Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik"

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 27. November 2020, 10 Uhr

Leitfaden zur Abgabe der Übungsaufgaben: siehe "Ankündigungen" im Moodle Kurs

9. *Von der Multinomialverteilung zurück zur Binomialverteilung.*

$X = (X_1, X_2, X_3)$ sei multinomialverteilt mit Parametern 10; $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}$. Wie ist X_1+X_2 verteilt? Argumentieren Sie

a) anschaulich überzeugend, ohne rechnerischen Beweis, indem Sie $X_1 + X_2$ als Summe von Indikatorvariablen darstellen,

b) formal durch Berechnen der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_1 + X_2 = k\}$ mittels Summation über die Verteilungsgewichte aller Besetzungen $(b_1, b_2, b_3) \in S_{10,3}$ mit $b_1 + b_2 = k$. Dabei ist der Binomische Lehrsatz hilfreich!

10. S. *Wahrscheinlichkeit für "genau pari-pari".*

$X = (X_1, X_2, X_3)$ sei multinomialverteilt mit Parametern $3n$; $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

a) Berechnen Sie $\mathbf{P}((X_1, X_2, X_3) = (n, n, n))$

i) für $n = 2$ und für $n = 3$ jeweils exakt mit der Formel für die Multinomialgewichte,

ii) für allgemeines n näherungsweise mit der Stirling-Formel[1], und stellen Sie die Ergebnisse für $n = 2$ und $n = 3$ den exakten Ergebnissen aus a) gegenüber.

b) Wo finden Sie in der Ausgabe des im Moodle-Kurs bereitgestellten R-Programms *deFinettiDreieck.R* eine Monte-Carlo-Näherung für das Ergebnis aus a) mit $n = 3$?

11. *Erwartungswert beim zufälligen Ziehen - mit und ohne Verzerrung.*

a) Es sei g eine natürliche Zahl.

(i) U sei uniform verteilt auf $\{1, \dots, g\}$. Berechnen Sie $\mathbf{E}[U]$.

(ii) X sei eine $\{1, \dots, g\}$- wertige Zufallsvariable, deren Verteilungsgewichte $\rho(a)$ proportional zu $\frac{1}{a}$ sind für $a = 1, \dots, g$. Berechnen Sie $\mathbf{E}[X]$, ausgedrückt durch g und $h_g := \sum_{a=1}^{g} \frac{1}{a}$.

b) In einer Population von g Bäumen hat ein Anteil von 40% die Höhe von einem Meter, ein Anteil von 30% die Höhe von 2 Metern und der Rest die Höhe von 3 Metern.

(i) Was ist der Erwartungswert der Höhe eines rein zufällig aus der Population gewählten Baumes?

(ii) Was ist der Erwartungswert der Höhe eines zufällig aus der Population gewählten Baumes, wenn die Wahrscheinlichkeit, einen Baum zu wählen, proportional zu dessen Höhe ist?

12.S *Der Charme der Austauschbarkeit.*

a) Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$, und $(X_1, \dots, X_{4n})$ sei eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, 4n$ (in unserer üblichen Darstellung als Liste der Funktionswerte von $1, \dots, 4n$ der gewählten bijektiven Abbildung von $\{1, \dots, 4n\}$ auf sich).

(i) Ist X_2 eine auf $\{1, \dots, 4n\}$ uniform verteilte Zufallsvariable? Begründen Sie Ihre Antwort!

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $\sum_{i=1}^{3} I_{\{X_i \leq n\}}$.

b) 40 Kugeln, von denen 10 die Farbe rot, 10 die Farbe blau, 10 die Farbe grün und 10 die Farbe schwarz haben, werden rein zufällig und ohne Zurücklegen aus einer Urne gezogen.

(i) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel rot ist?

(ii) Was ist der Erwartungswert der Indikatorvariable des Ereignisses, dass die dritte gezogene Kugel blau ist?

(iii) Jemand fragt Sie: "Was ist der Erwartungswert der Farbe der dritten gezogenen Kugel?" Warum ist diese Frage schlecht gestellt?

(iv) Was ist der Erwartungswert der Anzahl der roten Kugeln in den ersten drei Zügen?

[1] siehe Vorlesung 1b2 Folie 11