

## Musterlösung zu Übungsblatt 5

erstellt von Alexander Dimitrov

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Vorlage: Jan Stricker

### 17. Transformationen von Unif[0,1].

Zur Erinnerung:  $U$  ist eine auf dem Intervall  $(0,1)$  uniform verteilte Zufallsvariable.

a) Es sei 1 der Erfolg und 0 der Misserfolg beim Münzwurf.

Wir teilen das Intervall  $(0,1)$  in 8 kleinere Intervalle

$I_1 = (0, \frac{1}{8})$ ,  $I_2 = [\frac{1}{8}, \frac{2}{8})$ ,  $I_3 = [\frac{2}{8}, \frac{3}{8})$ ,  $I_4 = [\frac{3}{8}, \frac{4}{8})$ ,  $I_5 = [\frac{4}{8}, \frac{5}{8})$ ,  $I_6 = [\frac{5}{8}, \frac{6}{8})$ ,  $I_7 = [\frac{6}{8}, \frac{7}{8})$  und  $I_8 = [\frac{7}{8}, 1)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass  $U$  in ein Intervall  $[a, b] \subset (0,1)$  fällt, ist gegeben durch

$$\mathbf{P}(U \in [a, b]) = \frac{b-a}{1-0} = \frac{b-a}{1}.$$

Also gilt:

$$(*) \mathbf{P}(U \in I_k) = \frac{k}{8} - \frac{k-1}{8} = \frac{1}{8} \quad \text{mit } k = 1, \dots, 8$$

Wir können uns auch überlegen, dass...

$\forall x \in I_1$  gilt  $(z_1(x), z_2(x), z_3(x)) = (0, 0, 0)$

$\forall x \in I_2$  gilt  $(z_1(x), z_2(x), z_3(x)) = (0, 0, 1)$

$\forall x \in I_3$  gilt  $(z_1(x), z_2(x), z_3(x)) = (0, 1, 0)$

$\forall x \in I_4$  gilt  $(z_1(x), z_2(x), z_3(x)) = (0, 1, 1)$

$\forall x \in I_5$  gilt  $(z_1(x), z_2(x), z_3(x)) = (1, 0, 0)$

$\forall x \in I_6$  gilt  $(z_1(x), z_2(x), z_3(x)) = (1, 0, 1)$

$\forall x \in I_7$  gilt  $(z_1(x), z_2(x), z_3(x)) = (1, 1, 0)$

$\forall x \in I_8$  gilt  $(z_1(x), z_2(x), z_3(x)) = (1, 1, 1)$

Diese Tupel decken alle Möglichkeiten beim dreifachen fairen Münzwurf, somit folgt mit (\*) die Behauptung.

b) Wir sollen eine monoton wachsende Abbildung  $h : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$  finden, so dass  $h(U)$

(i) Bin( $2, \frac{1}{2}$ )-verteilt ist

Es muss gelten:

$$\mathbf{P}(h(U) = 0) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}(h(U) = 1) = \frac{1}{2} \text{ und } \mathbf{P}(h(U) = 2) = \frac{1}{4}$$

Wegen der uniformen Verteilung von  $U$  auf  $(0,1)$  gilt:

$$\mathbf{P}(U \in (0, \frac{1}{4})) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}(U \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4})) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ und } \mathbf{P}(U \in [\frac{3}{4}, 1)) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Wir setzen

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (0, \frac{1}{4}) \\ 1 & \text{für } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \\ 2 & \text{für } x \in [\frac{3}{4}, 1) \end{cases}$$

Somit gilt  $\forall x, y \in (0,1)$  mit  $x \leq y$   $h(x) \leq h(y)$ , also ist die Funktion monoton steigend.

Des Weiteren gilt:

$$\mathbf{P}(h(U) = 0) = \mathbf{P}(U \in (0, \frac{1}{4}))$$

$$\mathbf{P}(h(U) = 1) = \mathbf{P}(U \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}))$$

$$\mathbf{P}(h(U) = 2) = \mathbf{P}(U \in [\frac{3}{4}, 1))$$

$h(U)$  ist Bin( $2, \frac{1}{2}$ )-verteilt.

(ii) standard-exponentialverteilt ist:

Es muss gelten:

$$\mathbf{P}(h(U) \leq b) = 1 - e^{-b} \quad \forall b \in [0, \infty)$$

Wähle  $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(x) = -\ln(1-x)$ . Diese Funktion ist monoton steigend, da gilt:

$$h'(x) = -1 \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \geq 1 > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

Die Verteilungsfunktion ist gegeben mit  $\mathbf{P}(h(U) \leq b) = \mathbf{P}(-\ln(1-U) \leq b)$   
 $= \mathbf{P}(\ln(1-U) \geq -b) = \mathbf{P}(1-U \geq e^{-b}) = \mathbf{P}(U \leq 1 - e^{-b}) = 1 - e^{-b}$  für  $b \in [0, \infty)$

### 18.S Anwendungen der Transformationsformel

a)

Gesucht ist  $\mathbb{E}[X^3]$  für ein standard-exponentialverteiltes  $X$ . D.h. für die Dichtefunktion  $f$  von  $X$  gilt  $f(x) = e^{-x} \forall x \in [0, \infty)$

Aus der Vorlesung ist bekannt:

1.  $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
2. Für  $X \exp(1)$ -verteilte ZVe ist  $Var[X] = 1$  und  $\mathbb{E}[X] = 1$
3. für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  mit Dichtefunktion  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$  zusammen mit einer stetigen Funktion  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_a^b h(x)f(x) dx$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^3] &= \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx \stackrel{\text{(Partielle Integration)}}{=} [-x^3 e^{-x}]_0^\infty - \int_0^\infty -3x^2 e^{-x} dx \stackrel{(*)}{=} 3 \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx \\ &= 3\mathbb{E}[X^2] = 3(Var(X) + \mathbb{E}[X]^2) = 3(1 + 1^2) = 6 \end{aligned}$$

(\*)Der Term  $[-x^3 e^{-x}]_0^\infty$  wird 0 (für  $x = 0$  ist es klar, wir müssen nur  $x = \infty$  überprüfen)

Dazu erinnern wir uns, dass die Exponentialreihe  $\exp(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$  größer ist als  $x^4/4!$ , und somit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0 \text{ gilt.}$$

b)

Gesucht ist  $\int_0^1 |\ln(x)|^3 dx$  ohne weitere Rechnungen.

Es gilt laut Hinweis, dass für ein  $\text{Unif}(0,1)$ -verteiltes  $U$  die Zufallsvariable  $Y := |\ln(U)|$   $\text{Exp}(1)$ -verteilt ist.

$$\text{Aus Teil a) folgt } 6 = \mathbb{E}[Y^3] = \mathbb{E}[|\ln(U)|^3] \stackrel{\text{(Transformationsformel)}}{=} \int_0^1 |\ln(x)|^3 dx$$

Für alle, die das sehen ollen, ist hier auch der umständliche Weg nochmal nachgerechnet:

$$\begin{aligned} 6 &= \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = \int_{-\ln(1)}^{-\ln(0)} x^3 e^{-x} dx = \int_1^0 (\ln(x))^3 e^{\ln(x)} \frac{-1}{x} dx = \int_1^0 -\ln(x)^3 x \frac{-1}{x} dx = \\ &= - \int_1^0 -\ln(x)^3 dx = \int_0^1 -\ln(x)^3 dx = \int_0^1 |\ln(x)|^3 dx. \end{aligned}$$

c)

Gesucht ist  $\mathbb{E}[Y]$  für die Zufallsvariable  $Y$ , welche die Dichte  $ae^{-\frac{a^2}{2}}$  für  $a \geq 0$  besitzt. Für  $Z$  standardnormalverteilt gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}[Z^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ \mathbb{E}[Y] &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &\stackrel{\text{(Symmetrie an der y-Achse)}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{E}[Z^2] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

**19. Noch einmal: Transformationen von Unif[0,1].**

$U$  ist eine Unif(0,1)-verteilte Zufallsvariable.

Es sei  $X := \frac{1}{U^2}$

(i) Die Dichtefunktion von  $U$  ist bekanntlich gegeben durch  $f(x) = 1$  für  $x \in (0, 1)$ . Der Erwartungswert ist gegeben durch die Transformationsformel mit

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{U^2}\right] = \int_0^1 \frac{1}{x^2} f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_0^1 = -1 - (-\infty) = \infty$$

(ii) Um die Verteilungsfunktion zu finden, welche gegeben ist durch  $F_X(b) = \mathbf{P}(X \leq b)$ , formen wir nach  $U$  um.

$$F_X(b) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{U^2} \leq b\right) = \mathbf{P}(U^2 \geq \frac{1}{b}) = \mathbf{P}(U \geq \frac{1}{\sqrt{b}}) = 1 - \mathbf{P}(U \leq \frac{1}{\sqrt{b}}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{b}} \quad \forall b \in [1, \infty)$$

(iii) Die Dichtefunktion  $f_X$  muss  $F_X(b) = \int_1^b f_X(a) da$  erfüllen.

Mit dem Hauptsatz der Integral- und Differenzialrechnung folgt, dass die Dichtefunktion  $f_X$  durch Ableiten der Verteilungsfunktion gegeben ist.

$$f_X(a) = F_X'(a) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)' = \frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}} \quad \forall a \in [1, \infty)$$

Anmerkung zur i):

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable  $X$  mit Dichtefunktion  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$  ist gegeben durch  $\mathbb{E}[X] = \int_a^b xf(x) dx$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} af_X(a) da = \int_1^{\infty} \frac{a}{2a^{\frac{3}{2}}} da = \int_1^{\infty} \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}} da = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} da = \frac{1}{2} [2\sqrt{x}]_1^{\infty} = \infty - 1 = \infty$$

## 20.S Normalverteilungsquantile und affin lineare Transformationen

a)

Es ist  $Z$  standardnormalverteilt und  $X = 5 + 0.1Z$  (\*)

Wie aus der Vorlesung bekannt ist, gilt für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $Z$ :

$$\mathbf{P}(-1 \leq Z \leq 1) \approx 0.68$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}(-0.1 \leq 0.1Z \leq 0.1) \approx 0.68$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}(5 - 0.1 \leq 5 + 0.1Z \leq 5 + 0.1) = \mathbf{P}(4.9 \leq X \leq 5.1) \approx 0.68$$

$$\mathbf{P}(-2 \leq Z \leq 2) \approx 0.95$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}(-0.2 \leq 0.1Z \leq 0.2) \approx 0.95$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}(5 - 0.2 \leq 5 + 0.1Z \leq 5 + 0.2) = \mathbf{P}(4.8 \leq X \leq 5.2) \approx 0.95$$

Der Befehl `qnorm(q)` gibt uns ein  $b \in \mathbb{R}$  mit  $\int_{-\infty}^b \varphi(x) dx = q$

Gesucht ist  $a \in \mathbb{R}^+$ , s.d.  $\int_{-a}^a \varphi(x) dx = 0.99$

$a = \text{qnorm}(0.995) = 2.576$  und  $-a = \text{qnorm}(0.005) = -2.576$  erfüllen unsere Bedingungen.

$$\mathbf{P}(-2.576 \leq Z \leq 2.576) \approx 0.99 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(4.7424 \leq X \leq 5.2576) \approx 0.99$$

analog zu a)

b)

Die Dichtefunktion einer Zufallsvariable  $X = \sigma Z + \mu$  für ein standardnormalverteiltes  $Z$  ist gegeben durch (Siehe VL5a AF5a4):

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Für die angegebenen Werte von  $\mu$  und  $\sigma$  gilt somit

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{0.02\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{0.02}}$$

c)

i) Wie man an den Intervallen aus a) ablesen kann, ist die Dichtefunktion von  $X$  um den Faktor 10 schmaler als die von  $Z$ .

Alternativ erkennt man den aus der Vorlesung bekannten Streckungsfaktor  $\sigma$  bei Transformationen der Form  $X = \sigma Z + \mu$  von standardnormalverteilten Zufallsvariablen  $Z$ , womit man auf das gleiche Ergebnis kommt.

ii) Das Maximum der Normalverteilung liegt beim Erwartungswert. Betrachtet man die Dichtefunktion, so kann man direkt den Wert des Maximums ablesen und zwar ist  $f_X(5) = \frac{1}{\sqrt{0.02\pi}}$  und  $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ . Somit ist das Maximum von  $f_X$  um den Faktor 10 höher als das Maximum von  $\varphi = f_Z$ .