Vorlesung 2b

Diskrete Zufallsvariable und ihre Verteilungen

Teil 3:

Zufällige Besetzungen:

Vom Würfeln zur Multinomialverteilung

1. Das $(p_1, \ldots, p_g)$-Würfeln als Verallgemeinerung des p-Münzwurfs

Oder: Was 2 recht ist, soll g billig sein!

(vgl. Buch S. 28)

Definition ("n-faches $(p_1, \dots, p_g)$-Würfeln"):

Seien $g \in \mathbb{N}$ und $p_1, \dots, p_g \geq 0$ mit $p_1 + \dots + p_g = 1$.

Wir definieren Verteilungsgewichte auf

$$S := \{a = (a_1, \dots, a_n) \,:\, a_i \in \{1, \dots, g\}\}$$

durch

$$\rho(a_1, \dots, a_n) := p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdots p_{a_n}.$$

Definition ("n-faches $(p_1, \ldots, p_g)$-Würfeln"):

Seien $g \in \mathbb{N}$ und $p_1, \ldots, p_g \geq 0$ mit $p_1 + \ldots + p_g = 1$.

Wir definieren Verteilungsgewichte auf

$$S := \{a = (a_1, \ldots, a_n) \,:\, a_i \in \{1, \ldots, g\}\}$$

durch

$$\rho(a_1, \ldots, a_n) := p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdots p_{a_n}.$$

Eine Zufallsvariable X mit diesem Zielbereich S

und diesen Verteilungsgewichten ρ nennen wir

n-faches $(p_1, \ldots, p_g)$-Würfeln.

Für *jedes* $a \in S$ *mit*

b_1 Komponenten gleich 1,

b_2 Komponenten gleich 2,

...

b_g Komponenten gleich g

ist dann

$$\mathbf{P}(X = a) = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_g^{b_g}$$

2. Vom $(p_1, \ldots, p_g)$-Würfeln zur Multinomialverteilung

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ sei ein n-faches $(p_1, \ldots, p_g)$-Würfeln

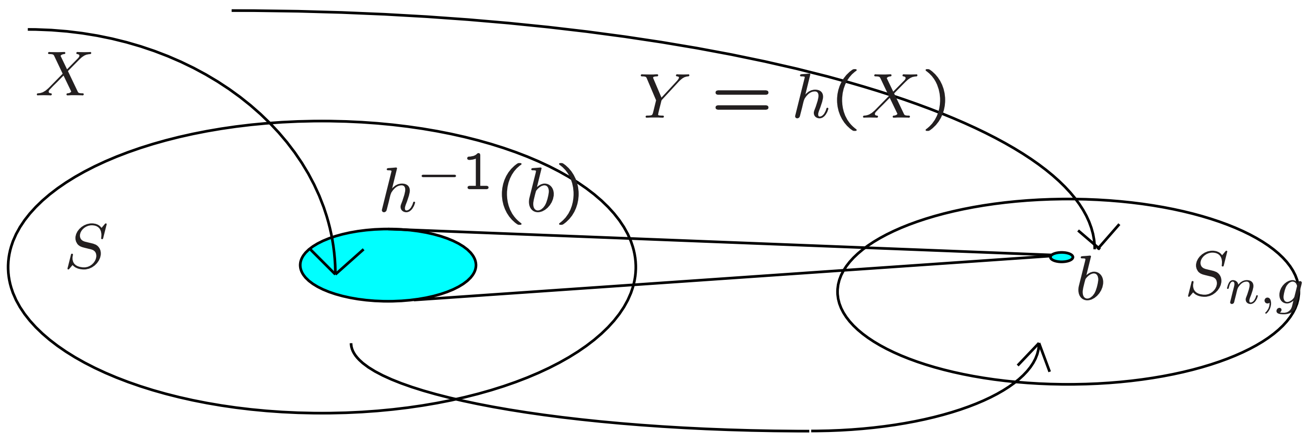
$$Y_j := \#\{i \ : \ X_i = j\}$$

(die Anzahl der Würfe mit Ergebnis j).

$Y := (Y_1, \ldots, Y_g)$ hat dann den Zielbereich

$$S_{n,g} = \{(b_1, \ldots, b_g) \ : b_j \in \mathbb{N}_0, b_1 + \ldots + b_g = n\}.$$

Verteilung von Y = ?



$$h(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_g) =: b$$

mit $b_j := \#\{i : a_i = j\}), \ j = 1, \dots, g$

Jedes $a \in S$ mit $h(a) = (b_1, \dots, b_g)$

hat Gewicht $p_1^{b_1} \dots p_g^{b_g}$

Wieviele solche a gibt es?

Dazu überlegen wir:

Auf wieviele Arten kann man

n Objekte so auf g Fächer verteilen,

dass das j-te Fach jeweils genau b_j Objekte enthält?

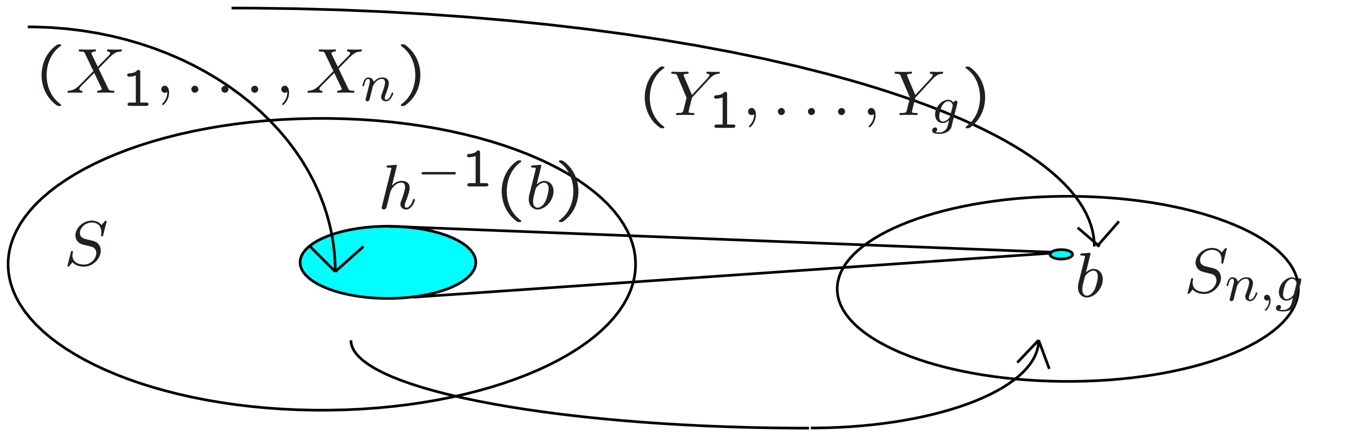
Dabei ist $b_1 + \cdots + b_g = n$.

Die Antwort ist:

$$\binom{n}{b_1} \cdot \binom{n - b_1}{b_2} \cdots \binom{n - b_1 - \cdots - b_{g-1}}{b_g}$$

$$= \frac{n!}{b_1!\, b_2! \cdots b_g!} =: \binom{n}{b_1, \ldots, b_g}$$

Multinomialkoeffizient, lies: n über $b_1, \ldots, b_g$



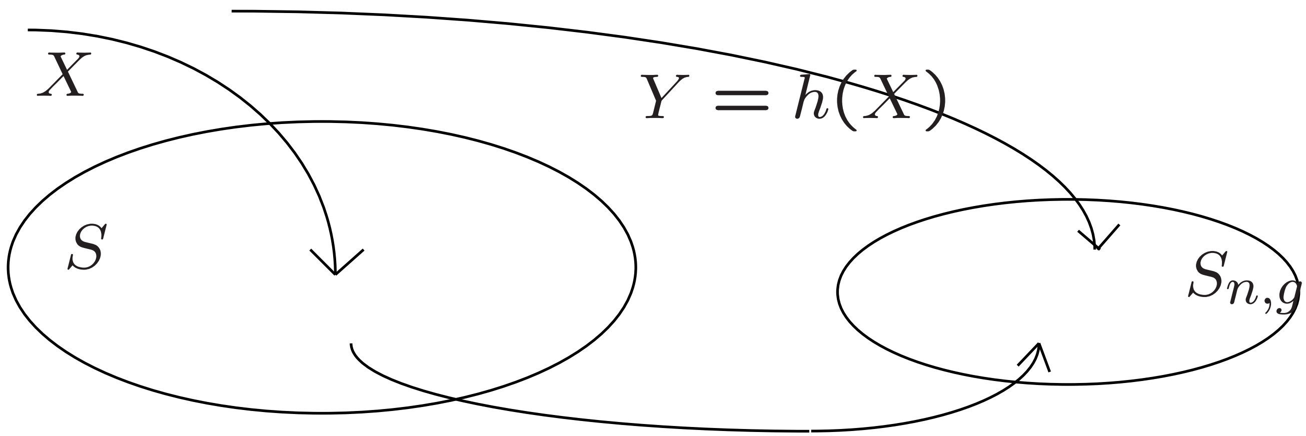
$$h(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_g)$$

Jedes $a \in S$ mit $h(a) = (b_1, \ldots, b_g)$

hat Gewicht $p_1^{b_1} \ldots p_g^{b_g}$

Es gibt $\binom{n}{b_1, \ldots, b_g}$ solche a.

$$\mathbf{P}(Y_1 = b_1, \ldots, Y_g = b_g) = \binom{n}{b_1, \ldots, b_g} p_1^{k_1} \ldots p_g^{b_g}$$



$$h(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_g) =: k$$

mit $b_j := \#\{i : a_i = j\},\ j = 1, \ldots, g$

$$\mathbf{P}(Y_1 = b_1, \ldots, Y_g = b_g) = \binom{n}{b_1, \ldots, b_g} p_1^{b_1} \ldots p_g^{b_g}$$

Definition:

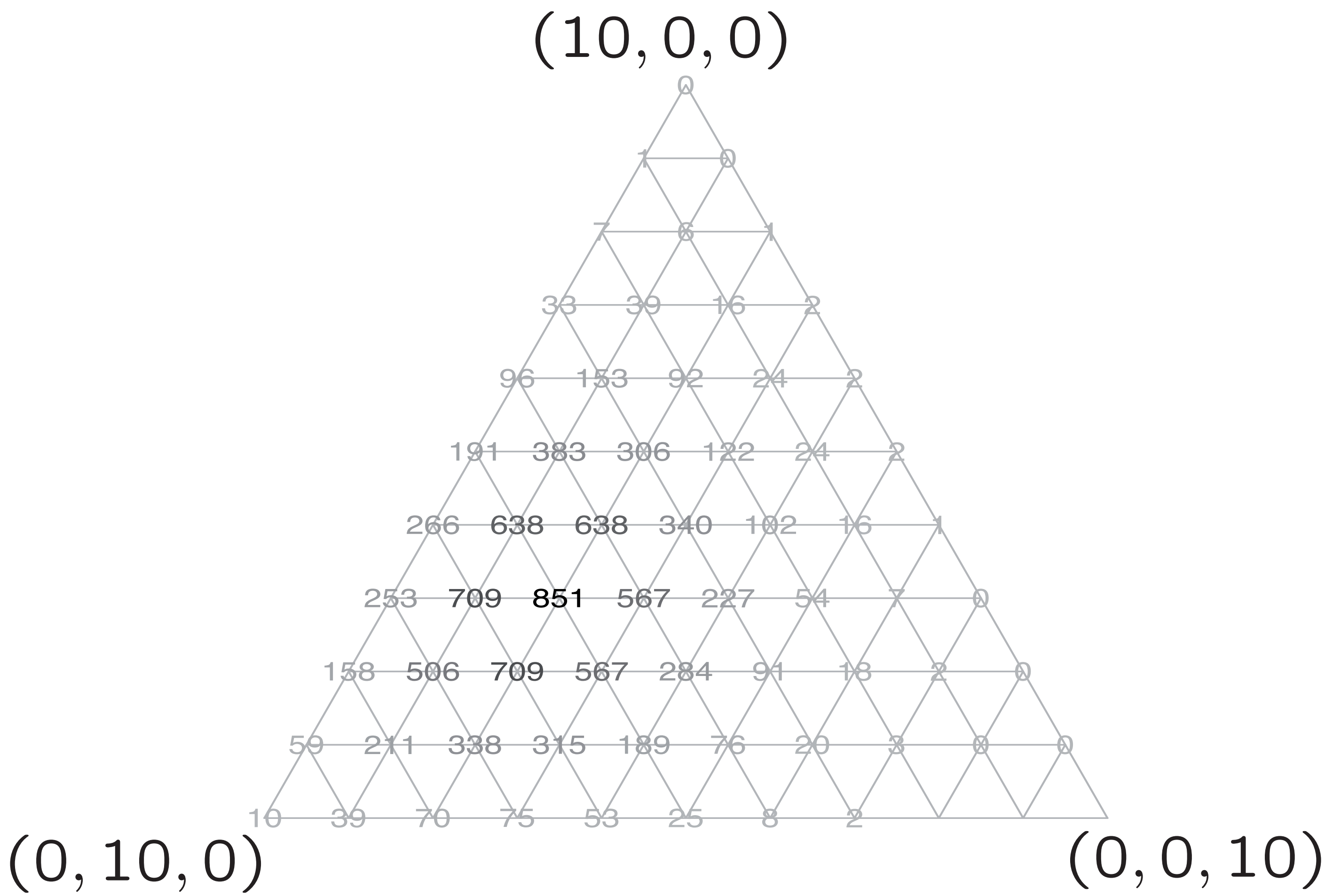
Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $S_{n,g}$

heißt *multinomialverteilt* mit Parametern $n; p_1, \ldots, p_g$,

wenn

$$\mathbf{P}(X = (b_1, \ldots, b_g)) = \binom{n}{b_1, \ldots, b_g} p_1^{b_1} \ldots p_g^{b_g},$$

$$(b_1, \ldots, b_g) \in S_{n,g}\,.$$



Gewichte der Multinomialverteilung, notiert in Vielfachen von $\frac{1}{10000}$,
für $n = 10$, $g = 3$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.2$

Resumé

$g \in \mathbb{N}$	$g = 2$
Würfeln	Münzwurf
Besetzung der Ausgänge	Anzahl der Erfolge
Multinomialverteilung	Binomialverteilung