

1a. **Zufallsvariable, Ereigniss, Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen**

1b. **Wahrscheinlichkeit von Kollisionen** (bei der wiederholten rein zufälligen Wahl aus endlich vielen möglichen Ausgängen)

1b1. Vom Modell zur Formel

1b2. Approximationen der Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit

2a. **Diskret uniform verteilte Zufallsvariable**

2a1. Rein zufällige Permutationen

2a2. Rein zufällige Teilmengen einer festen Größe

2a3. Besetzungszahlen

2b. **Diskrete Zufallsvariable und ihre Verteilungen** (mit den Beispielen *Anzahl der Erfolge beim  $n$ -fachen  $p$ -Münzwurf* und *Besetzungen beim  $n$ -fachen  $(p_1, \dots, p_g)$ -Würfeln*)

2b1. Grundbegriffe: Abzählbare Additivität von Wahrscheinlichkeiten, Verteilung und Verteilungsgewichte, Zufällige Paare: gemeinsame Verteilung und Projektionen, Weiterverarbeitung von Zufallsvariablen und Transport von Verteilungen.

2b2. Die Anzahl der Erfolge: Vom Münzwurf zur Binomialverteilung

2b3: Zufällige Besetzungen: Vom Würfeln zur Multinomialverteilung

3a. **Der Erwartungswert** von diskreten reellwertigen Zufallsvariablen

3a1. Der Erwartungswert als gewichtetes Mittel

3a2. Die Transformationsformel für Erwartungswerte

3a3. Linearität des Erwartungswertes

3a4. Beispiele

3a5. Wie erlebt man den Erwartungswert? *Der Erwartungswert als Langzeitmittelwert.*

3b. **Indikatorvariable:** Rechnen mit Ereignissen und Wahrscheinlichkeiten

3b1. Ereignisse und ihre Indikatorvariablen

3b2. Rechnen mit Ereignissen

3b3. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

3b4. Die Einschluss-Ausschlussregel

3b5. Positivität und Monotonie des Erwartungswertes

4a. **Versuche, Erfolge, Wartezeiten:** Die Welt des  $p$ -Münzwurfs - von Bernoulli zu Poisson

4a1. Der fortgesetzte  $p$ -Münzwurf

4a2. Der Zeitpunkt des ersten Erfolgs und die geometrische Verteilung

4a3. Die Exponentialapproximation. *Oder: Münzwurf mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit: Wie lange dauert es bis zum ersten Erfolg?*

4a4. Die Poissonapproximation. *Oder: Münzwurf mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit: Wie ist die Anzahl der Erfolge verteilt bei einer großen Zahl von Versuchen?*

4b. **Zufallsvariable mit Dichten:** Grundbegriffe

- 4b1. Kontinuierlich uniform verteilte Zufallsvariable
- 4b2. Dichten auf  $\mathbb{R}$  (bzgl des Längenmaßes)
- 4b3. Verteilungsfunktionen

5a. **Zufallsvariable mit Dichten: Transformationen, Exponentialverteilung, Normalverteilung**

- 5a1. Transformationen
- 5a2. Exponentialverteilung
- 5a3. Erwartungswert und Transformationsformel
- 5a4. Die Standardnormalverteilung auf  $\mathbb{R}$

5b. **Unabhängigkeit**

- 5b1. Zwei (diskrete) Zufallsvariable
- 5b2. Produktformel für Erwartungswerte unabhängiger Zufallsvariabler
- 5b3. Mehrere Zufallsvariable
- 5b4. Unabhängigkeit von Ereignissen
- 5b5. Unabhängige Teilbeobachtungen abhängiger Inputs
- 5b6. Abhängige Verquickungen unabhängiger Bausteine

6a. **Varianz und Kovarianz**

- 6a1. Varianz und Standardabweichung: Elementare Eigenschaften
- 6a2. Summen unabhängiger Zufallsvariabler: *Varianz der Binomialverteilung,  $\sqrt{n}$ -Gesetz, Chebyshev-Ungleichung und Schwaches Gesetz der großen Zahlen*
- 6a3. Umrechnung von  $\mathbf{Var}[X]$ , Varianz der Poissonverteilung
- 6a4. Die Varianz einer Summe von Zufallsvariablen und die Kovarianz von zwei ZV'en
- 6a5. Die Varianz der hypergeometrischen Verteilung

6b. **Die Normalverteilung**

- 6a1. Von den Binomialgewichten zur Gauß'schen Glockenkurve
- 6a2. Die Standardnormalverteilung auf  $\mathbb{R}$  und ihre Schwestern  $N(\mu, \sigma^2)$
- 6a3. Intermezzo: Dichten von Produktform

7a. **Normalverteilung und Zentraler Grenzwertsatz**

- 7a1. Die Standardnormalverteilung auf  $\mathbb{R}^2$
- 7a2. Die Standardnormalverteilung auf  $\mathbb{R}^n$
- 7a3. Die Botschaft des Zentralen Grenzwertsatzes
- 7a4. Erlebnis: Via Monte Carlo zur Gaußschen Glockenkurve
- 7a5. Warum gerade  $e^{-cx^2}$ ?<sup>1</sup>

7b. **Korrelationskoeffizient und Regressionsgerade**

- 7b1. Die Varianz-Kovarianz-Ungleichung
- 7b2. Der Korrelationskoeffizient
- 7b3. Beste affin lineare Vorhersage: die Regressionsgerade
- 7b4. Korrelation und Regression: eine Illustration aus B. Ferebees *Statistik für Biologen*

---

<sup>1</sup>Die Teile 7a4 und 7a5 wurden in der Vorlesung nicht vorgetragen.

8a. **Zweistufige Zufallsexperimente**

8a1. Übergangswahrscheinlichkeiten

8a2. Von der Startverteilung mit den Übergangswahrscheinlichkeiten zur gemeinsamen Verteilung

8a3. Addieren von unabhängigen Zufallsvariablen – zweistufig aufgefasst

8a4. Bedingte Verteilung

8a5. Bedingte Verteilung mit  $X_2$  als erster Stufe: Die Formel von Bayes

8a6: Bedingte Wahrscheinlichkeiten

8b. **Mehrstufige Zufallsexperimente**

8b1. Mehrstufigkeit und Multiplikationsregel

8b2. Die Pólya-Urne

9a. **Markovketten 1**

9a1. Markovketten als spezielle mehrstufige Zufallsexperimente

9a2. Zerlegung nach dem ersten Schritt

9a3. Treffwahrscheinlichkeiten

9a4. Erwartete Treffzeiten

9b. **Markovketten 2**

9b1. Transport von Verteilungen

9b2. Gleichgewichtsverteilungen

9b3. Das Ehrenfest-Modell

10. **Schätzen mit Verlass: Konfidenzintervalle**

1. Schätzen von Anteilen

2. Schätzen des Erwartungswertes einer Verteilung auf  $\mathbb{R}$

a. Großer Stichprobenumfang  $n$ , *Normalapproximation*

b. Kleiner Stichprobenumfang  $n$ , *Student-Verteilung*<sup>2</sup>

3. Ein Konfidenzintervall für den Median<sup>2</sup>

11. **Kann das Zufall sein? Beispiele von statistischen Tests.**

1. Testen von Anteilen

a. Fishers exakter Test *mittels der hypergeometrischen Verteilung*

b. Normalapproximation

2. Tests der Hypothese  $\mu = \mu_0$

a. Normalapproximation (bei großem  $n$ )

b. Der t-Test<sup>2</sup>

3. Tests der Hypothese  $\mu_1 = \mu_2$  *bei ungepaarten Stichproben*<sup>2</sup>

a. Normalapproximation (bei großen  $n_1, n_2$ )<sup>2</sup>

b. Der t-Test für zwei ungepaarte Stichproben<sup>2</sup>

4. Der Wilcoxon-Test (*Oder: Wie untypisch ist die Lage der Ränge zweier Stichproben?*)<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Die Teile 10.2b, 10.3, 11.2b, 11.3 und 11.4 wurden in der Vorlesung nicht vorgetragen.