V2a Teil 3

Besetzungszahlen

(vgl. Buch S. 10-11)

Bsp.: $n=4$, $g=6$: $a=(4,4,1,6)$

1. Begriffsbildung

$b=(1,0,0,2,0,1)$

Sei $a = (a_1, \ldots, a_n)$ eine $1, \ldots, g$ - Folge der Länge n.

Vorstellung: Objekt Nr. i kommt auf Platz a_i.

Wie oft wird laut Protokoll a der Platz j besetzt?

Anders gesagt: Für wieviele i ist $a_i = j$?

$$\boxed{b_j(a) := \#\{i : \ a_i = j, 1 \leq i \leq n\}}$$

X

a $\quad a \mapsto b$

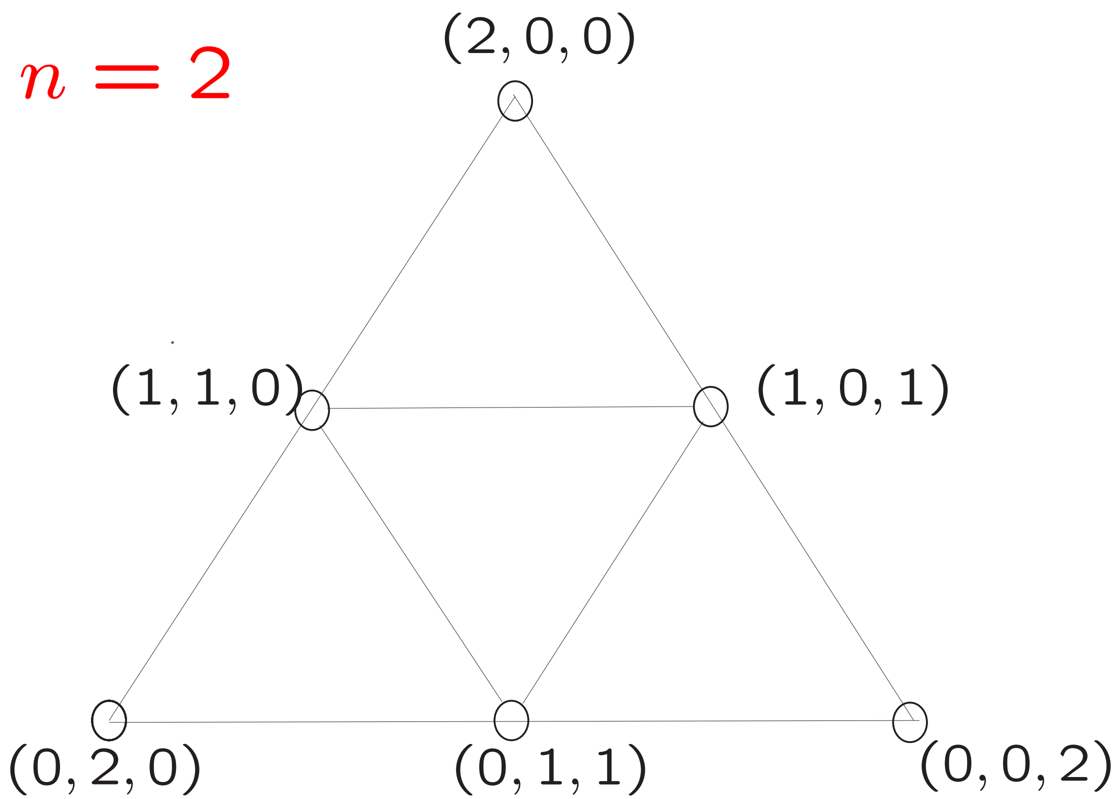
Wahlprotokoll $\qquad$ Besetzung

Das g-tupel der Besetzungszahlen $b_j(a)$ nennen wir kurz
"die durch a induzierte **Besetzung**".

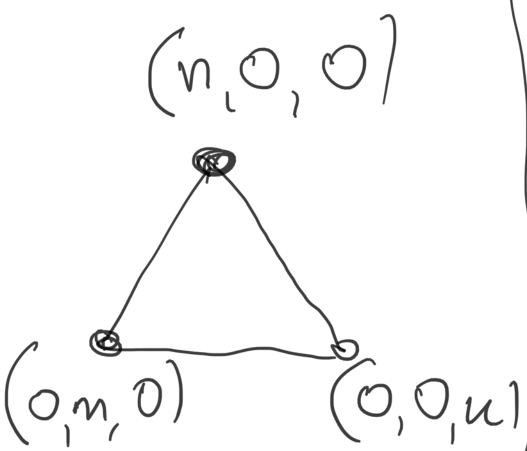
In der Vorstellung des
Setzens von n Objekten auf g mögliche Plätze
gibt sie an, wieviele Objekte auf welchem Platz landen
(und unterscheidet nicht, welche Objekte das sind).

Im Fall $g = 3$ gibt es eine nette Darstellung der Menge der Besetzungen mittels des sogenannten de Finetti-Dreiecks:

$n = 2$

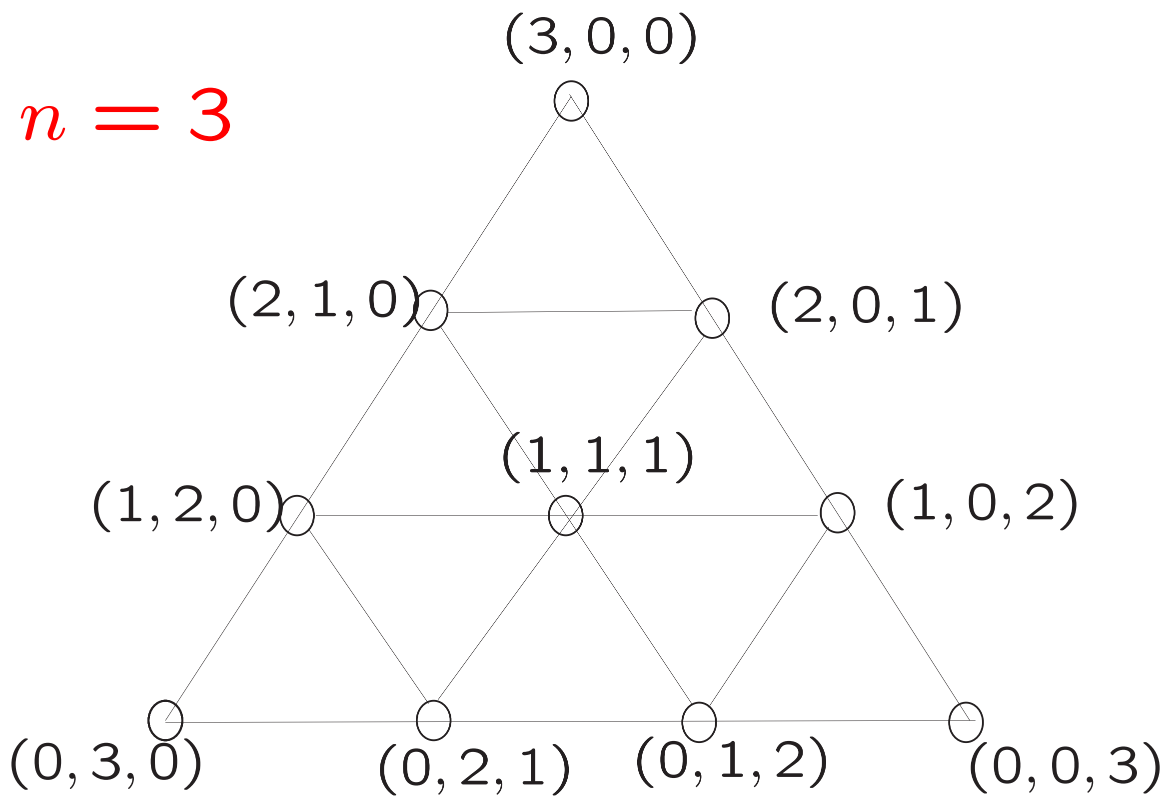


allgemein:



Im Fall $g = 3$ gibt es eine nette Darstellung der Menge der Besetzungen mittels des sogenannten de Finetti-Dreiecks:

$n = 3$



2. Besetzungszahlen bei wiederholter rein zufälliger Platzwahl

Machen wir uns ein Bild von der zufälligen Besetzung,

die aus einem auf $\{1,\ldots,g\}^n$ uniform verteilten X entsteht.

Das war das Szenario aus Vorlesung 1b:

n-malige rein zufällige Wahl

aus g möglichen Plätzen.

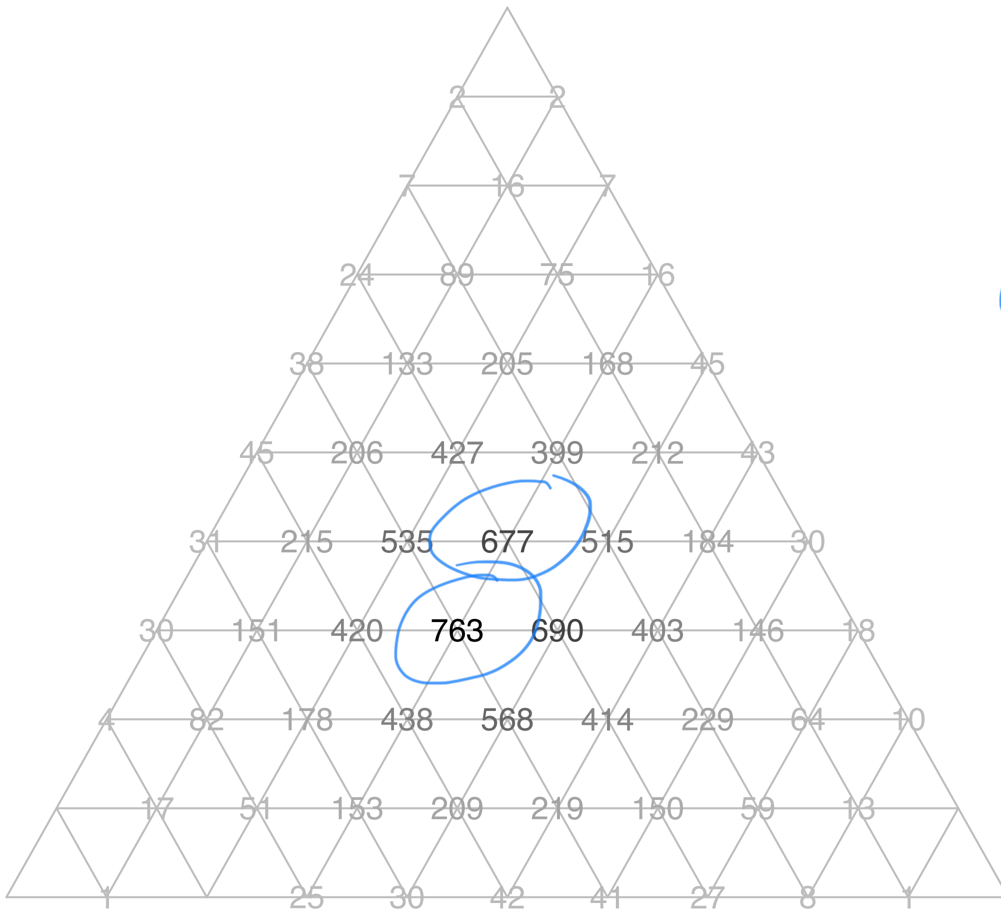
Es folgt das Ergebis einer Simulation für $n = 10$ und $g = 3$.

Die Ecken des *de Finettii-Dreiecks* auf der nächsten Folie

entsprechen den Besetzungen

$(10,0,0)$ (oben), $(0,10,0)$ (links) und $(0,0,10)$ (rechts).

Häufigkeiten der Besetzungen bei 10000 Wiederholungen



677

763

Wir sehen aus der Simulation:

Die Verteilung dieser zufälligen Besetzung ist
(bei weitem) nicht uniform.

Wir kommen auf diese Verteilung
in der nächsten Vorlesung zurück.

Zum Kontrast betrachten wir jetzt die

3. Uniform verteilte Besetzung

von g Plätzen mit n Objekten:

Der Zielbereich ist

$$S_{n,g} := \{b = (b_1, \ldots, b_g) : b_j \in \mathbb{N}_0, b_1 + \cdots + b_g = n\}$$

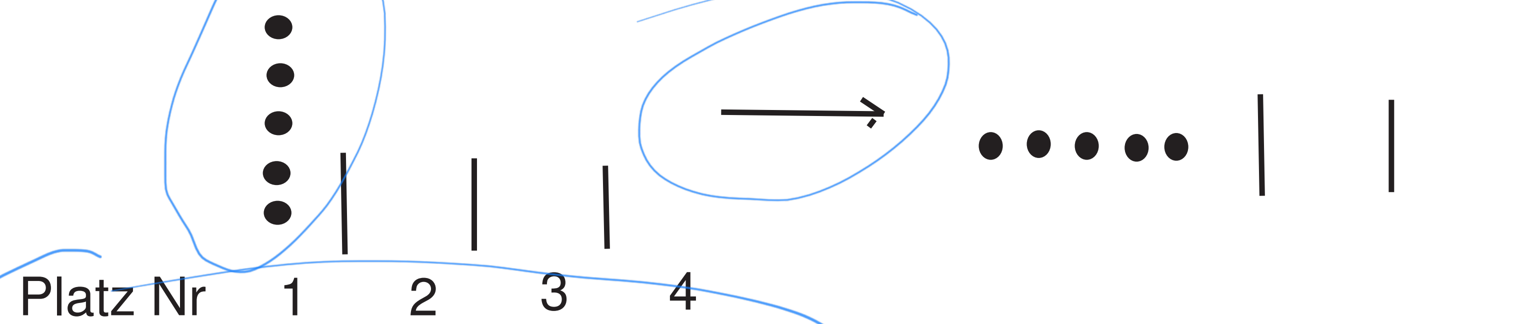
b ist ein g-tupel von Besetzungszahlen, kurz: eine Besetzung.

$$S_{n,g} := \{b = (b_1, \ldots, b_g) : b_j \in \mathbb{N}_0,\ b_1 + \cdots + b_g = n\}$$

$$\#S_{n,g} = ?$$

Hier hilft ein hübscher Trick, $S_{n,g}$ anders darzustellen.

Beispiele: $g = 4$ Plätze, $n = 5$ Objekte



$$(5, 0, 0, 0) \longrightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$$

$$(1,0,2,2) \longrightarrow (1,0,0,1,1,0,1,1)$$

$$(2,0,3,0) \longrightarrow (1,1,0,0,1,1,1,0)$$

Fakt:

$$h(b_1, b_2, \ldots, b_g) := \underbrace{1 \ldots 1}_{b_1\text{-mal}} 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{b_2\text{-mal}} 0 \ldots 0 \underbrace{1 \ldots 1}_{b_g\text{-mal}}$$

ist eine bijektive Abbildung von $S_{n,g}$ nach

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + g - 1$

mit genau n Einsen

$$h(b_1, b_2, \ldots, b_g) := \underbrace{1\ldots1}_{b_1\text{-mal}}0\underbrace{1\ldots1}_{b_2\text{-mal}}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{b_g\text{-mal}}$$

Voriges Beispiel: $n = 5$, $g = 4$:

$$(b_1, \ldots, b_4) = (2, 0, 3, 0)$$

$$h(2, 0, 3, 0) = 11001110$$

Der zweite und der vierte Block aus Einsen sind hier leer.

$$h(b_1, b_2, \ldots, b_g) := \underbrace{1\ldots1}_{b_1\text{-mal}}0\underbrace{1\ldots1}_{b_2\text{-mal}}0\ldots0\underbrace{1\ldots1}_{b_g\text{-mal}}$$

Die Länge des j-ten Blocks aus Einsen steht für die Anzahl der Objekte auf Platz j.

Die Blöcke aus Einsen sind durch Nullen getrennt. Die Nullen fungieren als "Trennwände" zwischen den g Plätzen, insgesamt gibt es $g - 1$ solche Trennwände.

$n+g-1$ ist die Länge der 0-1 Folge

n davon sind mit Einsen besetzt

oder Rest mit Nulle

Also: $\binom{n+g-1}{n}$ viele Möglichkeit

$S :=$ Menge der 01-Folgen der Länge $n + g - 1$

0 0 1 0 1 1 0 1

mit genau n Einsen

$$\underbrace{\circ \ \circ \ \circ \ \circ \ \circ \ \circ \ \circ \ \circ \ \circ}_{n+g-1}$$

$$\#S = ?$$

$$\#S = \binom{n+g-1}{n} \quad \left(= \binom{n+g-1}{g-1} \right)$$

Also (wegen der Bijektion mittles h) auch:

$$\boxed{\#S_{n,g} = \binom{n+g-1}{n}}$$

Eine Möglichkeit zum Erzeugen

einer uniform verteilten Besetzung:

Ziehe aus einer Urne mit n weißen und $g-1$ schwarzen

Kugeln sukzessive ohne Zurücklegen.

Notiere 0 beim Zug einer schwarzen

und 1 beim Zug einer weißen Kugel.

Erzeuge so ein rein zufälliges Element aus S.

Übersetze dieses (mit der Umkehrung von h)

in eine rein zufällige Besetzung.

Hier ist noch ein weiteres Zufallsexperiment, das auf eine
uniform verteilte Besetzung $(Z_1, \ldots, Z_g)$ führt –
dass das tatsächlich so ist, werden wir im Kapitel über mehrstufige Zufalls-experimente unter der Überschrift *Pólya-Urne* sehen.

Das Experiment (unter dem Stichwort *Wo Tauben sind, fliegen Tauben zu*) läuft wie folgt:
Anfangs sind g Personen auf der Bühne, nummeriert mit $1, \ldots, g$.
Sukzessive kommen Ankömmlinge dazu.
Ankömmling 1 wählt rein zufällig eine der g Personen und stellt sich zu ihr, damit steigt die Zahl der Personen auf der Bühne auf $g + 1$.
Ankömmling 2 wählt rein zufällig eine der $g + 1$ Personen und stellt sich zu ihr, u.s.w.
Betrachtet wird dann (bei insgesamt n Ankömmlingen) das g-Tupel $(Z_1, \ldots, Z_g)$, wobei Z_j die Anzahl der Ankömmlinge ist, die bei der Person Nr. j stehen.