

V2a Teil 2

Rein zufällige Teilmenge
einer festen Größe

(Buch S. 9-10)

1. Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$: **der Binomialkoeffizient.**

Sei $k \leq n$.

1. Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$: **der Binomialkoeffizient.**

Sei $k \leq n$.

Jetzt sei S

die Menge aller k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.

Wieviele k -elementige Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ gibt es?

Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus n Personen ein k -köpfiges Komitee ohne Reihung zu bilden?

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es

$n(n - 1) \cdots (n - (k - 1))$ mögliche Wahlprotokolle.

Wird “nach der Reihe” ausgewählt, dann gibt es $n(n - 1) \cdots (n - (k - 1))$ mögliche Wahlprotokolle.

Auf die Reihenfolge kommt es am Ende nicht an,
somit führen jeweils $k!$ dieser Wahlprotokolle
auf dieselbe k -elementige Teilmenge.

Also:

$$\#S = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

$\frac{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Binomialkoeffizient „n über k“

die Anzahl der Möglichkeiten für „k aus n“

Beispiel: Binomischer Lehrsatz:

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \cdots (x + y)}_{n\text{-mal}} = ?$$

Multipliziert man aus, dann ergeben sich 2^n Summanden

(entsprechend den 2^n $x y$ -Folgen der Länge n).

Jeder dieser Summanden ist von der Form $x^k y^{n-k}$.

Für festes k gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten,
 k aus den n Faktoren $(x + y)$ auszuwählen,
bei denen x zum Zug kommt.

$$\text{Also } (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$... die Anzahl der Möglichkeiten für „ k aus n “

Rekursion:
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$



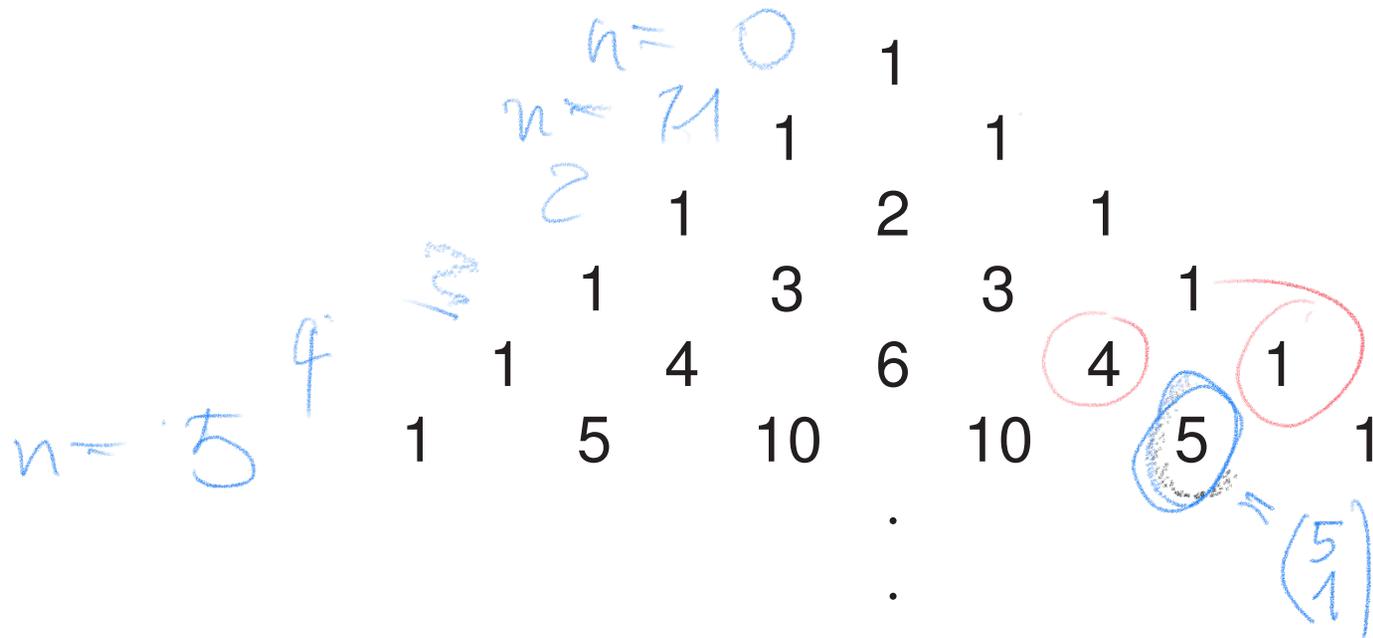
9 Hessen
1 Bayer

$$\binom{10}{4} = \binom{9}{3} + \binom{9}{4}$$

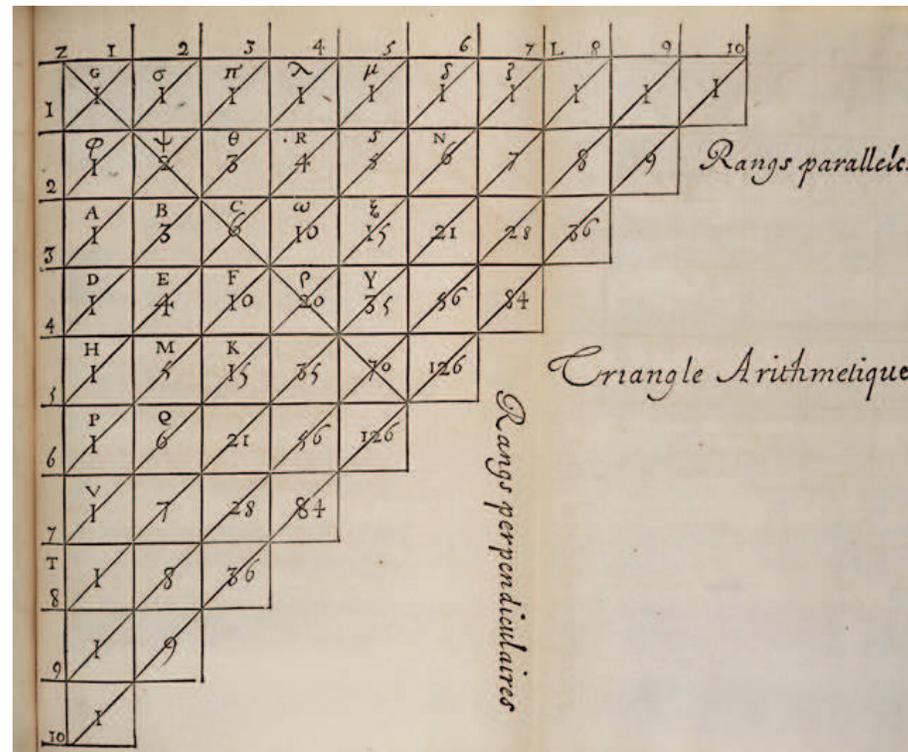
Rekursion: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Interpretation: Anzahl der Möglichkeiten,
aus n **Hessen** und einem **Bayern**
ein $k + 1$ köpfiges Komitee auszuwählen.
Entweder **der Bayer ist im Komitee...**
oder **er ist nicht im Komitee...**

Pascal'sches Dreieck



Rekursion:
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$



“La nombre de chaque cellule est égal a celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle.”
(Pascal 1654)

2. Rein zufällige Teilmengen

Sei $0 \leq k \leq n$

und sei Y eine rein zufällige k -elementige Teilmenge
von $\{1, \dots, n\}$.

Wie wahrscheinlich ist das Ereignis $\{Y = \{1, \dots, k\}\}$?

Der Zielbereich von Y ist

$$S := \{t : t \subset \{1, \dots, n\}, \#t = k\},$$

die Menge der k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.

Der Zielbereich von Y ist

$$S := \{t : t \subset \{1, \dots, n\}, \#t = k\},$$

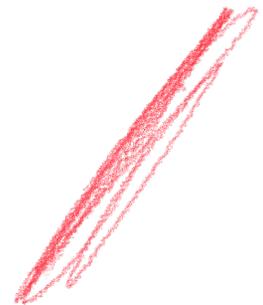
die Menge der k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.

Wir haben gesehen:

$$\#S = \binom{n}{k}$$

Fazit:

$$\mathbf{P}(Y = \{1, \dots, k\}) = \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$



3. Ein Zusammenhang mit rein zufälligen Permutationen

Wie bekommt man eine rein zufällige k -elementige Teilmenge aus einer rein zufälligen Permutation?

Fakt (für $k \leq n$):

Ist $X = (X_1, \dots, X_n)$

eine rein zufälligen Permutation von $1, \dots, n$,

dann ist $\{X_1, \dots, X_k\}$

eine rein zufällige k -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$.

Anders gesagt:

Beim **Ziehen ohne Zurücklegen**
führen die ersten k Züge auf eine
rein zufällige Teilmenge des anfänglichen Reservoirs.

Noch eine Möglichkeit zum Erzeugen
einer rein zufälligen k -elementigen Teilmenge:

Ziehe sukzessive ohne Zurücklegen aus einer Urne
mit k roten und $n - k$ blauen Kugeln.

Notiere die **Nummern X_1, \dots, X_k der Züge**,
bei denen eine rote Kugel gezogen wird.

Dann ist $\{X_1, \dots, X_k\}$
eine rein zufällige k -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$.