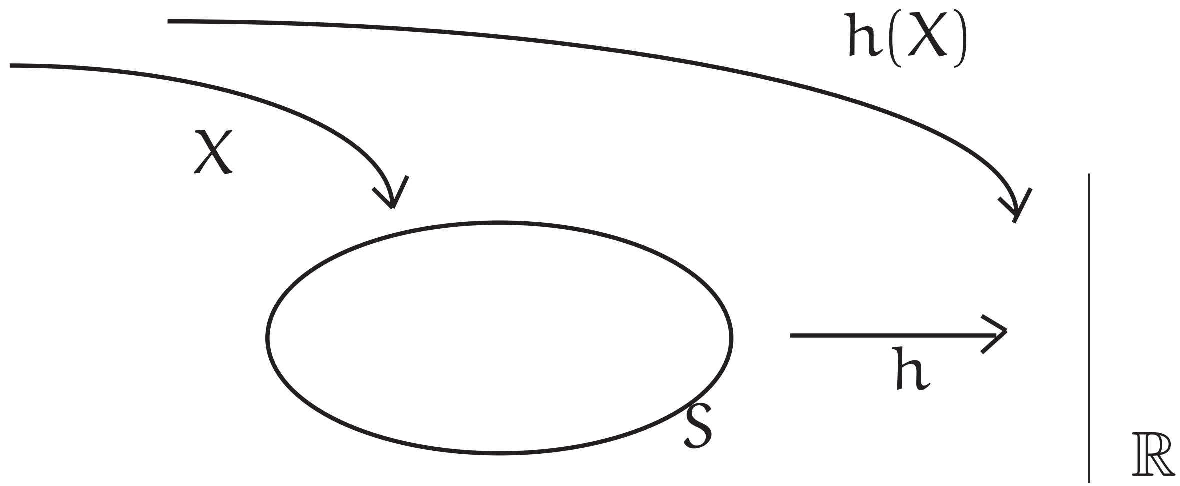
Teil 2

Die Transformationsformel für Erwartungswerte

(vgl. Buch S. 23)

Sei X diskrete Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$

und h eine Abbildung von S nach $\mathbb{R}$



Sei X diskrete Zufallsvariable mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$

und h eine Abbildung von S nach $\mathbb{R}$

mit $\sum_{a \in S} |h(a)| \, \mathbf{P}(X = a) < \infty$.

Dann ist

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a) \, \mathbf{P}(X = a) \; .$$

Diese Formel ist oft hilfreich

bei der Berechnung von Erwartungswerten.

Sie erinnert an die Einsetzungsregel(Substitutionsregel)

zum Berechnen von Summen und Integralen,

und wird uns im nächsten Teil helfen,

die Linearität des Erwartungswertes herzuleiten.

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a)\,\mathbf{P}(X = a)$$

Die Idee ist einfach: anstatt die Werte $b = h(a)$, $a \in S$,

mit deren Gewichten zu mitteln,

“zerlegt man nach dem Urbild”

und mittelt dann mit den Gewichten der Werte a.

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a\in S} h(a)\,\mathbf{P}(X = a)$$

$$\{h(X) = b\} = \{X \in h^{-1}(b)\}.$$

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{b \in h(S)} b\,\mathbb{P}(h(X) = b)$$

$$\mathbf{E}[h(X)] = \sum_{a \in S} h(a)\, \mathbf{P}(X = a)$$

Denn:

$$\sum_{b \in h(S)} b\, \mathbf{P}(h(X) = b)$$

$$= \sum_{b \in h(S)} b \sum_{a \in h^{-1}(b)} \mathbf{P}(X = a)$$

$$= \sum_{b \in h(S)} \sum_{a \in h^{-1}(b)} h(a)\, \mathbf{P}(X = a)$$

$$= \sum_{a \in S} h(a)\, \mathbf{P}(X = a)\,. \quad \square$$

$a \in h^{-1}(b)$

$\Leftrightarrow h(a) = b$