Vorlesung 2b

Diskrete Zufallsvariable

und ihre Verteilungen

Teil 2:

Die Anzahl der Erfolge:

Vom Münzwurf zur Binomialverteilung

(vgl. Buch S. 22)

1. Vom n-fachen fairen Münzwurf

zur Binomial$(n, \frac{1}{2})$-Verteilung:

$$S := \{0, 1\}^n$$

die Menge der 01-Folgen der Länge n

X sei uniform verteilt auf S,

jeder Ausgang hat somit das Gewicht

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}.$$

1. Vom n-fachen fairen Münzwurf zur Binomial$(n, \frac{1}{2})$-Verteilung:

$$S := \{0, 1\}^n$$

die Menge der 01-Folgen der Länge n

X sei uniform verteilt auf S,

jeder Ausgang hat somit das Gewicht

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}.$$

Man sagt dann auch:

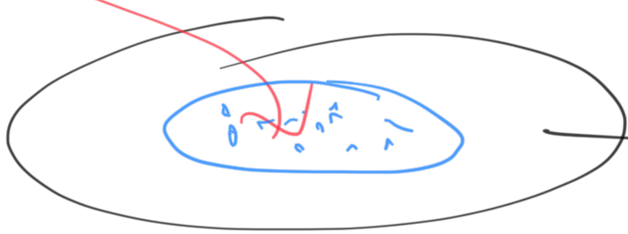
X ist ein n-facher “fairer Münzwurf”.

$Y :=$ die Anzahl der Einsen in X.

Was ergibt sich für die Verteilungsgewichte von Y?

X uniform verteilt auf S

$h(X) = Y$



$$S' := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 10\}$$

h

$$S = \{0,1\}^{10}$$

$$h(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) := \sum_{i=1}^{10} a_i$$

$$P(h(X) = 4) = ?$$

Jede einzelne 01-Folge a der Länge n mit genau k Einsen hat Gewicht $\frac{1}{2^n}$

Es gibt $\binom{n}{k}$ derartiger Folgen a.

Also:

$$\mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Das sind die Gewichte der Binomial$(n, \frac{1}{2})$-Verteilung.

2. Die Anzahl der Sechsen beim fairen Würfeln:

Vom n-fachen Würfeln zur Binomial$(n, \frac{1}{6})$-Verteilung:

(vgl. Buch S. 28)

$X = (X_1, \ldots, X_n)$ uniform verteilt auf

$S := \{1, \ldots, 6\}^n$.

$Z := (Z_1, \ldots, Z_n)$, mit

$Z_i := \mathbf{1}_{\{6\}}(X_i)$

Z ist also eine zufällige 01-Folge, mit

$Z_i = 1$ falls der i-te Wurf eine Sechs ergibt

und $Z_i = 0$ sonst.

Wie ist Z verteilt?

$$\mathbf{P}(Z_1 = 1, \ldots, Z_k = 1,\ Z_{k+1} = 0, \ldots, Z_n = 0)$$

$$= \mathbf{P}(X_1 = 6, \ldots, X_k = 6,\ X_{k+1} \neq 6, \ldots, X_n \neq 6)$$

$$= \frac{1^k \cdot 5^{n-k}}{6^n}$$

$$= p^k q^{n-k},$$

mit $p := \frac{1}{6}$ und $q := \frac{5}{6}$.

$$\mathbf{P}(Z_1 = 1, \ldots, Z_k = 1,\ Z_{k+1} = 0, \ldots, Z_n = 0)$$

$$= \mathbf{P}(X_1 = 6, \ldots, X_k = 6,\ X_{k+1} \neq 6, \ldots, X_n \neq 6)$$

$$= \frac{1^k \cdot 5^{n-k}}{6^n}$$

$$= p^k q^{n-k},$$

mit $p := \frac{1}{6}$ und $q := \frac{5}{6}$.

Auch für jede andere Platzierung von genau k "Sechsen"

in den n Würfen ergibt sich diese W'keit.

Es gibt Es gibt $\binom{n}{k}$ derartige Platzierungen.

Allso hat die Verteilung von

$$Y := Z_1 + \cdots + Z_n$$

die Gewichte

$$\mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Das sind die Gewichte der Binomial$(n, \frac{1}{6})$-Verteilung.

3. Vom p-Münzwurf zur Binomialverteilung

("Was $1/6$ recht ist, soll p billig sein...")

(Buch S. 22)

Definition (p-Münzwurf):

Sei $p \in [0, 1]$, $q := 1 - p$.

Eine Zufallsvariable Z mit Zielbereich

$$S = \{0, 1\}^n = \{a = (a_1, \ldots, a_n)\ : a_i \in \{0, 1\}\}$$

heißt n-facher p-Münzwurf,

wenn für alle $a \in S$ mit k Einsen und $n - k$ Nullen gilt:

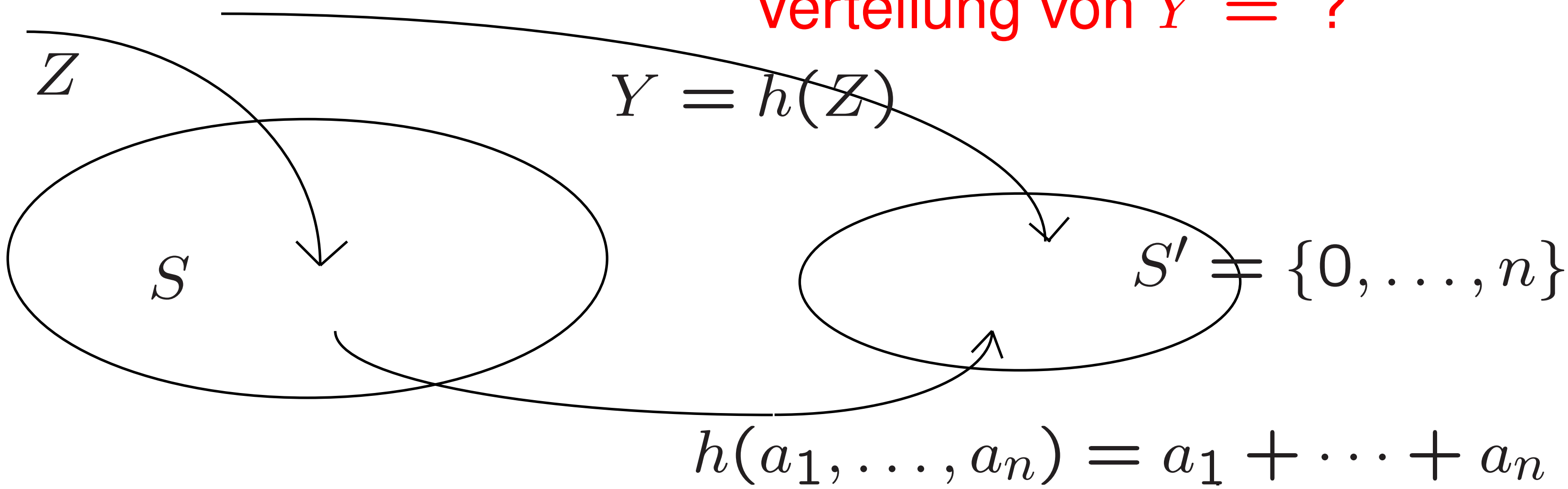
$$\mathbf{P}(Z = a) = p^k q^{n-k}.$$

Sei $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ ein n-facher p-Münzwurf

und $Y = Z_1 + \cdots + Z_n =: h(Z)$ die *Anzahl der Erfolge*

(die Anzahl der Einsen in der zufälligen 0-1 Folge Z)

Verteilung von $Y =$?



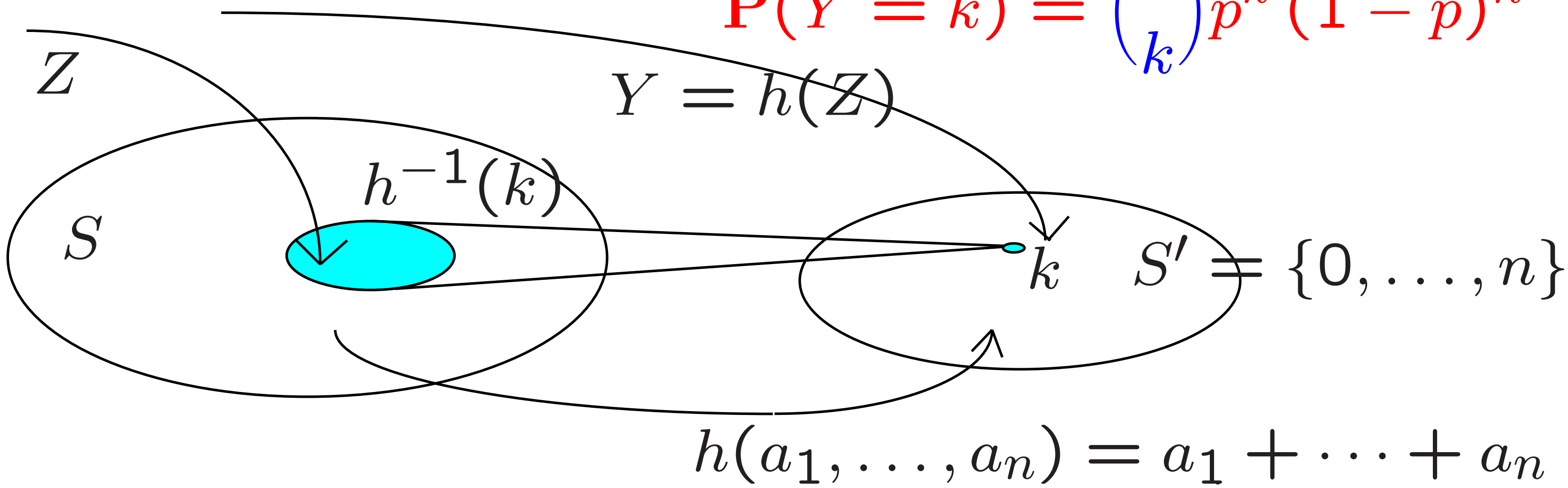
Jedes $a \in S$ mit $h(a) = k$

(d.h. mit k Einsen und $n - k$ Nullen)

hat Gewicht $p^k\,(1-p)^{n-k}$.

Es gibt $\binom{n}{k}$ solche a.

$$\mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}$$



Definition:

Eine Zufallsvariable Y mit Zielbereich $\{0, 1, \ldots, n\}$

heißt *binomialverteilt* mit Parametern n und p,

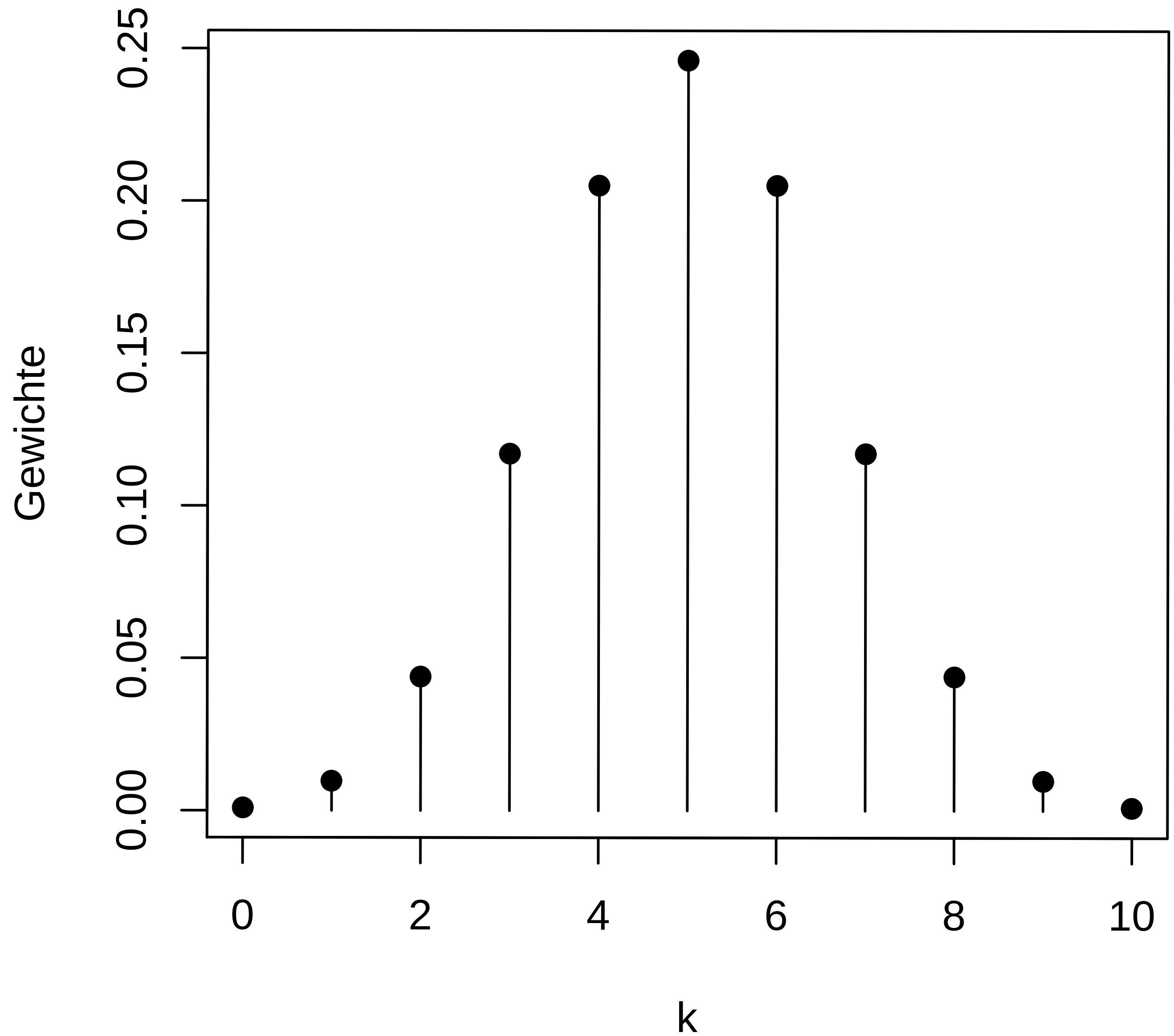
kurz

Bin(n, p)-verteilt,

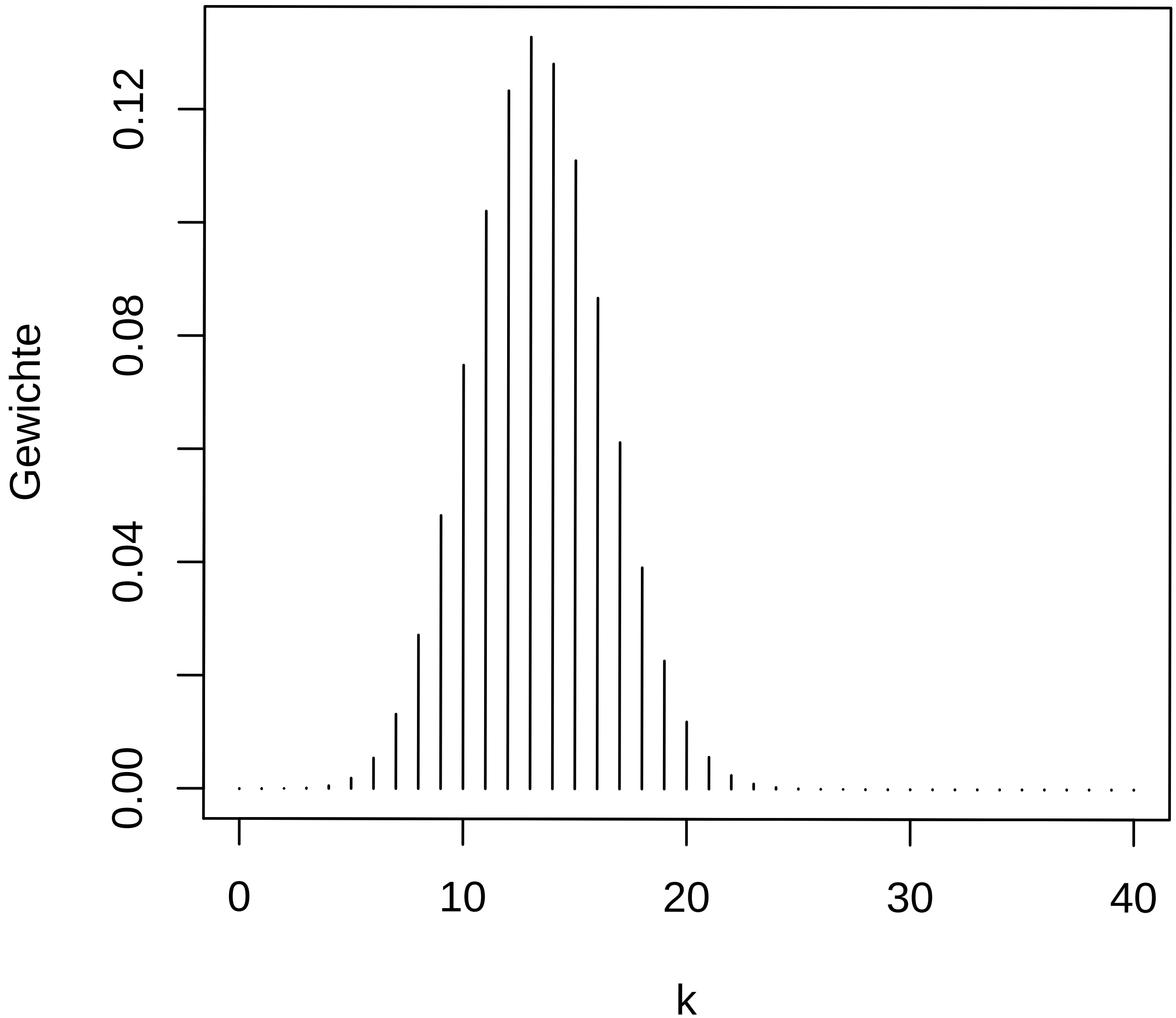
wenn

$$\mathbf{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \,, \quad k = 0, 1, \ldots, n \,,$$

mit $q = 1 - p$.



Gewichte der Bin(10, 1/2) Verteilung



Gewichte der Bin(40, 1/3) Verteilung

4. Vom Ziehen mit Zurücklegen zum p-Münzwurf

(vgl. Buch S. 33)

n-maliges Ziehen *mit Zurücklegen*

aus einer ideal durchmischten Urne.

Ein Anteil p der Kugeln ist rot,

der restliche Anteil $q = 1 - p$ ist blau.

Zufällige 0-1 Folge $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$:

$Z_i = 1$ wenn beim i-ten Zug eine rote Kugel kommt,

und $Z_i = 0$ wenn beim i-ten Zug eine blaue Kugel kommt.

Sei a eine vorgegebene 0-1 Folge der Länge n mit k Einsen,

$$\text{z. B.:} \quad a := (\underbrace{1,\ldots,1}_{k\text{-mal}},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{(n-k)\text{-mal}})$$

$$\mathbf{P}(Z = a) = ?$$

Sei g die Gesamtanzahl der Kugeln in der Urne.

Die Anzahl der roten Kogeln ist pg,

die der blauen Kugeln ist qg. Für obiges a gilt:

$$\mathbf{P}(Z = a) = \frac{(pg)^k (qg)^{n-k}}{g^n} = p^k q^{n-k}$$

Das ist so für jede 0-1 Folge a mit k Einsen und $n - k$ Nullen.

Zur Erinnerung:

Definition (p-Münzwurf):

Sei $p \in [0,1]$, $q := 1 - p$.

Eine Zufallsvariable Z mit Zielbereich

$$S = \{0,1\}^n = \{a = (a_1, \ldots, a_n) \ : a_i \in \{0,1\}\}$$

heißt n-facher p-Münzwurf,

wenn für alle $a \in S$ mit k Einsen und $n-k$ Nullen gilt:

$$\mathbf{P}(Z = a) = p^k q^{n-k}.$$