$X_1,\dots,X_{30}$ $\quad \sigma(X_i)=2$
$Y_1,\dots,Y_{50}$ unabh. $\quad \sigma(Y_i)=3$

$Var\left(\sum_i Z_i\right)=\sum_i Var(Z_i)+2\underbrace{\sum_{i<j} Cov(Z_i,Z_j)}_{=0}$

Z_i n-mal

$$\sigma(M_Z)=\frac{\sigma(Z_i)}{\sqrt{n}}$$

a) $$\sigma(M_X)=\sigma\left(\frac{1}{30}(X_1+\dots+X_{30})\right)=\sqrt{Var\left(\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}X_i\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{30^2}\cdot Var\left(\sum_{i=1}^{30}X_i\right)}\overset{\text{unabh.}}{=}\frac{1}{30}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{30}\underbrace{Var(X_i)}_{=Var(X_1)}}=\frac{1}{30}\cdot\sqrt{30\cdot \underbrace{Var(X_1)}_{2^2}}$$

$$=\frac{1}{30}\cdot\sqrt{30\cdot 4}=\sqrt{\frac{4}{30}}=\sqrt{\frac{2}{15}}$$

$$Var(a\cdot X)=a^2\cdot Var(X)$$
$$=E[(a\cdot X-E[a\cdot X])^2]=E[a^2\cdot(X-E[X])^2]=a^2\cdot Var(X)$$

$$\sigma(M_Y)=\sqrt{Var\left(\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}Y_i\right)}=\frac{1}{50}\cdot\sqrt{50\cdot 3^2}=\sqrt{\frac{9}{50}}$$

$$\sigma(M_X-M_Y)=\sqrt{Var(M_X+(-M_Y))}\overset{\text{unabh.}}{=}\sqrt{\underbrace{Var(M_X)}_{\frac{2}{15}}+\underbrace{Var(-M_Y)}_{\frac{9}{50}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{15}+\frac{9}{50}}$$

$$Var(-X)=Var(X)$$
$$Var((-1)\cdot X)=(-1)^2\cdot Var(X)$$

b) M_X-M_Y $\qquad M_X-M_Y$ $\quad$ 95%
↳ 2σ-Regel

$$I=[M_X-M_Y-2\sigma(M_X-M_Y),\ M_X-M_Y+2\sigma(M_X-M_Y)]$$
$$=\left[M_X-M_Y-2\cdot\sqrt{\frac{2}{15}+\frac{9}{50}},\ M_X-M_Y+2\cdot\sqrt{\frac{2}{15}+\frac{9}{50}}\right]$$

---

2. X sei standard-exponentialverteilt, $Y := 3X + 5$.
a) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y.
b) Berechnen Sie
(i) für $t \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit, dass Y größer als t ausfällt,
(ii) eine Dichtefunktion f von Y.
c) Finden Sie (gerne ohne weitere Rechnung) den Wert des Integrals $\int_{\mathbb{R}} af(a)da$ für die in Aufgabenteil b) (ii) zu findende Funktion f.

Frage: Was ändert sich bei b) wenn X Exp(α)-verteilt?

$$F_X(z)=\begin{cases}1-e^{-\alpha z} & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

b) i) $$P(Y>t)=P(3X+5>t)=P\left(X>\frac{t-5}{3}\right)$$
$$=1-P\left(X\le\frac{t-5}{3}\right)=1-F_X\left(\frac{t-5}{3}\right)=\begin{cases}e^{-\alpha\cdot\frac{t-5}{3}} & (t\ge 5)\\ 1-0 & ;\ t<5\end{cases}$$

ii) $$F_Y(t)=1-e^{-\alpha\frac{t-5}{3}}\quad (t\ge 5)$$
$$f_Y(t)=-\left(-\alpha\frac{t-5}{3}\right)'\cdot e^{-\alpha\frac{t-5}{3}}=+\alpha\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{-\alpha\frac{t-5}{3}}$$
$$=+\frac{\alpha}{3}\cdot e^{-\alpha\frac{t-5}{3}}$$

$X \qquad F_X(z):=P(X\le z)$

18.S *Anwendungen der Transformationsformel.*
a) Berechnen Sie $\mathbf{E}[X^3]$ für ein standard-exponentialverteiltes X.

b) Finden Sie den Wert des Integrals $\int_0^1 |\ln x|^3\,dx$ ohne weitere Rechnung durch Verwenden der Transformationsformel für den Erwartungswert und des Wissens, dass für ein Unif([0, 1])-verteiltes U die Zufallsvariable $|\ln U|$ standard-exponentialverteilt ist .

c) Y sei eine standard-Rayleigh-verteilte Zufallsvariable, d.h. eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable mit Dichte $ae^{-a^2/2}\,da$, $a \ge 0$. Berechnen Sie $\mathbf{E}[Y]$. (Dabei dürfen Sie verwenden, dass für eine standard-normalverteilte Zufallsvariable Z gilt: $\mathbf{E}[Z^2] = 1$.)

Transformationsformel: X ZV

$$E[g(X)]=\int g(z)\,f_X(z)\,dz \quad \text{(kontinuierlich)}$$
$$\sum g(z)\cdot P(X=z) \quad \text{(diskret)}$$

---

2. X sei standard-exponentialverteilt. Berechnen Sie
a) die Verteilungsfunktion
b) die Dichte
c) den Erwartungswert
von $Y := e^{X/2}$.

Hinweis als Rechenhilfe: $e^{-2\ln b} = (e^{\ln b})^{-2} = ?$

$$F_X(z)=\begin{cases}1-e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$f_X(z)=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

c) $$E[Y]=E\left[e^{\frac{X}{2}}\right]\overset{\text{Trafo-Form.}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{z}{2}}\cdot f_X(z)\,dz$$
$$=\int_0^\infty e^{\frac{z}{2}}\cdot e^{-z}\,dz+\int_{-\infty}^0 0\,dz=\int_0^\infty e^{\frac{z}{2}-z}\,dz=\int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}}\,dz$$
$$=\left[-2e^{-\frac{z}{2}}\right]_0^\infty=0-\left(-2\cdot\underbrace{e^{-\frac{0}{2}}}_{1}\right)=0+2=2$$

$z\le 0$ $\quad$ $X\ge 0$ $\quad$ $z>0$

$$F_Y(z)=P(Y\le z)=P\left(e^{\frac{X}{2}}\le z\right)=P\left(\frac{X}{2}\le\ln(z)\right)$$
$$=P(X\le 2\ln(z))=\begin{cases}1-e^{-2\ln(z)} & ;\ 2\ln(z)\ge 0 \Leftrightarrow z\ge 1\\ 0 & ;\ 2\ln(z)<0 \Leftrightarrow z<1\\ 0 & ;\ z\le 0\end{cases}=\begin{cases}1-z^{-2} & z\ge 1\\ 0 & z<1\end{cases}$$

$$f_Y(z)=(F_Y(z))'=\begin{cases}-(-2)\cdot z^{-3} & z\ge 1\\ 0 & z<1\end{cases}=\begin{cases}2\cdot z^{-3} & z\ge 1\\ 0 & z<1\end{cases}$$

$$1-e^{-2\ln(z)}=1-\big(\underbrace{e^{\ln(z)}}_{z}\big)^{-2}$$

$$X=\sum_{i<j\in\{1,\dots,100\}}\underbrace{\mathbb{1}_{\{\text{Objekt } i \text{ kollidiert mit Objekt } j\}}}_{=:\ \mathbb{1}_{i,j}}$$

$$E[X]=E\left[\sum_{i<j}\mathbb{1}_{i,j}\right]=\sum_{i<j}E[\mathbb{1}_{i,j}]=\sum_{i<j}\frac{1}{10000}=\frac{\binom{100}{2}}{10000}$$

$$E[\mathbb{1}_{i,j}]=P(i \text{ und } j \text{ kollidieren})=\frac{1}{10000}$$

Obj. i $\quad$ Obj. j $\quad \binom{100}{2}$

$\frac{1}{10000}$

10000

$$\frac{10000}{10000\cdot 10000}$$

$10000\cdot 10000$
$=100000000$