Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 11. Dezember 2020, 10 Uhr

Leitfaden zur Abgabe der Übungsaufgaben: siehe “Ankündigungen” im Moodle Kurs

17. *Transformationen von* $\mathrm{Unif}[0,1]$.
Es sei U eine auf dem Intervall $(0,1) = \{a \in \mathbb{R} : 0 < a < 1\}$ uniform verteilte Zufallsvariable.

a) Bekanntlich lässt sich jede Zahl $a \in (0,1)$ in eindeutiger Weise schreiben als
$z_1(a)\frac{1}{2} + z_2(a)\frac{1}{4} + z_3(a)\frac{1}{8} + r(a), \quad$ mit $z_1(a), z_2(a), z_3(a) \in \{0,1\}$ und $0 \leq r(a) < 1/8$.
(Dabei sind $z_1(a), z_2(a), z_3(a)$ die ersten drei Stellen der Binärentwicklung von a.)
Begründen Sie: $(z_1(U), z_2(U), z_3(U))$ ist ein dreifacher fairer Münzwurf.

b) Finden Sie jeweils eine monoton wachsende Abbildung $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ so, dass $h(U)$
(i) $\mathrm{Bin}(2, \frac{1}{2})$-verteilt ist,
(ii) standard-exponentialverteilt ist.

18.S *Anwendungen der Transformationsformel.*
a) Berechnen Sie $\mathbf{E}[X^3]$ für ein standard-exponentialverteiltes X.

b) Finden Sie den Wert des Integrals $\int_0^1 |\ln x|^3 \, dx$ ohne weitere Rechnung durch Verwenden der Transformationsformel für den Erwartungswert und des Wissens, dass für ein $\mathrm{Unif}([0,1])$-verteiltes U die Zufallsvariable $|\ln U|$ standard-exponentialverteilt ist .

c) Y sei eine standard-Rayleigh-verteilte Zufallsvariable, d.h. eine $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable mit Dichte $ae^{-a^2/2}\, da$, $a \geq 0$. Berechnen Sie $\mathbf{E}[Y]$. (Dabei dürfen Sie verwenden, dass für eine standard-normalverteilte Zufallsvariable Z gilt: $\mathbf{E}[Z^2] = 1$.)

19. *Noch einmal: Transformationen von* $\mathrm{Unif}[0,1]$.
Es sei U eine auf dem Intervall $(0,1)$ uniform verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie
(i) den Erwartungswert
(ii) die Verteilungsfunktion
(iii) die Dichte
von $1/U^2$.

20. S *Normalverteilungsquantile und affin lineare Transformationen.*
Z sei standard-normalverteilt, $X := 5 + 0.1 \cdot Z$.

a) Bestimmen Sie ein um $\mathbf{E}[X]$ zentriertes Intervall, in welches X
(i) mit Wahrscheinlichkeit ≈ 0.68
(ii) mit Wahrscheinlichkeit ≈ 0.95
(iii) mit Wahrscheinlichkeit ≈ 0.99
fällt. Verwenden Sie bei (i) und (ii) Wissen aus der Vorlesung, und bei (iii) den R-Befehl `qnorm`.

b) Finden Sie die Dichte von X.

c) Um welchen Faktor ist
(i) die Dichtefunktion von X “schmäler” als die von Z?
(ii) das Maximum der Dichtefunktion von X höher als das Maximum der Dichtefunktion von Z?