Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 4. Dezember 2020, 10 Uhr

Leitfaden zur Abgabe der Übungsaufgaben: siehe “Ankündigungen” im Moodle Kurs

13.S *Erwartungswert des Stichprobenmittels beim Ziehen ohne Zurücklegen.* Wir betrachten die in Aufgabe 11b) beschriebene Population von Bäumen. T_1, T_2, T_3 seien drei nacheinander rein zufällig ohne Zurücklegen aus der Population gewählte Bäume.[1] Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $\frac{1}{3}(h(T_1) + h(T_2) + h(T_3))$, wobei $h(t)$ die Höhe des Baumes t sei.

14. *Wie wahrscheinlich ist eine so große Abweichung vom Erwartungswert?* In einer Urne befinden sich 30 rote und 20 blaue Kugeln. Es werden 15 Kugeln rein zufällig ohne Zurücklegen gezogen, R sei die Anzahl der roten Kugeln in der Stichprobe.

a) Bestimmen Sie die Menge der möglichen Ausgänge a von R mit $|a - \mathbf{E}[R]| \geq 6$.

b) Berechnen Sie $\mathbf{P}(|R - \mathbf{E}[R]| \geq 6)$

(i) per Hand

(ii) unter Verwendung des R-Befehls `sum(dhyper(. . . ))`. Finden Sie mittels des Befehls `?dhyper` heraus, was das mit der Aufgabenstellung zu tun hat, und finden Sie die passenden Summationsgrenzen.

15. *Die Wahrscheinlichkeit für Fixpunktfreiheit einer rein zufälligen Abbildung.* Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine n-fache rein zufällige Wahl aus $\{1, \ldots, n\}$. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ betrachten wir das Ereignis $E_i := \{X_i = i\}$.

a) Berechnen Sie $\mathbf{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$ auf zwei Arten, und zwar

i) mit der Regel von der Gegenwahrscheinlichkeit als $1 - \mathbf{P}(E_1^c \cap \cdots \cap E_n^c)$,

ii) mit der Einschluss-Ausschlussformel.

b) Formen Sie den als Ergebnis von a) (i) erhaltenen Term so um, dass sich der Term ergibt, den man als Ergebnis in (ii) erhält.

c) Was ergibt sich für die in a) gefragte Wahrscheinlichkeit im Grenzwert $n \to \infty$?

16.S *Poisson-und Exponentialapproximation.* Es sein n eine natürliche Zahl. Wir betrachten ein Quadrat Q bestehend aus $n \times n$ Pixeln; die Pixel seien in natürlicher Weise durch ihre Koordinaten (k, ℓ), $1 \leq k, \ell \leq n$ nummeriert. Die Menge $D := \{(k, k) : 1 \leq k \leq n\}$ bezeichnen wir als die *Diagonale* des Quadrats. Nun sei $(X_1, X_2, \ldots)$ eine fortgesetzte rein zufällige Wahl aus Q.

a) Berechnen Sie für großes n mit der Poissonapproximation eine Näherung für die Wahrscheinlichkeit, dass die Diagonale

(i) in den ersten $2n$ Würfen kein einziges Mal getroffen wird

(ii) in den ersten $3n$ Würfen mindestens einmal getroffen wird

b) Sei $n = 1000$; es werde jede Millisekunde ein Pixel gewählt. Berechnen Sie mit der Exponentialapproximation eine Näherung für die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeitpunkt, zu dem die Diagonale das erste Mal getroffen wird, im Intervall zwischen zwei und drei Sekunden nach Beginn des Experiments liegt.

[1] Aus dem Adjektiv “rein” wird dabei klar, dass der Aufgabenteil (i) von Aufgabe 11b) gemeint ist.