

**Musterlösung zu Übungsblatt 8**  
erstellt von Jonas Strauch und Pascal Neukirchner

**29.S. Kann das Zufall sein?**

Wir bezeichnen mit  $X$  die Anzahl der roten Kugeln bei 400-maligem Ziehen aus der Urne und  $X_i$  Indikator für das Ziehen einer roten Kugel im  $i$ -ten Zug ( $i \in \{1 \dots n = 400\}$ ).  $X$  ist also die Summe der  $X_i$ .

Wir ziehen ohne Zurücklegen und somit ist  $X$  hypergeometrisch zu Parametern  $n = 400$ ,  $g = r + b = 1000$  und  $r = 600$  verteilt.

Der Erwartungswert einer hypergeometrischen Verteilung ist gegeben durch  $\mathbf{E}[X] = n \frac{r}{r+b}$ . Der erwartete Anteil  $X/n$  der roten Kugeln hat wegen der Linearität den Erwartungswert  $\frac{r}{g} = \frac{600}{1000} = 0.6$

Die Varianz ist

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}[X] &= \mathbf{Var}[X_1 + \dots + X_n] \\ &= n \cdot \mathbf{Var}[X_1] - \frac{n(n-1)}{g-1} \mathbf{Var}[X_1] \\ &= n \cdot \frac{g-n}{g-1} \mathbf{Var}[X_1]\end{aligned}$$

Diese Herleitung hatten wir in Aufgabe 24 genauer betrachtet.

Die Varianz des Anteils ist dann

$$\mathbf{Var}[X/n] = \frac{1}{n^2} \mathbf{Var}[X] = \frac{1}{n} \frac{g-n}{g-1} \cdot \frac{r}{g} \left(1 - \frac{r}{g}\right) = 0.00036$$

Durch Wurzelziehen ergibt sich  $\sigma_{X/n} \approx 0.019$

220 rote Kugeln entsprechen einem Anteil von  $\frac{220}{400} = 0.55$ , also einer Abweichung vom Erwartungswert um 0.05. Die  $X_i$  sind zwar gleichverteilt, jedoch nicht unabhängig. Die Normalapproximation können wir hier trotzdem anwenden, da sie „fast unabhängig“ sind ( $\frac{n}{r+b} \ll 1$ ), die 0.05 Abweichung entspricht ungefähr 2.63 Standardabweichungen und so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0.85% für eine mindestens so große Abweichung.

**30.S. Bedingte Verteilungen.**

a)(i) Da die gemeinsame Verteilung von  $X_1$  und  $X_2$  in der Aufgabe angegeben ist, müssen wir für die Gewichte von  $X_1$  nur die Gewichte in der entsprechenden Zeile addieren. Demnach folgt:

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \sum_{y \in \{b,c,d\}} \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = y) = 0.05 + 0.2 + 0.1 = 0.35$$

$$\mathbf{P}(X_1 = 2) = \sum_{y \in \{b,c,d\}} \mathbf{P}(X_1 = 2, X_2 = y) = 0.1 + 0.15 + 0.05 = 0.3$$

$$\mathbf{P}(X_1 = 3) = \sum_{y \in \{b,c,d\}} \mathbf{P}(X_1 = 3, X_2 = y) = 0.05 + 0.15 + 0.15 = 0.35$$

(ii) Analog zum ersten Teil müssen wir diesmal nur über die Spalten der angegebenen Matrix der Verteilungsgewichte summieren:

$$\mathbf{P}(X_2 = b) = \sum_{y \in \{1,2,3\}} \mathbf{P}(X_1 = y, X_2 = b) = 0.05 + 0.1 + 0.05 = 0.2$$

$$\mathbf{P}(X_2 = c) = \sum_{y \in \{1,2,3\}} \mathbf{P}(X_1 = y, X_2 = c) = 0.2 + 0.15 + 0.15 = 0.5$$

$$\mathbf{P}(X_2 = d) = \sum_{y \in \{1,2,3\}} \mathbf{P}(X_1 = y, X_2 = d) = 0.1 + 0.05 + 0.15 = 0.3$$

b)(i) Nun wollen wir die gemeinsame Verteilung als zweistufiges Zufallsexperiment darstellen. Zunächst soll  $X_1$  die erste Stufe darstellen. Mit der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit und den Ergebnissen aus Aufgabenteil a(i) folgt:

$$\mathbf{P}(X_2 = b|X_1 = 1) = \frac{\mathbf{P}(X_2 = b, X_1 = 1)}{\mathbf{P}(X_1 = 1)} = \frac{0.05}{0.35} = \frac{1}{7}$$

$$\mathbf{P}(X_2 = c|X_1 = 1) = \frac{\mathbf{P}(X_2 = c, X_1 = 1)}{\mathbf{P}(X_1 = 1)} = \frac{0.2}{0.35} = \frac{4}{7}$$

$$\mathbf{P}(X_2 = d|X_1 = 1) = \frac{\mathbf{P}(X_2 = d, X_1 = 1)}{\mathbf{P}(X_1 = 1)} = \frac{0.1}{0.35} = \frac{2}{7}$$

$$\mathbf{P}(X_2 = b|X_1 = 2) = \frac{\mathbf{P}(X_2 = b, X_1 = 2)}{\mathbf{P}(X_1 = 2)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{P}(X_2 = c|X_1 = 2) = \frac{\mathbf{P}(X_2 = c, X_1 = 2)}{\mathbf{P}(X_1 = 2)} = \frac{0.15}{0.3} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{P}(X_2 = d|X_1 = 2) = \frac{\mathbf{P}(X_2 = d, X_1 = 2)}{\mathbf{P}(X_1 = 2)} = \frac{0.05}{0.3} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{P}(X_2 = b|X_1 = 3) = \frac{\mathbf{P}(X_2 = b, X_1 = 3)}{\mathbf{P}(X_1 = 3)} = \frac{0.05}{0.35} = \frac{1}{7}$$

$$\mathbf{P}(X_2 = c|X_1 = 3) = \frac{\mathbf{P}(X_2 = c, X_1 = 3)}{\mathbf{P}(X_1 = 3)} = \frac{0.15}{0.35} = \frac{3}{7}$$

$$\mathbf{P}(X_2 = d|X_1 = 3) = \frac{\mathbf{P}(X_2 = d, X_1 = 3)}{\mathbf{P}(X_1 = 3)} = \frac{0.15}{0.35} = \frac{3}{7}$$

Und damit erhalten wir die Übergangsmatrix  $P$ :

	$b$	$c$	$d$
1	$1/7$	$4/7$	$2/7$
2	$1/3$	$1/2$	$1/6$
3	$1/7$	$3/7$	$3/7$

(ii) Der Teil (ii) funktioniert analog zu (i), nur das wir diesmal die Ergebnisse aus a(ii) benötigen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 = 1|X_2 = b) &= \frac{\mathbf{P}(X_2 = b, X_1 = 1)}{\mathbf{P}(X_2 = b)} = \frac{0.05}{0.2} = \frac{1}{4} \\ \mathbf{P}(X_1 = 2|X_2 = b) &= \frac{\mathbf{P}(X_2 = b, X_1 = 2)}{\mathbf{P}(X_2 = b)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2} \\ \mathbf{P}(X_1 = 3|X_2 = b) &= \frac{\mathbf{P}(X_2 = b, X_1 = 3)}{\mathbf{P}(X_2 = b)} = \frac{0.05}{0.2} = \frac{1}{4} \\ \mathbf{P}(X_1 = 1|X_2 = c) &= \frac{\mathbf{P}(X_2 = c, X_1 = 1)}{\mathbf{P}(X_2 = c)} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5} \\ \mathbf{P}(X_1 = 2|X_2 = c) &= \frac{\mathbf{P}(X_2 = c, X_1 = 2)}{\mathbf{P}(X_2 = c)} = \frac{0.15}{0.5} = \frac{3}{10} \\ \mathbf{P}(X_1 = 3|X_2 = c) &= \frac{\mathbf{P}(X_2 = c, X_1 = 3)}{\mathbf{P}(X_2 = c)} = \frac{0.15}{0.5} = \frac{3}{10} \\ \mathbf{P}(X_1 = 1|X_2 = d) &= \frac{\mathbf{P}(X_2 = d, X_1 = 1)}{\mathbf{P}(X_2 = d)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3} \\ \mathbf{P}(X_1 = 2|X_2 = d) &= \frac{\mathbf{P}(X_2 = d, X_1 = 2)}{\mathbf{P}(X_2 = d)} = \frac{0.05}{0.3} = \frac{1}{6} \\ \mathbf{P}(X_1 = 3|X_2 = d) &= \frac{\mathbf{P}(X_2 = d, X_1 = 3)}{\mathbf{P}(X_2 = d)} = \frac{0.15}{0.3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Und somit ist hier die Übergangsmatrix  $Q$ :

	$b$	$c$	$d$
1	$1/4$	$2/5$	$1/3$
2	$1/2$	$3/10$	$1/6$
3	$1/4$	$3/10$	$1/2$

c) Die ersten beiden gefragten Wahrscheinlichkeiten lassen sich aus den Matrizen  $P$  und  $Q$  ablesen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 \in \{1, 2\}|X_2 = c) &= \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10} \\ \mathbf{P}(X_2 \in \{c, d\}|X_1 = 2) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Die in (iii) gefragte Wahrscheinlichkeit berechnen wir aus den angegebenen gemeinsamen Verteilungsgewichten zusammen mit den in a(i) berechneten Verteilungsgewichten von  $X_1$  und der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{\mathbf{P}((X_1, X_2) \in \{2, 3\} \times \{c, d\})}{\mathbf{P}(X_1 \in \{2, 3\})} = \frac{0.15 + 0.05 + 0.15 + 0.15}{0.3 + 0.35} = \frac{0.5}{0.65} = \frac{10}{13}$$

### 31. Bedingte Dichten.

a) Wie auch im eindimensionalen Fall gilt für eine uniform auf  $A$  verteilte Zufallsvariable, dass ihre Dichte durch

$$f_{X_1, X_2}(a_1, a_2) da_1 da_2 = \begin{cases} \frac{1}{\text{vol}(A)} da_1 da_2 & (a_1, a_2) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

Der Flächeninhalt des Einheitskreises ist  $\pi$ , also

$$f_{X_1, X_2}(a_1, a_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & a_1^2 + a_2^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Die Dichtefunktion von  $X_1$  berechnet sich durch

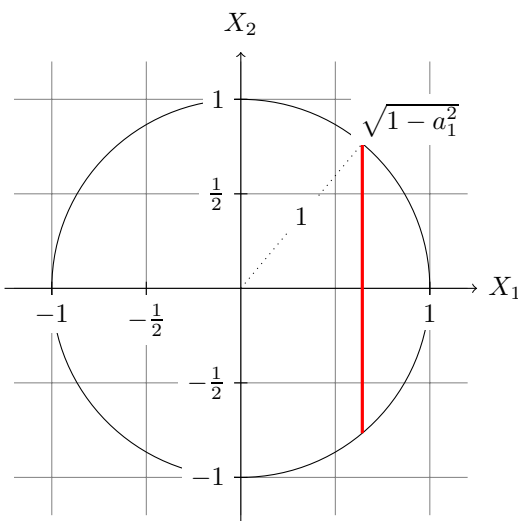
$$f_{X_1}(a_1) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1, X_2}(a_1, a_2) da_2$$

Für ein festes  $a_1$  ist die Dichte nur auf dem  $2\sqrt{1-a_1^2}$  langen Kreisabschnitt ungleich 0 (siehe Skizze), so ergibt sich

$$f_{X_1}(a_1) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1-a_1^2} & -1 \leq a_1 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) Die bedingte Dichtefunktion  $f_{X_2|X_1}(a_1, a_2)$  ergibt sich mit der Multiplikationsregel durch

$$f_{X_2|X_1}(a_1, a_2) = \frac{f_{X_1, X_2}(a_1, a_2)}{f_{X_1}(a_1)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-a_1^2}} & a_1^2 + a_2^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



### 32. Bayes'sches Aktualisieren.

(i) Diese Aufgabe lässt sich mit dem Satz von Bayes lösen. Wir nehmen nun an, dass die Münze mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8 fair ist, demnach würde unter dieser Hypothese "Eins" (oder sagen wir "Zahl") mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 geworfen werden. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.2 hingegen tritt "Zahl" mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 ein. Laut Aufgabenstellung kann man davon ausgehen, dass einer dieser beiden Fälle stimmen wird. Sei nun  $A$  das Ereignis, dass die Münze fair ist und  $B$  das Ereignis, dass im ersten Wurf ein Erfolg entsteht (d.h. Zahl geworfen wird), dann ergibt sich:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A, B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{0.8 \cdot 0.5}{0.8 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.9} \approx 0.69$$

(ii) Dieser Aufgabenteil funktioniert ganz analog zu (i), nur diesmal wird das Ereignis  $C$ , dass dreimal hintereinander Zahl geworfen wird, betrachtet:

$$\mathbf{P}(A|C) = \frac{\mathbf{P}(A, C)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{0.8 \cdot 0.5^3}{0.8 \cdot 0.5^3 + 0.2 \cdot 0.9^3} \approx 0.41$$

### N1. Zufälliger rekursiver Baum.

Die Idee hier erinnert an Aufgabe 6.

Aus jedem Baum mit  $n$  Knoten können  $n$  verschiedene Bäume mit  $n + 1$  Knoten entstehen wenn der neue Knoten einfach hinzugefügt wird.  $n + 1$  ist größer als alle schon im Baum vorhandenen Zahlen, egal an welchen Mutterknoten er angehängt wird verletzt er also nicht die Ordnung, da die Kinder eines Knotens nicht geordnet sind (wie z.B. rechtes und linkes Kind eines Binärbaums) gibt es aber pro gewähltem Mutterknoten auch nur eine Möglichkeit.

Hier ist ein formales Argument: Sei  $t_{n+1}$  ein Element aus  $S_{n+1}$  und sei  $t_n$  dasjenige Element aus  $S_n$ , welches dadurch entsteht, dass man den mit  $n + 1$  beschrifteten Knoten aus  $S_{n+1}$  entfernt. Es bezeichne  $T_n$  eine auf  $S_n$  uniform verteilte Zufallsvariable, und  $T_{n+1}$  diejenige Zufallsvariable, die entsteht, wenn man  $T_n$  als erste Stufe und  $P$  als Übergangsmatrix verwendet. Dann gilt

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = t_{n+1}) = \mathbf{P}(T_n = t_n, T_{n+1} = t_{n+1}) \quad (1)$$

$$= \mathbf{P}(T_n = t_n)P(t_n, t_{n+1}) = \frac{1}{\#S_n} \frac{1}{n+1} \quad (2)$$

wobei die erste Gleichheit aus der Gleichheit der Ereignisse  $\{T_{n+1} = t_{n+1}\}$  und  $\{T_n = t_n, T_{n+1} = t_{n+1}\}$  folgt; die letzte Gleichheit folgt aus der Definition der Übergangsmatrix  $P$ .

Ein weiteres Argument für die uniforme Verteilung ergibt sich durch die Möglichkeit, einen Baum mit  $n$  Knoten eineindeutig durch eine Permutation der Zahlen 1 bis  $n$  zu identifizieren (Preorder Traversierung wobei Geschwisterknoten absteigend sortiert werden), das Hinzufügen eines Knotens entspricht so dem Algorithmus aus Aufgabe 6 a)

### N2. Hellseherische Fähigkeiten - oder was?

a) Zunächst ein paar Vorüberlegungen. Die Zufallsvariable  $X$  kann neben dem Minimum  $k$  auch das Maximum der Menge  $\{m, n\}$  annehmen, dieses wird im Folgenden als  $l$  bezeichnet. Zudem ist der Zeitpunkt des ersten Erfolges im Münzwurf bekanntlich geometrisch verteilt und es kann angenommen werden, dass beide Schachteln mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 von Lea gewählt werden. Nun können wir bereits die ersten Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$$\mathbf{P}(E_2|E_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\mathbf{P}(E_2) = \mathbf{E} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^X \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^l < \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Insgesamt folgt somit die Behauptung:

$$\mathbf{P}(E_2|E_1) > \mathbf{P}(E_2)$$

b)

$$\mathbf{Cov}[I_{E_1}, I_{E_2}] = \mathbf{E}[I_{E_1} \cdot I_{E_2}] - \mathbf{E}[I_{E_1}] \cdot \mathbf{E}[I_{E_2}] = \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) - \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2)$$

Mit der Multiplikationsregel ergibt sich weiter

$$= \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2|E_1) - \mathbf{P}(E_1)\mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_1)(\mathbf{P}(E_2|E_1) - \mathbf{P}(E_2)).$$

Man sieht: Die positive Korreliertheit von  $I_{E_1}$  und  $I_{E_2}$  ist äquivalent zur Gültigkeit der Ungleichung in a).

Aus der Symmetrie der Kovarianz folgt, dass dies auch äquivalent zur Ungleichung in c) ist.

Somit wissen wir nun also letztendlich, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der gewählten Schachtel der kleinere Betrag steckt steigt, sofern das Ereignis  $E_2$  eingetreten ist, d.h. Lea hat also mit ihrer Behauptung recht.

Schließlich kann man als Antwort zur letzten Fragestellung sagen, dass es wichtig ist, dass wir für diese Aufgabe eine Verteilung wählen, sodass jede natürliche Zahl ein strikt positives Gewicht erhält, und dies erfüllt die geometrische Verteilung. Würde man z. B. eine Verteilung wählen, die auf einer endlichen Menge  $\{1, \dots, g\}$  konzentriert ist, dann wäre  $\mathbf{P}(E_2) = 0$  für  $m, n > g$ , und  $P(E_1|E_2)$  wäre gar nicht definiert. Umgekehrt funktioniert das Vorgehen für jede Zufallsvariable  $V$  mit  $\mathbf{P}(V = a) > 0$  für alle  $a \in \mathbb{N}$ .