Vorlesung 1b

Wahrscheinlichkeit von Kollisionen

bei der wiederholten rein zufälligen Wahl

aus endlich vielen möglichen Ausgängen

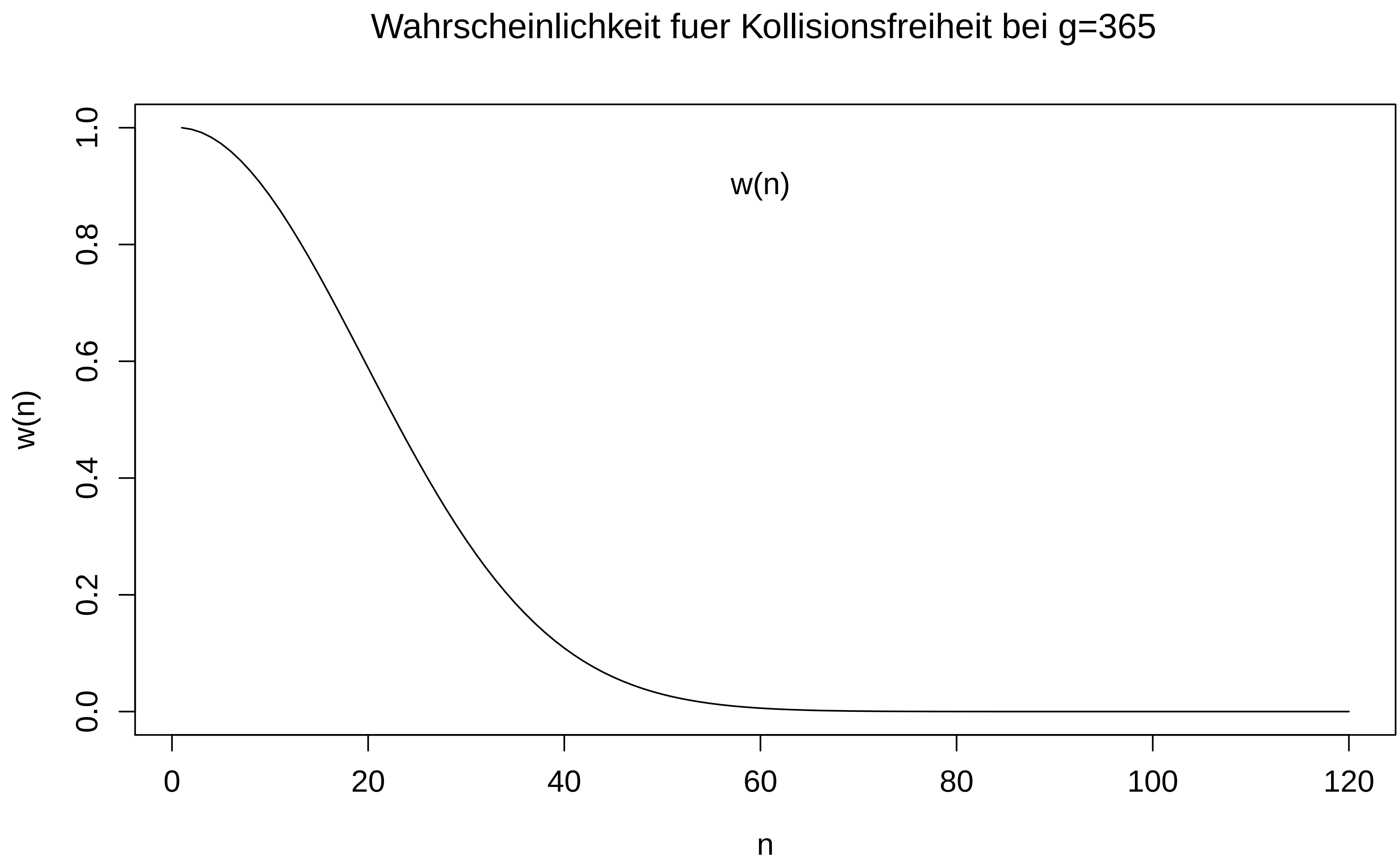
(Buch S. 1-5)

Teil Zwei:

Approximationen

der Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit

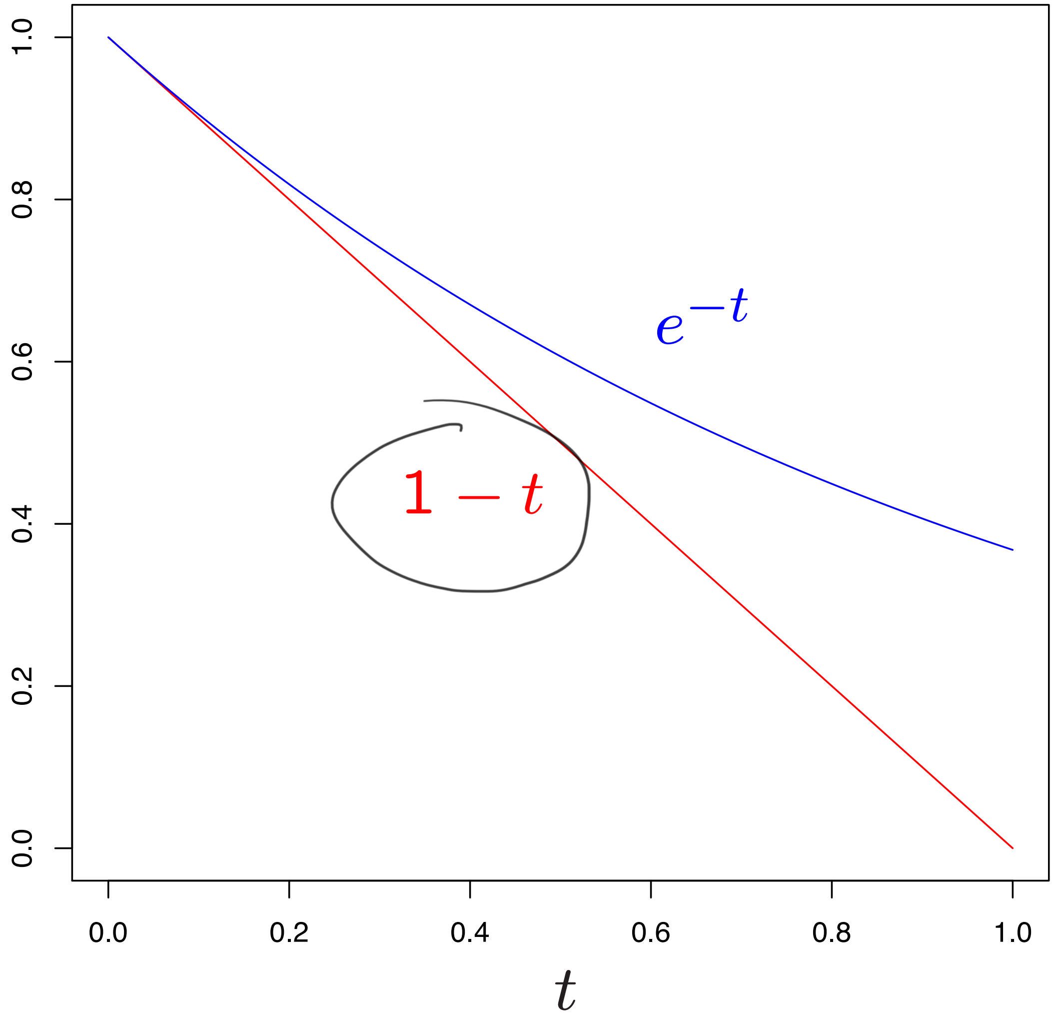
$$w(n,g) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{g}\right)$$


Wahrscheinlichkeit fuer Kollisionsfreiheit bei g=365
w(n)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
20
40
60
80
100
120
n

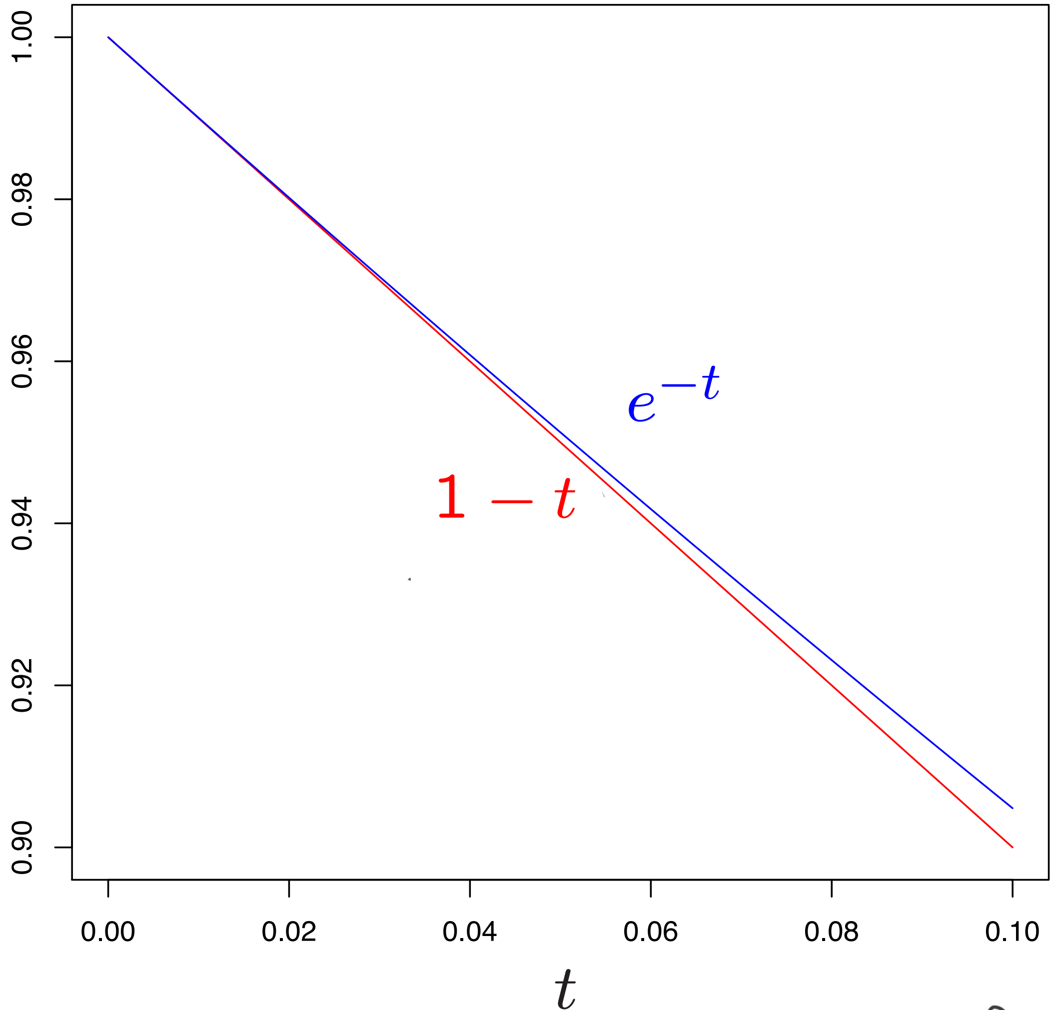
1. Approximation über die Linearisierung von exp

denke an die Faktoren $\left(1 - \frac{i}{g}\right)$

für $0 \leq t \leq 1$:



für $0 \le t \le 0.1$:



0 0.1

Lokale lineare Approximation von $t \mapsto e^{-t}$ bei $t = 0$:

$$e^{-t} = 1 - t + o(t) \qquad \text{für } t \to 0.$$

Dabei ist der Term $o(t)$ *von kleinerer Ordnung als* t, d.h. $\lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.

Salopp geschrieben:

$$e^{-t} \approx 1 - t \qquad \text{für kleine } t.$$

Damit bekommen wir für kleines $\frac{n}{g}$ die Approximation

$$w(n,g) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{g}\right) \approx \prod_{i=1}^{n-1} \exp\left(-\frac{i}{g}\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{g}\right) = \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2g}\right).$$

Also für kleines $\frac{n}{g}$, d.h. für $n \ll g$:

$$w(n, g) \approx \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2g}\right) \;.$$

Gibt es auch eine Näherungsformel,

die brauchbar ist für alle $n < g$?

In der Tat!

2. Die Stirling-Approximation

(Buch S. 4-5)

$$w(n,g) = \frac{g(g-1)\cdots(g-(n-1))}{g^n}$$

$$= \frac{g(g-1)\cdots(g-(n-1))}{g^n}\frac{(g-n)(g-n-1)\cdots 1}{(g-n)(g-n-1)\cdots 1}$$

$$w(n,g) = \frac{g!}{g^n(g-n)!}$$

mit $k! := 1 \cdot 2 \cdots k$, lies: k-Fakultät

Die Stirling-Formel:

$$k! \approx \sqrt{2\pi\, k}\, \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

$$k! \approx \sqrt{2\pi\, k}\,\left(\frac{k}{e}\right)^{k}$$

$$\frac{g!}{g^n (g-n)!} \approx \frac{1}{g^n}\sqrt{\frac{g}{g-n}}\,\frac{g^g}{(g-n)^{g-n}}\,\frac{e^{g-n}}{e^g}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{g-n}}\,e^{-n}\left(\frac{g}{g-n}\right)^{g-n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}}\,e^{-n}\left(1-\frac{n}{g}\right)^{n-g}$$

$$\frac{g!}{g^n(g-n)!} \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}}\, e^{-n} \left(1-\frac{n}{g}\right)^{n-g}$$

Wir formen jetzt den Ausdruck

$$e^{-n} \left(1-\frac{n}{g}\right)^{n-g}$$

weiter um. Ein Trick dabei ist es,

$\left(1-\frac{n}{g}\right)^{n-g}$ als $\exp\left((n-g)\ln\left(1-\frac{n}{g}\right)\right)$

zu schreiben

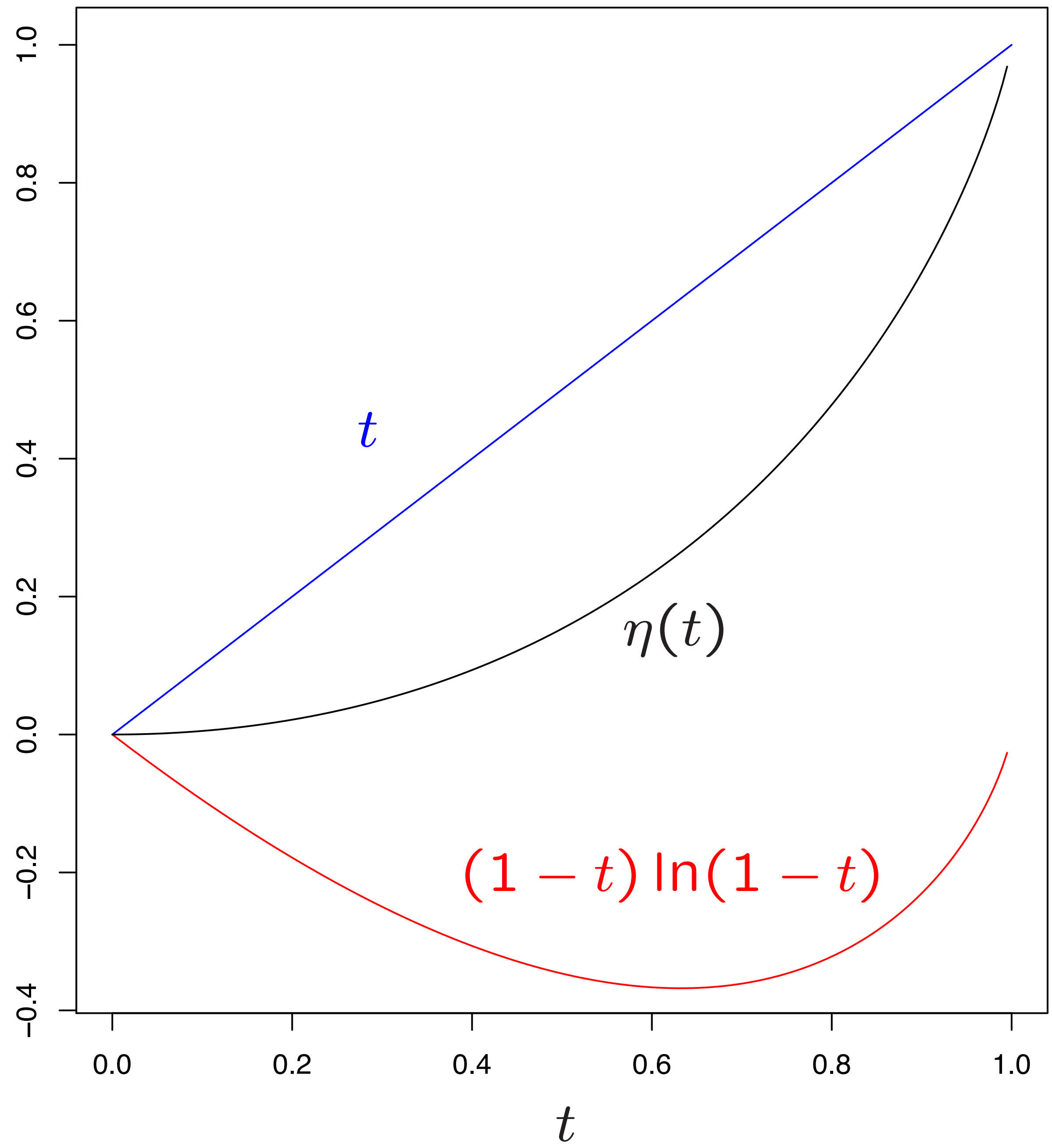
und dann die Beziehung $e^a e^b = e^{a+b}$ zu verwenden:

$$e^{-n}\left(1-\frac{n}{g}\right)^{n-g} = \exp\left(-n + (n-g)\ln\left(1-\frac{n}{g}\right)\right)$$

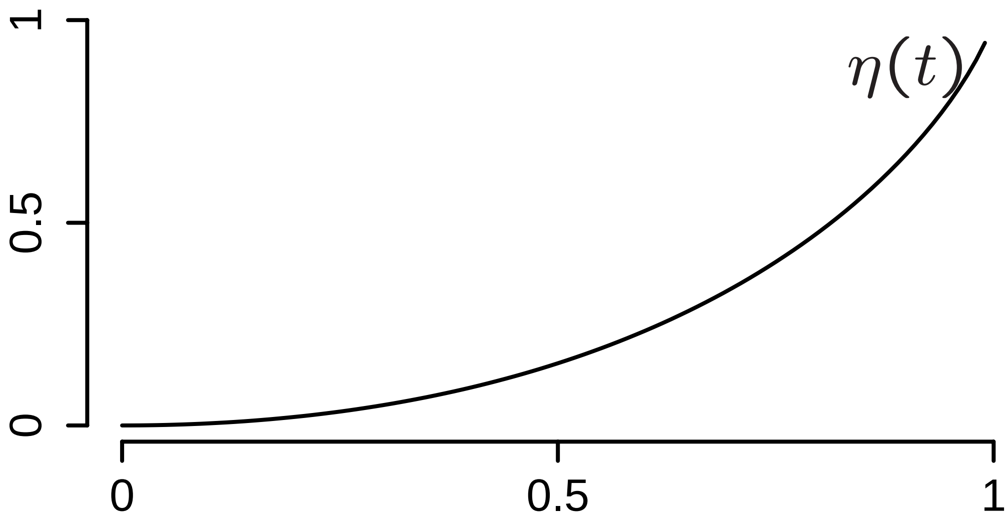
$$= \exp\left(-g\left(\frac{n}{g} + \left(1-\frac{n}{g}\right)\ln\left(1-\frac{n}{g}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-g\,\eta\left(\frac{n}{g}\right)\right)$$

mit $\quad \eta(t) := t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1.$


t
$\eta(t)$
$(1-t)\ln(1-t)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t

$$\eta(t) := t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1.$$



$$w(n,g) \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}} \exp\left(-g\,\eta\left(\frac{n}{g}\right)\right)$$

Stirling-Approximation

der Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit

Fazit:

Für $n < g$ ist $\quad w(n,g) \approx \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}} \exp\left(-g\,\eta\left(\dfrac{n}{g}\right)\right)$

mit $\eta(t) = t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1$

(Stirling-Approximation).

Für $n \ll g$ ist $\quad w(n,g) \approx \exp\left(-\dfrac{n(n-1)}{2g}\right)$

(Approximation über die Linearisierung von exp)

Für $n^2 \ll g$ ist $\quad w(n,g) \approx 1.$

Beispiel: $n = 25, g = 365$:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{g(g-1)\cdots(g-n+1)}{g^n} = 0.431300$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}} \exp\left(-g\,\eta\left(\frac{n}{g}\right)\right) = 0.431308$$

$$\exp\left(-\frac{n(n-1)}{2g}\right) = 0.4396$$