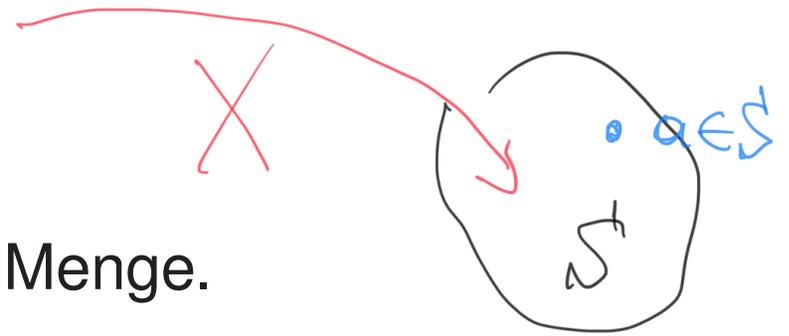


# Vorlesung 2a

## Diskret uniform verteilte Zufallsvariable

(Buch S. 6-11)

# Erinnerung und Auftakt



Sei  $S$  eine endliche Menge.

Eine Zufallsvariable  $X$  heißt *uniform verteilt auf  $S$* ,

wenn

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{\#S}$$

für alle  $a \in S$ .

Damit beschreibt  $X$  eine *rein zufällige Wahl* aus  $S$ .

Beispiel aus Vorlesung 1b:

$$S = \{1, 2, \dots, g\}^n$$

$X :=$  rein zufällige  $1 \dots g$  - Folge der Länge  $n$ .

Eine auf einem endlichen Wertebereich  
uniform verteilte Zufallsvariable nennt man auch  
**diskret uniform verteilt.**



Heute lernen wir drei weitere Beispiele  
von diskret uniform verteilten Zufallsvariablen kennen:

1. Rein zufällige Permutation

Heute lernen wir drei weitere Beispiele  
von diskret uniform verteilten Zufallsvariablen kennen:

1. Rein zufällige Permutation
2. Rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge

Heute lernen wir drei weitere Beispiele  
von diskret uniform verteilten Zufallsvariablen kennen:

1. Rein zufällige Permutation
2. Rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge
3. Uniform verteilte Besetzung

Heute lernen wir drei weitere Beispiele  
von diskret uniform verteilten Zufallsvariablen kennen:

1. Rein zufällige Permutation
2. Rein zufällige  $k$ -elementige Teilmenge
3. Uniform verteilte Besetzung

Bei der Gelegenheit erarbeiten wir auch ein paar  
*Hilfen fürs Abzählen.*

# Teil 1

## Rein zufällige Permutation

(Buch S. 6-8)

# 1. Elementares

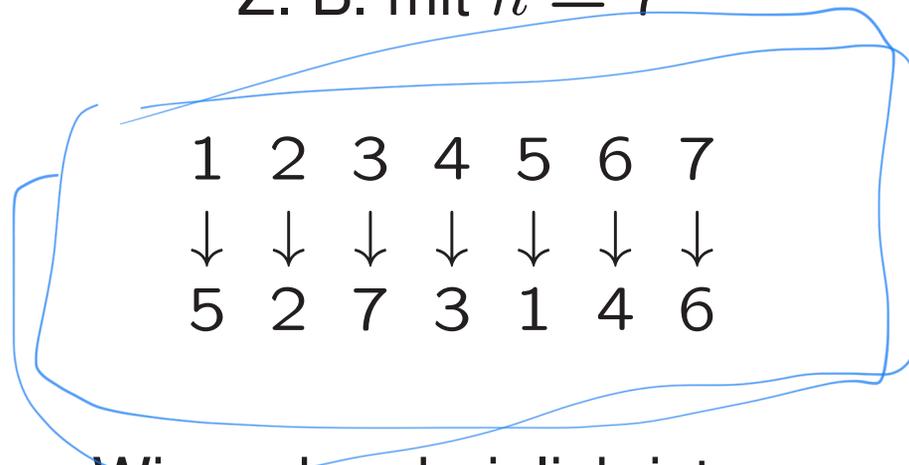
Eine *Permutation* von  $1, \dots, n$   
ist eine bijektive Abbildung der Menge  $\{1, \dots, n\}$  auf sich.

Z. B. mit  $n = 7$

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	2	7	3	1	4	6

Eine *Permutation* von  $1, \dots, n$   
ist eine bijektive Abbildung der Menge  $\{1, \dots, n\}$  auf sich.

Z. B. mit  $n = 7$



Wie wahrscheinlich ist es,  
dass eine rein zufällige Permutation  
genau **so** ausfällt?

Wieviele Permutationen von  $1, \dots, n$  gibt es?

$n$  Möglichkeiten für das Bild von 1

Wieviele Permutationen von  $1, \dots, n$  gibt es?

$n$  Möglichkeiten für das Bild von 1

mal  $(n - 1)$  Möglichkeiten für das Bild von 2

Wieviele Permutationen von  $1, \dots, n$  gibt es?

$n$  Möglichkeiten für das Bild von 1

mal  $(n - 1)$  Möglichkeiten für das Bild von 2

mal  $(n - 2)$  Möglichkeiten für das Bild von 3

Wieviele Permutationen von  $1, \dots, n$  gibt es?

$n$  Möglichkeiten für das Bild von 1

mal  $(n - 1)$  Möglichkeiten für das Bild von 2

mal  $(n - 2)$  Möglichkeiten für das Bild von 3

...

$$= n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Sei  $X$  eine rein zufällige Permutation von  $1, \dots, n$ ,

d.h. eine Zufallsvariable, deren Zielbereich

$S :=$  die Menge aller Permutationen von  $1, \dots, n$

ist, und die auf  $S$  uniform verteilt ist.

Für alle Elemente  $a \in S$  gilt also:

$$\mathbf{P}(X = a) = \frac{1}{n!}$$

## 2. Zufällige Permutation und zufälliges Ziehen

Wie kann man sich eine rein zufällige Permutation  
entstanden denken?

Wie kann man sich eine rein zufällige Permutation  
entstanden denken?

Zum Beispiel: als Folge der gezogenen Nummern  
beim  $n$ -maligen rein zufälligen *Ziehen ohne Zurücklegen*  
aus  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Wie kann man sich eine rein zufällige Permutation  
entstanden denken?

Zum Beispiel: als Folge der gezogenen Nummern  
beim  $n$ -maligen rein zufälligen *Ziehen ohne Zurücklegen*  
aus  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

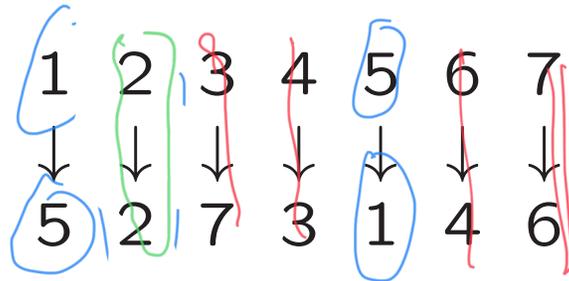
Szenario: eine stets ideal durchmischte Urne  
mit anfangs  $n$  Kugeln, beschriftet mit den Nummern  $1, \dots, n$ .

Ziehe sukzessive **ohne Zurücklegen** alle  $n$  Kugeln  
und notiere die gezogenen Nummern in Reihenfolge.

### 3. Zyklendarstellung einer Permutation

Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:



Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	2	7	3	1	4	6

Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	2	7	3	1	4	6

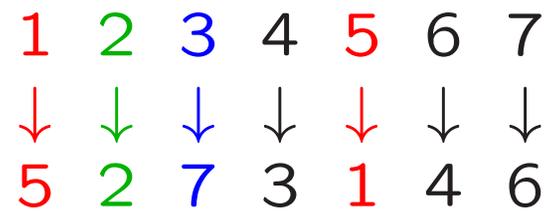
Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	2	7	3	1	4	6

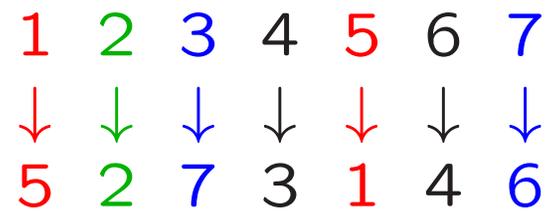
Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:



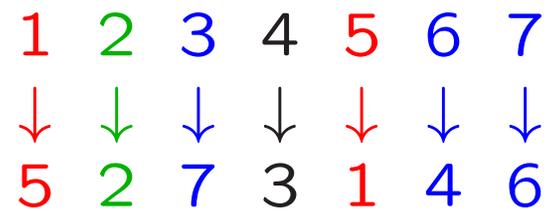
Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:



Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Beispiel:

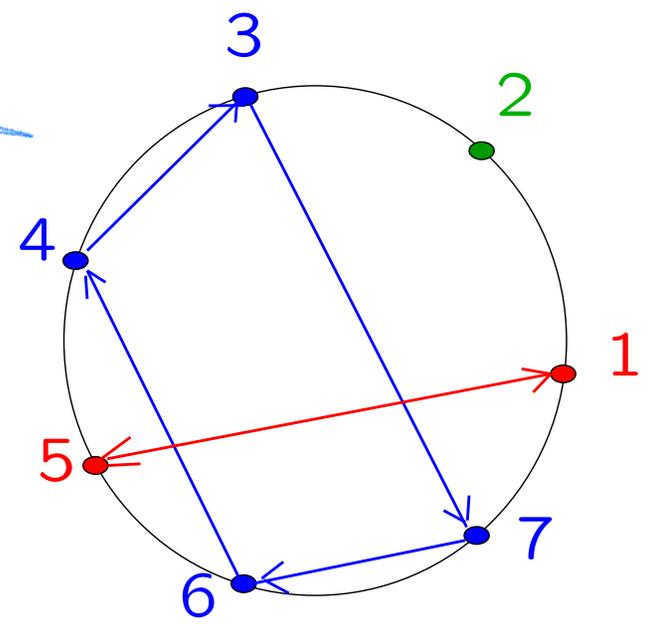


# Jede Permutation zerfällt in **Zyklen**

Eine bequemere  
Notation für  
die Zykelzerlegung:  
(15) (2) (3764)

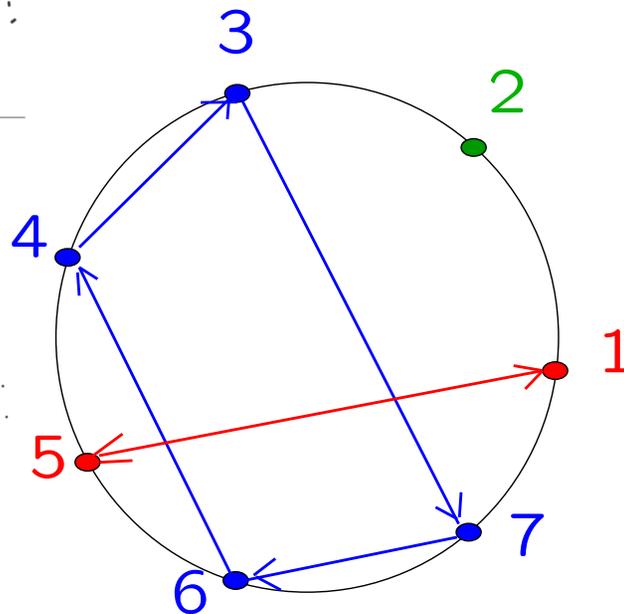
Beispiel:

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	2	7	3	1	4	6



Zur Abgrenzung:  
Rein zufällige Wahl:

Damas war  
 $S = \{g_1, \dots, g_n\}$   
mit  $\#S^1 = g^n$



Die Länge des **Zyklus, der die Eins enthält**, ist hier  
**zwei.**

Die  $W$ 'keit, erst in 7 Schritten wieder  
in 1 zu landen (Sei Start in 1) ist

$$\frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$$

Sei  $X$  eine rein zufällige Permutation von  $1, \dots, 7$ ,

Wie wahrscheinlich ist es, dass **der die 1 enthaltende Zykel** genau die Länge 3 hat?

Wieviele Permutationen von  $1, \dots, 7$  gibt es, bei denen **der die 1 enthaltende Zykel** genau die Länge 3 hat?

Es gibt davon  $6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 4!$  Stück (warum?)

Also ist die gefragte W'keit:  $\frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$ .

Die W'k, in einem Schritt von der 1  
in die 1 zurückzufahren, ist

$$\frac{1}{7!} 6! = \frac{1}{7}$$

Jetzt allgemein:

Für eine Permutation  $a \in S$  bezeichne

$$h(a)$$

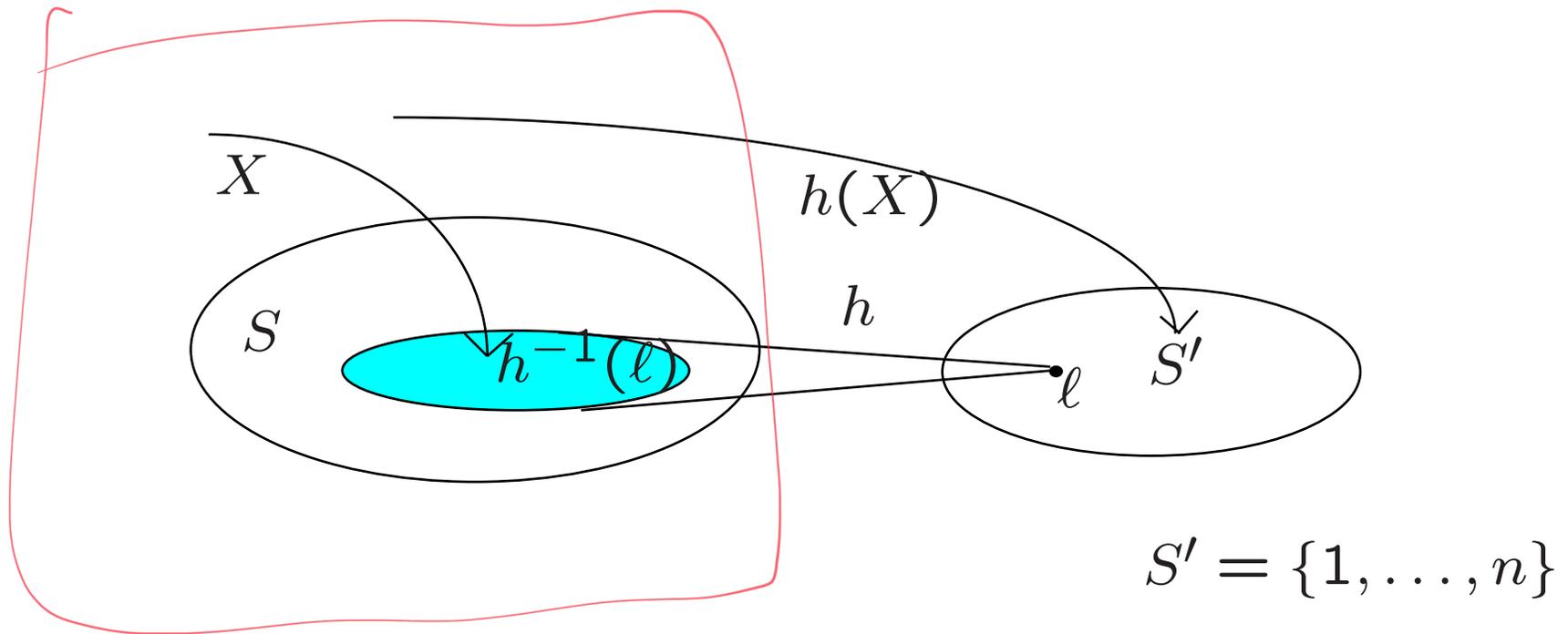
die Länge des Zyklus von  $a$ , der die Eins enthält.

Sei  $X$  eine rein zufällige Permutation von  $\{1, \dots, n\}$ ,

also eine rein zufällige Wahl aus  $S$ ,

und sei  $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

$$P(h(X) = \ell) = ?$$



Wieviele Permutationen  $a \in S$  gibt es mit  $h(a) = l$ ?

$$A := \{a \in S : h(a) = l\}$$

$$\#A = ?$$

$$A = \{a \in S : a(1) \neq 1, a^2(1) \neq 1, \dots, \\ a^{\ell-1}(1) \neq 1, a^\ell(1) = 1\}$$


$$A = \{a \in S : a(1) \neq 1, a^2(1) \neq 1, \dots, \\ a^{\ell-1}(1) \neq 1, a^\ell(1) = 1\}$$

$$\begin{aligned} \#A &= (n-1)(n-2) \cdots (n-(\ell-1)) \cdot 1 \cdot (n-\ell) \cdots 1 \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

$$\#A = (n - 1)!, \quad \#S = n!$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\#A}{\#S}$$

$$= \frac{(n - 1)!}{n!}$$

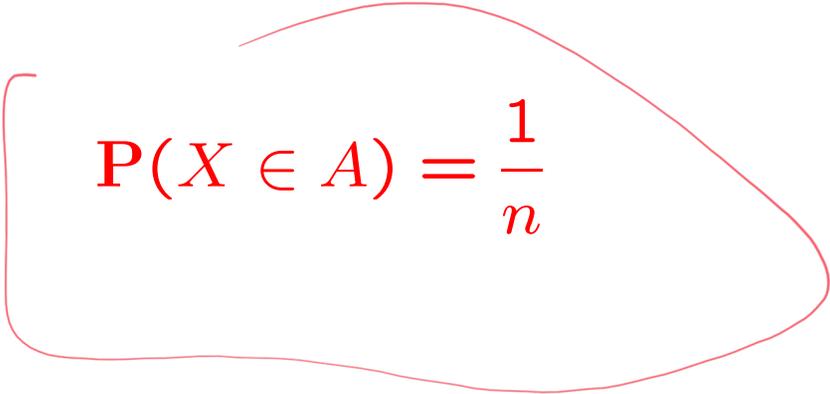
$$= \frac{1}{n}$$

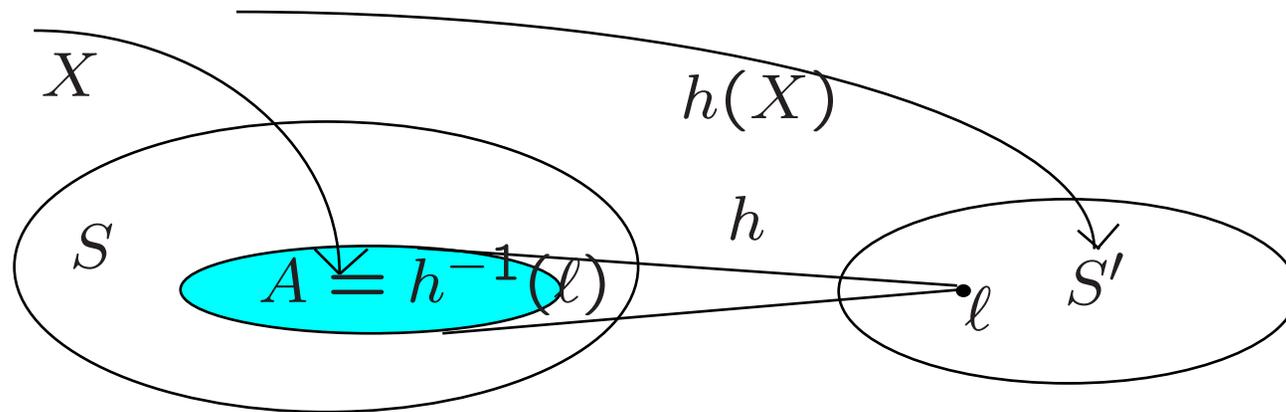
$$\#A = (n - 1)!, \quad \#S = n!$$

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{\#A}{\#S}$$

$$= \frac{(n - 1)!}{n!}$$

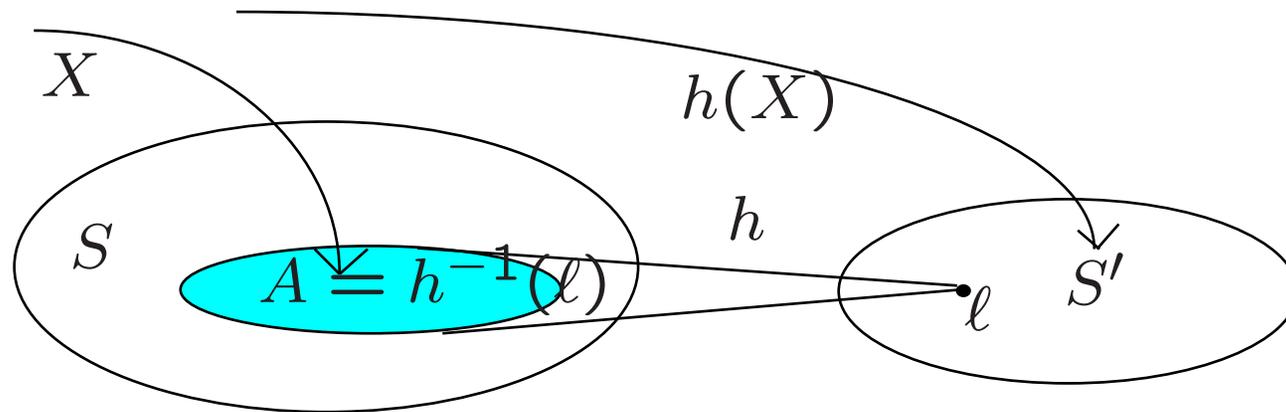
$$= \frac{1}{n}$$


$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{1}{n}$$



$$S' = \{1, \dots, n\}$$

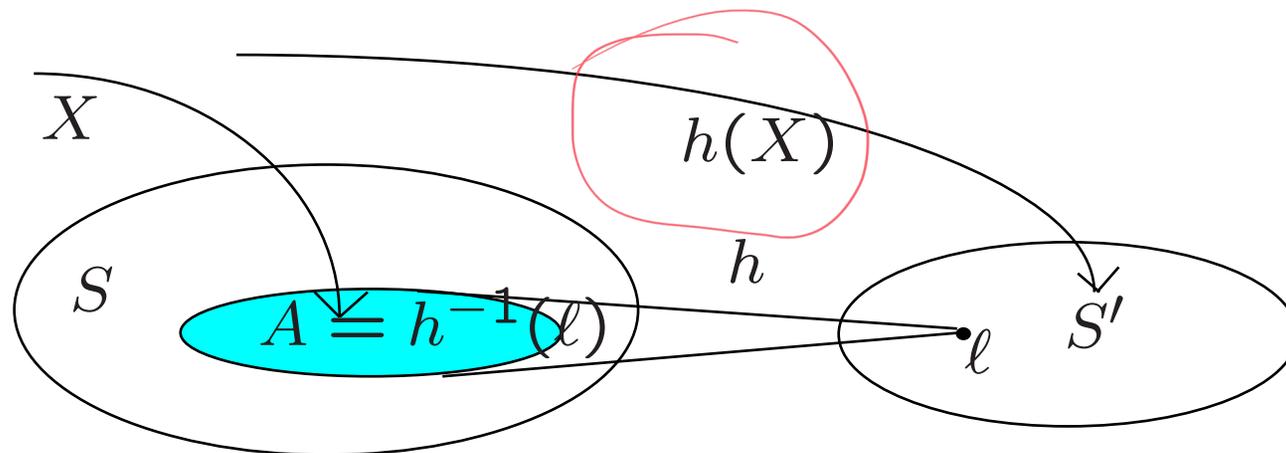
$$A = \{a \in S : h(a) = l\}$$



$$S' = \{1, \dots, n\}$$

$$A = \{a \in S : h(a) = l\}$$

$$\{X \in A\} = \{h(X) = l\}$$



$$S' = \{1, \dots, n\}$$

$$A = \{a \in S : h(a) = l\}$$

$$\{X \in A\} = \{h(X) = l\}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = l) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(h(X) = \ell) = \frac{1}{n}, \quad \ell = 1, \dots, n.$$

$$\mathbf{P}(h(X) = \ell) = \frac{1}{n}, \quad \ell = 1, \dots, n.$$

Fazit:

Die Länge desjenigen Zyklus  
einer rein zufälligen Permutation von  $1, \dots, n$ ,  
der die Eins enthält,  
ist uniform verteilt auf  $\{1, \dots, n\}$ .