Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 18. Dezember 2020, 10 Uhr

Leitfaden zur Abgabe der Übungsaufgaben: siehe “Ankündigungen” im Moodle Kurs

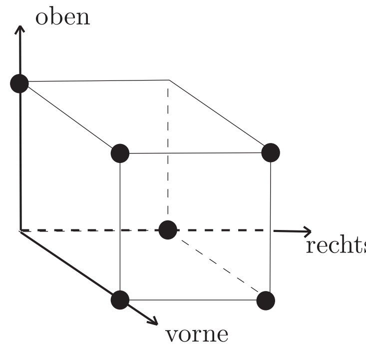
21.S. *Unabhängig? Unkorreliert?*

a) X_1 sei eine $\{1,2,3\}$ - wertige Zufallsvariable, X_2 sei eine $\{b,c,d\}$-wertige Zufallvariable und die Matrix der gemeinsamen Verteilungsgewichte von (X_1,X_2) sei

	b	c	d
1	6γ	7γ	10γ
2	12γ	14γ	19γ
3	18γ	21γ	31γ

Dabei ist γ so gewählt, dass die Summe der 9 Verteilungsgewichte gleich 1 ist.
(i) Warum sind X_1 und X_2 nicht unabhängig? (Sie dürfen dabei ein in V5b1 vorgestelltes Kriterium verwenden.)
(ii) Finden Sie eine (möglichst einfache) Verarbeitung h, sodass X_1 und $h(X_2)$ unabhängig sind.
(iii) Ändern Sie zwei der 9 Verteilungsgewichte in der angegebenen Matrix so ab, dass zwei Zufallsvariable mit *diesen* gemeinsamen Verteilungsgewichten unabhängig sind.
(iv) Hat es eine Sinn zu fragen, ob X_1 und X_2 unkorreliert snd?
b) (X_1,X_2) sei das Koordinatenpaar eines im Einkeitskreis $\{(a_1,a_2) : a_1^2+a_2^2 \le 1\}$ uniform verteilten zufälligen Punktes X. Sind X_1 und X_2 (i) unabhängig? (ii) unkorreliert?
(Hinweis zu (ii): (X_1,X_2) ist so verteilt wie $(-X_1,X_2)$ - warum?)

22. *Paarweise Unabhängigkeit von Ereignissen.*
$X=(X_1,X_2,X_3)$ mit Wertebereich $\{o,u\}\times\{\ell,r\}\times\{h,v\}$ beschreibe eine rein zufällige Wahl aus den 6 in der Skizze markierten Ecken des Würfels (die beiden nicht markierten Ecken bleiben tabu). Vier der markierten Ecken sind “vorne”, drei sind “rechts” und drei sind “oben”. Wir betrachten die Ereignisse



$E_1 := \{X_1 = o\} = \{X \text{ landet oben}\}$,
$E_2 := \{X_2 = r\} = \{X \text{ landet rechts}\}$,
$E_3 := \{X_3 = v\} = \{X \text{ landet vorne}\}$.
a) Bestimmen Sie
(i) $\mathbf{P}(E_1\cap E_2)$ (ii) $\mathbf{P}(E_1^c\cap E_2)$ (iii) $\mathbf{P}(E_1\cap E_2^c)$ (iv) $\mathbf{P}(E_1^c\cap E_2^c)$.
b) Bestimmen Sie die 2×2-Matrix der Verteilungsgewichte von (X_1,X_2). Sind E_1 und E_2 unabhängig? Sind sie positiv korelliert?
c) Gilt $\mathbf{P}(E_1\cap E_2\cap E_3)=\mathbf{P}(E_1)\cdot\mathbf{P}(E_2)\cdot\mathbf{P}(E_3)$?

23. *Die Standardabweichung der zufälligen Trefferquote.* In der Stunde Eins haben wir den Anteil p einer Teilfläche F an einer Gesamtfläche G dadurch geschätzt, dass wir n Punkte rein zufällig in G geworfen und als Schätzer $\hat{p}$ die relative Treffzahl von F (d.h. den Qotienten aus der Anzahl der Treffer und der Anzahl der Versuche) genommen haben. Berechnen Sie die Standardabweichung von $\hat{p}$, wenn der tatsächliche Wert von p gleich $1/5$ ist. Was ergibt sich für (i) $n=100$, (ii) $n=400$, (iii) $n=1600$?

24.S. *Ziehen so lange das Zeug hält.* Wir beschäftigen uns wieder mit dem Wald aus A11 b) und A13. Die Gesamtanzahl der Bäume sei $g=100$, und $T_1,\dots,T_{100}$ seien die nacheinander rein zufällig aus dem Wald entfernten (“ohne Zurücklegen gezogenen”) Bäume.[1] Wir setzen $X_i := h(T_i)$, die Höhe des i-ten gezogenen Baumes.
a) Berechnen Sie $\sigma^2 := \mathbf{Var}[X_1]$.
b) Welche Werte kann die Zufallsvariable $Y := X_1+\dots+X_{100}$ annehmen?
c) Warum ist das zufällige Paar (T_5,T_{26}) so verteilt wie (T_1,T_2)? Warum ist das zufällige Paar (X_5,X_{26}) so verteilt wie das zufällige Paar (X_1,X_2)? Warum ist $\mathbf{Cov}[X_5,X_{26}]=\mathbf{Cov}[X_1,X_2]$?
d) Drücken Sie die Summe $\sum_{i=1}^{g}\mathbf{Var}[X_i]+2\sum_{1\le i<j\le g}\mathbf{Cov}[X_i,X_j]$ durch g, σ^2 und $\mathbf{Cov}[X_1,X_2]$ aus.
e) Verwenden Sie b) und d), um $\mathbf{Cov}[X_1,X_2]$ durch σ^2 und g auszudrücken.

[1] Wenn wir uns die Bäume mit $1,\dots,100$ nummeriert denken, entspricht damit $(T_1,\dots,T_{100})$ einer rein zufälligen Permutation von $1,\dots,100$.