Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 22. Januar 2021, 10 Uhr

Die Aufgaben N1 und N2 bieten zusätzliches Übungsmaterial.
Sie können in der Repetitoriumswoche und/oder im Moodle-Forum besprochen werden.

Leitfaden zur Abgabe der Übungsaufgaben: siehe "Ankündigungen" im Moodle Kurs

29.S. ***Kann das Zufall sein?*** In einer Urne befinden sich 1000 Kugeln, 600 davon rot. Aus der Urne wurden 400 Kugeln (ohne Zurücklegen) entnommen, 220 davon waren rot. Wir stellen die Hypothese auf den Prüstand, dass die Entnahme der Kugeln rein zufällig erfolgte. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Anteil der roten Kugeln in einer rein zufälligen Stichprobe mindestens so weit von seinem Erwartungswert abweicht wie der in den Daten beobachte? Verwenden Sie die Normalapproximation. (Der R-Befehl `pnorm` ist hilfreich.)

30.S. ***Bedingte Verteilungen.***

a) X_1 sei eine $\{1,2,3\}$ - wertige Zufallsvariable, X_2 sei eine $\{b,c,d\}$-wertige Zufallvariable und die Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte von (X_1, X_2) sei wie rechts angegeben.

	b	c	d
1	0.05	0.2	0.1
2	0.1	0.15	0.05
3	0.05	0.15	0.15

a) Bestimmen Sie die Gewichte der Verteilung
(i) ρ_1 von X_1 (ii) ρ_2 von X_2.

b) Die gemeinsame Verteilung lässt sich auffassen als Ergebnis eines zweistufigen Experiments
(i) mit X_1 als erster Stufe oder (ii) mit X_2 als erster Stufe.
Bestimmen Sie die zugehörigen Übergangsmatrizen P und Q.

c) Berechnen Sie
(i) $\mathbf{P}(X_1 \in \{1,2\} | X_2 = c)$ (ii) $\mathbf{P}(X_2 \in \{c,d\} | X_1 = 2)$ (iii) $\mathbf{P}(X_2 \in \{c,d\} | X_1 \in \{2,3\})$.

31. ***Bedingte Dichten.*** Wie in A21b) sei (X_1, X_2) das Koordinatenpaar eines im Einkeitskreis $\{(a_1, a_2) : a_1^2 + a_2^2 \le 1\}$ uniform verteilten zufälligen Punktes X. Finden Sie

a) die Dichte von (X_1, X_2),
b) die Dichte von X_1,
c) für $-1 < a_1 < 1$ die bedingte Dichte von X_2 gegeben $\{X_1 = a_1\}$.

32. ***Bayes'sches Aktualisieren.*** (Frei nach dem Eingangsbeispiel im 2. Vortrag der Ringvorlesung 2018/19[1])
Jemand führt einen Münzwurf vor. Aus gewissen Gründen kommt nur in Frage, dass er entweder die ganze Zeit eine faire 01-Münze verwendet, oder eine mit $p = 0.9$. Bevor er beginnt, schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er eine faire Münze verwendet, mit 0.8 ein. Wie aktualisieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine faire Münze handelt, nachdem
(i) beim ersten Wurf eine Eins
(ii) bei den ersten drei Würfen jeweils eine Eins
geworfen wurde?

N1. ***Zufälliger rekursiver Baum.*** In einem *verwurzelten Baum*, d.h. einem zyklenfreien, zusammenhängenden Graphen, in dem ein Knoten (nennen wir ihn $*$) als Wurzel ausgezeichnet ist, kann man die Knoten bekanntlich mit einer *Mutter-Tochter-Relation* ausstatten: κ ist die Mutter von κ', wenn κ und κ' benachbart sind und κ auf dem Weg von κ' zu $*$ liegt.

Wir wollen einen verwurzelten Baum mit $n+1$ Knoten *wohlbeschriftet* nennen, wenn seine Knoten bijektiv mit den Nummern $0, 1, \ldots, n$ beschriftet sind und jeder Knoten (außer $*$) eine größere Nummer hat als seine Mutter. Es sei S_n die Menge der wohlbeschrifteten, verwurzelten Bäume mit $n+1$ Knoten. Für gegebenes $t_n \in S_n$ sei $P(t_n, .)$ die Verteilung desjenigen wohlbeschrifteten Baumes T_{n+1}, der aus t_n dadurch entsteht, dass man den mit der Nummer $n+1$ beschriftetet Knoten zur Tochter eines aus t_n rein zufällig gewählten Knotens erklärt. Dadurch ist eine Übergangsmatrix auf $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$ erklärt.

[1] https://www.mathe-uni-ffm.de/ringvorlesung/algorithmen-maschinelles-lernen-quantencomputing

Zeigen Sie: In einem zweistufigen Zufallsexperiment mit uniform auf S_n verteilter erster Stufe und Übergangsmatrix P ist die zweite Stufe uniform auf S_{n+1} verteilt.

N2. ***Hellseherische Fähigkeiten - oder was?*** In zwei verschlossenen Schachteln liegen jeweils m bzw. n Euro, wobei man von m und n erst einmal nur weiß, dass es zwei verschiedene natürliche Zahlen sind. Lea behauptet: „Ich kenne eine Methode, mit der ich durch Öffnen einer rein zufällig ausgewählten Schachtel, ohne Öffnen der anderen Schachtel, mit Wahrscheinlichkeit $> 1/2$ richtig entscheide, ob das die Schachtel mit dem kleineren Betrag ist.“ Jakob ist bass erstaunt und kann das kaum glauben. Lea wird konkreter. „Sagen wir, in der geöffneten Schachtel sind X Euro. Ich werfe eine faire Münze so oft, bis zum ersten Mal Kopf kommt und wähle V als die Anzahl meiner Würfe. Ist $V > X$, dann sage ich, dass in der gewählten Schachtel der kleinere Betrag ist.“ Hat Lea recht?

Hinweis: *Eine* Möglichkeit des Vorgehens ist wie folgt: Sei $k := \min(m, n)$; laut Voraussetzung ist $n \neq m$. Zeigen Sie für die Ereignisse $E_1 := \{X = k\}$ und $E_2 := \{V > X\}$:
a) $\mathbf{P}(E_2|E_1) > \mathbf{P}(E_2)$.
b) Die beiden Indikatorvariablen I_{E_1} und I_{E_2} sind positiv korreliert.
c) $\mathbf{P}(E_1|E_2) > \mathbf{P}(E_1)$.

Alternativ können Sie die Wahrscheinlichkeit, richtig zu entscheiden, zerlegen nach den Ausgängen von X.

Zum Weiterdenken: Wie wesentlich ist es für die Zwecke des Beispiels, dass die “Vergleichs-Zufallsvariable” V geometrisch verteilt ist? Auf welche Eigenschaft der Verteilung von V kommt es hier an?