Vorlesung 3a

Der Erwartungswert

von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

Teil 1

Der Erwartungswert als gewichtetes Mittel

(Buch S. 23)

Unter einer diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

verstehen wir eine ZV'e, deren Wertebereich

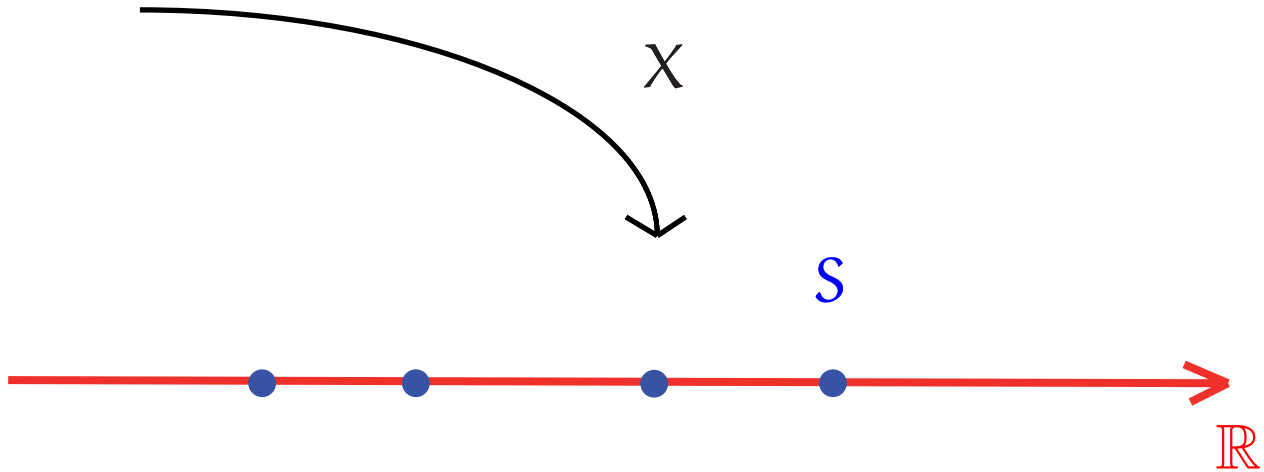
die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

(oder einer Teilmenge davon) ist,

und für die eine

endliche oder abzählbar unendliche Menge S ($\subset \mathbb{R}$) existiert

mit $\mathbf{P}(X \in S) = 1$.



X
S
ℝ

Eine einprägsame Kenngröße

für die *Lage* der Verteilung von X

ist das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel

der möglichen Werte von X:

$$\boxed{\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in S} a\,\mathbf{P}(X = a)\ .}$$

Eine einprägsame Kenngröße

für die *Lage* der Verteilung von X

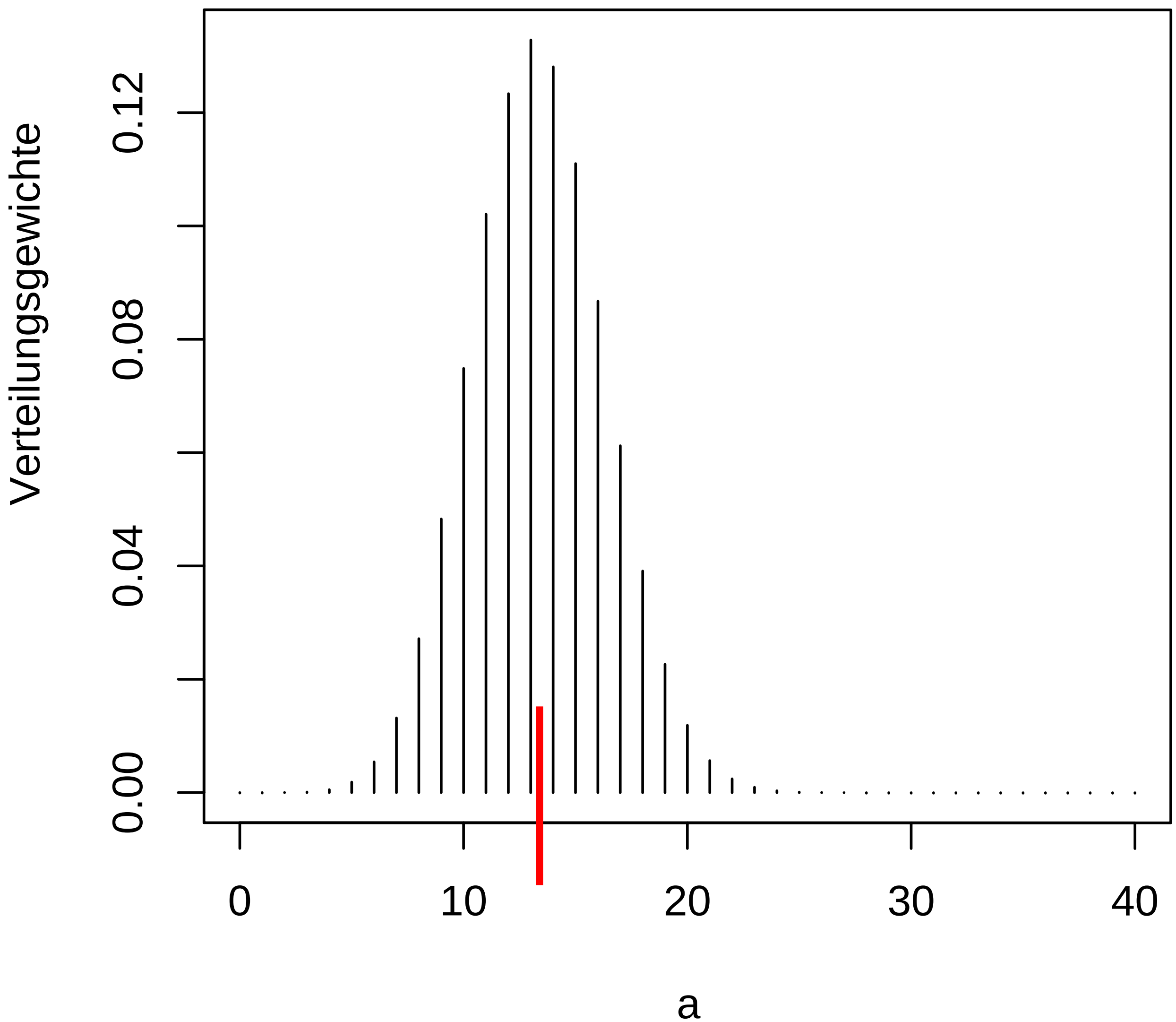
ist das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel

der möglichen Werte von X:

$$\boxed{\mathbf{E}[X] := \sum_{a \in S} a\, \mathbf{P}(X = a)\ .}$$

Man spricht vom *Erwartungswert* von X.

(Wir bezeichnen ihn auch mit μ oder μ_X.)


Verteilungsgewichte
0.00
0.04
0.08
0.12
0
10
20
30
40
a

Das elementarste Beispiel:

$$Z = \begin{cases} 1 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } q = 1 - p \end{cases}$$

Z beschreibt also einen einfachen p-Münzwurf.

Das elementarste Beispiel:

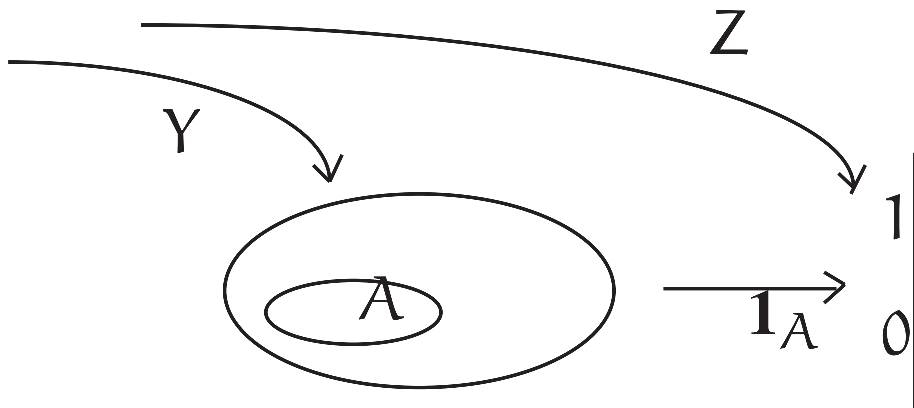
$$Z = \begin{cases} 1 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } q = 1 - p \end{cases}$$

Z beschreibt also einen einfachen p-Münzwurf.

$$\mathbf{E}[Z] = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p$$

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1).$$

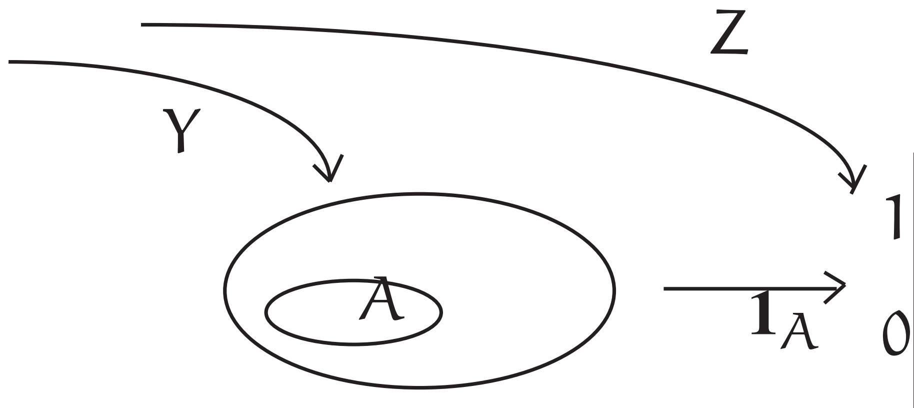
Indikatorvariable von Ereignissen



$$Z = \mathbf{1}_A(Y) =: I_{\{Y \in A\}}$$

.... die *Indikatorvariable* des Ereignisses $\{Y \in A\}$

Indikatorvariable von Ereignissen



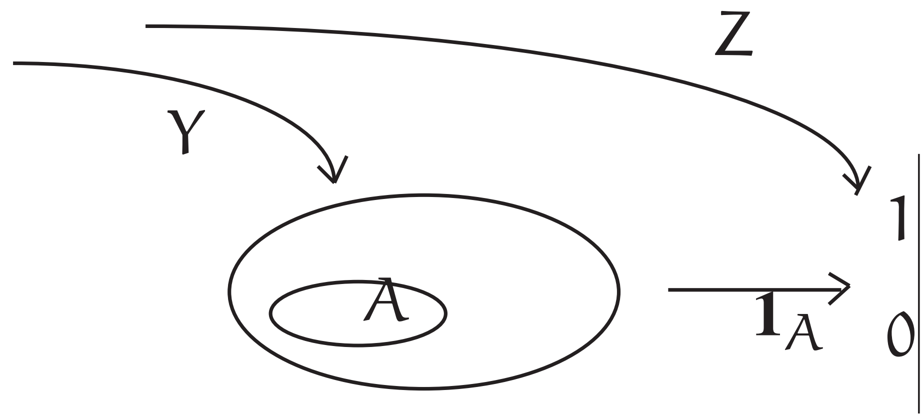
$$Z = \mathbf{1}_A(Y) =: I_{\{Y \in A\}}$$

.... die *Indikatorvariable* des Ereignisses $\{Y \in A\}$

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1)$$

$$\{Z = 1\} = \{Y \in A\}$$

Indikatorvariable von Ereignissen



$$Z = \mathbf{1}_A(Y) =: I_{\{Y \in A\}}$$

.... die *Indikatorvariable* des Ereignisses $\{Y \in A\}$

$$\mathbf{E}[Z] = \mathbf{P}(Z = 1)$$

$$\{Z = 1\} = \{Y \in A\}$$

$$\mathbf{E}[I_{\{Y \in A\}}] = \mathbf{P}(Y \in A).$$

$$\mathbf{E}[\mathrm{I}_{\{Y \in A\}}] = \mathbf{P}(Y \in A).$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich

dem Erwartungswert der Indikatorvariable des Ereignisses.

Für eine diskrete reellwertige ZV'e X hatten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \sum_{a \in S} a\, \mathbf{P}\{X = a\} \\ &= \sum_{a \in S} a\, \rho(a).\end{aligned}$$

Dabei sind die Zahlen $\rho(a)$ die Verteilungsgewichte von X.

Für eine diskrete reellwertige ZV'e X hatten wir

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{a \in S} a\, \mathbf{P}\{X = a\}$$

$$= \sum_{a \in S} a\, \rho(a).$$

Dabei sind die Zahlen $\rho(a)$ die Verteilungsgewichte von X.

Merke:

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X

hängt nur von ihrer Verteilung ρ ab.

Synonym sprechen wir daher auch manchmal vom

Erwartungswert der Verteilung ρ .

Gilt $S \subset \mathbb{R}_+$ oder $\sum_{a \in S} |a| \, \rho(a) < \infty$,

dann hängt der Summenwert $\sum_{a \in S} a \, \rho(a)$

nicht von der Reihenfolge der Summanden ab.

Gilt $S \subset \mathbb{R}_+$ oder $\sum_{a \in S} |a| \, \rho(a) < \infty$,

dann hängt der Summenwert $\sum_{a \in S} a \, \rho(a)$

nicht von der Reihenfolge der Summanden ab.

Man sagt dann:

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X mit Verteilung ρ

ist wohldefiniert

oder kurz: Der Erwartungswert von X *existiert*.

Merke:

X

ist eine Zufallsgröße;

$\mathbf{E}[X]$

ist eine Zahl.