

Inverse Probleme und ihre Anwendungen

Bastian von Harrach

<http://numerical.solutions>

Institut für Mathematik, Goethe-Universität Frankfurt am Main

12. Jahrestreffen

von Alumni, Studierenden und Dozenten der Mathematik,
Goethe-Universität Frankfurt am Main, 16. November 2019

Einführung in inverse Probleme

Der Laplacesche Dämon

*”Une intelligence qui ...
connaîtrait toutes les forces dont la nature ...
et la situation ... des êtres qui la composent,
... rien ne serait incertain pour elle,
et l’avenir comme le passé,
serait présent à ses yeux.”*

– Pierre Simon Laplace (*Essai philosophique sur les probabilités*, 1814)



*Eine Intelligenz, die alle Kräfte und die Lage aller Objekte kennt, ...
nichts wäre für sie ungewiss,
Zukunft und Vergangenheit lägen klar vor ihren Augen.*

Wissenschaftliches Rechnen / Simulation

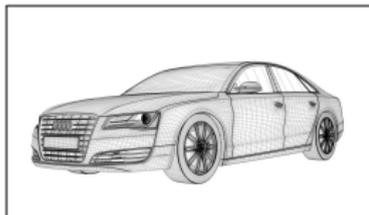
Wissenschaftliches Rechnen (Computational Science):

Sind alle nötigen Parameter bekannt, dann kann der Ausgang eines Experiments numerisch vorhergesagt werden (durch Lösung der zugrundeliegenden mathematischen Gleichungen).

Ziele:



Vorhersage



Optimierung



Identifikation

Wissenschaftliches Rechnen / Simulation

Generisches Simulationsproblem:

Gegeben Eingabeparameter x , berechne Ergebnis $y = F(x)$.

$x \in X$: Eingabe / Parameter

$y \in Y$: Ergebnis / Messung

$F : X \rightarrow Y$: funktionale Beziehung / Modell

Ziele:

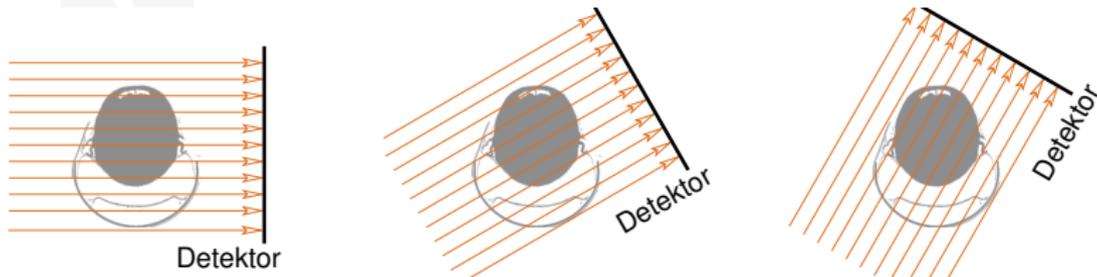
- ▶ **Vorhersage:** Gegeben x , berechne $y = F(x)$.
- ▶ **Optimierung:** Bestimme x , so dass $F(x)$ optimal ist.
- ▶ **Inversion/Identifikation:** Gegeben $F(x)$, bestimme x .

Beispiel: Computertomographie (CT)

Nobelpreis für Physiologie oder Medizin 1979:
Allan M. Cormack und Godfrey N. Hounsfield
(Fotos: Copyright ©The Nobel Foundation)



Idee: Röntgen den Patienten aus mehreren Richtungen



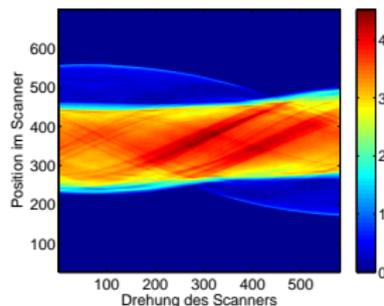
Computertomographie (CT)

(Bild: Hanke-Bourgeois, Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens, Teubner 2002)



Bild

F



Messungen

Direktes Problem:

Simulation/Vorhersage der Messungen

(bei Kenntnis der inneren Dichteverteilung)

Gegeben x berechne $F(x) = y!$

Inverses Problem:

Rekonstruktion/Abbildung des Inneren

(aus Messung der Abschwächung der Röntgenstrahlen)

Gegeben y löse $F(x) = y!$

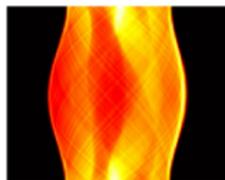
Computertomographie (CT)

- ▶ CT Vorwärtsabbildung $F : x \mapsto y$ ist linear
- ↷ Auswertung von F entspricht Matrix-Vektor-Multiplikation
(nach Diskretisierung von Bild und Messung jeweils als lange Vektoren)

Einfaches niedrig aufgelöstes Beispiel:



$$\begin{array}{c}
 F \\
 \mapsto \\
 F^{-1} \\
 \leftarrow
 \end{array}$$



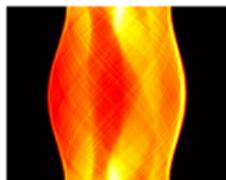
Problem: Matrix F invertierbar, aber $\|F^{-1}\|$ sehr groß.

Schlechtgestelltheit

- ▶ Im kontinuierlichen Modell: F^{-1} nicht stetig
- ▶ Nach Diskretisierung: $\|F^{-1}\|$ sehr groß



F
↳



↓ +1% Messfehler



F^{-1}
←



Sind zuverlässige Rekonstruktionen unmöglich?

Schlechtgestelltheit

Generisches, lineares, schlechtgestelltes Problem:

- ▶ $F : X \rightarrow Y$ beschränkt und linear, X, Y Hilberträume,
- ▶ F injektiv, F^{-1} unstetig,
- ▶ Wahre Lösung und fehlerfreie Messungen: $F\hat{x} = \hat{y}$,
- ▶ Tatsächliche Messungen: y^δ mit Messfehler $\|y^\delta - \hat{y}\| \leq \delta$

$$F^{-1}y^\delta \not\rightarrow F^{-1}\hat{y} = \hat{x} \quad \text{für} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Schon der kleinste Messfehler kann das Ergebnis völlig verfälschen.

Regularisierung

Generische lineare Tikhonov-Regularisierung

$$R_\alpha = (F^*F + \alpha I)^{-1} F^*$$

$\leadsto R_\alpha$ stetig, $x = R_\alpha y^\delta$ minimiert

$$\|Fx - y^\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2 \rightarrow \min!$$

*Unter allen Bildern, die gleich gut zu den Messdaten passen,
wähle das mit kleinster Norm.*

Regularisierung

Satz: Wähle $\alpha := \delta$. Dann gilt für $\delta \rightarrow 0$,

$$R_\delta y^\delta \rightarrow F^{-1} \hat{y}.$$

Beweisidee: Zeige, dass $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ und verwende

$$\|R_\alpha y^\delta - F^{-1} \hat{y}\| \leq \underbrace{\|R_\alpha (y^\delta - \hat{y})\|}_{\leq \|R_\alpha\| \delta} + \underbrace{\|R_\alpha \hat{y} - F^{-1} y\|}_{\rightarrow 0 \text{ für } \alpha \rightarrow 0}.$$

Inexakte aber stetige Inversion (Regularisierung)

+ Information über Messfehler (Parameterwahlstrategie)

= Konvergenz

Beispiel ($\delta = 1\%$)



\hat{x}



$\hat{y} = F \hat{x}$



y^δ



$F^{-1} y^\delta$

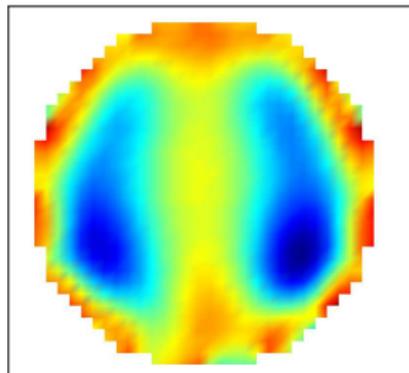
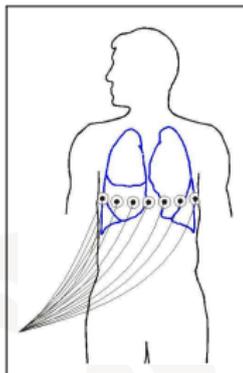


$(F^* F + \delta I)^{-1} F^* y^\delta$

*„Manchmal muss man das falsche Problem lösen,
um die richtige Lösung zu erhalten“*

Nichtlineare inverse Probleme

Elektrische Impedanztomographie (EIT)

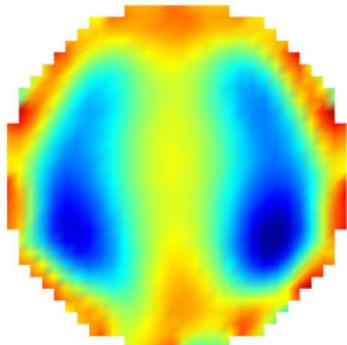


- ▶ Elektrische Ströme statt Röntgenstrahlen
- ▶ Messung des Spannungsabfalls
- ↪ Rekonstruktion der Leitfähigkeit

Bilder aus einem BMBF-Projekt über EIT

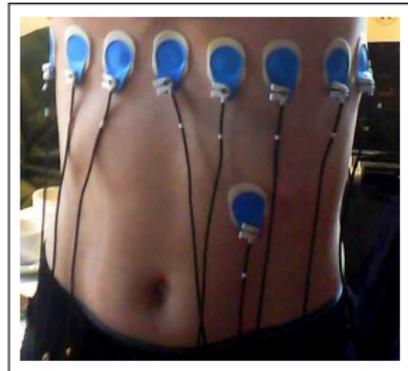
(Hanke, Kirsch, Kress, Hahn, Weller, Schilcher, 2007-2010)

Mathematisches Modell



Bild

F
→



Messungen

Direktes Problem: Simulation/Vorhersage der Messungen

(bei Kenntnis der inneren Leitfähigkeitsverteilung)

Gegeben x berechne $F(x) = y!$

Inverses Problem: Rekonstruktion/Abbildung des Inneren

(aus Strom-/Spannungsmessungen)

Gegeben y löse $F(x) = y!$

Nichtlineare inverse Probleme

- ▶ Nicht-lineares Problem: $F(x) = y \approx y^\delta$
- ↪ Newton-artige Verfahren: Löse iterativ

$$F'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = y - F(x_k) \quad (+ \text{Regularisierung})$$

- ▶ Auswertungen von F und F' benötigen PDGL-Lösungen
- ▶ Auswertungen von F und F' enthalten Modellierungsfehler
- ▶ Konvergenztheorie $x_k \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$ unklar

In der Praxis: Linearisierte Rekonstruktionsverfahren

z.B. NOSER (Cheney et al., 1990), GREIT (Adler et al., 2009)

Löse $F'(x_0)\xi = y^\delta \approx F(x) - F(x_0)$, dann ist $\xi \approx x - x_0$.

$F'(x_0)$: Referenzmessung (z.B. ausgeatmeter Zustand)

Linearisierung und Gebietsrekonstruktion

Satz (H./Seo, SIAM J. Math. Anal. 2010)

In der EIT mit stückweise analytischen Leitfähigkeiten

$$F'(x_0)\xi = F(x) - F(x_0) \implies \text{out supp}(\xi) = \text{out supp}(x - x_0).$$

out supp: äußerer Träger (= Nichtnullelemente + vom Rand nicht-erreichbare Regionen)

- ▶ Gebietsinformationen invariant unter (exakter) Linearisierung.
- ▶ Linearisierte Rekonstruktionen zeigen die richtige Lungenform (für exakte Messdaten).

*„Manchmal enthält die falsche Lösung
auch schon etwas Richtiges.“*

Ausblick: Regularisierung und Machine learning

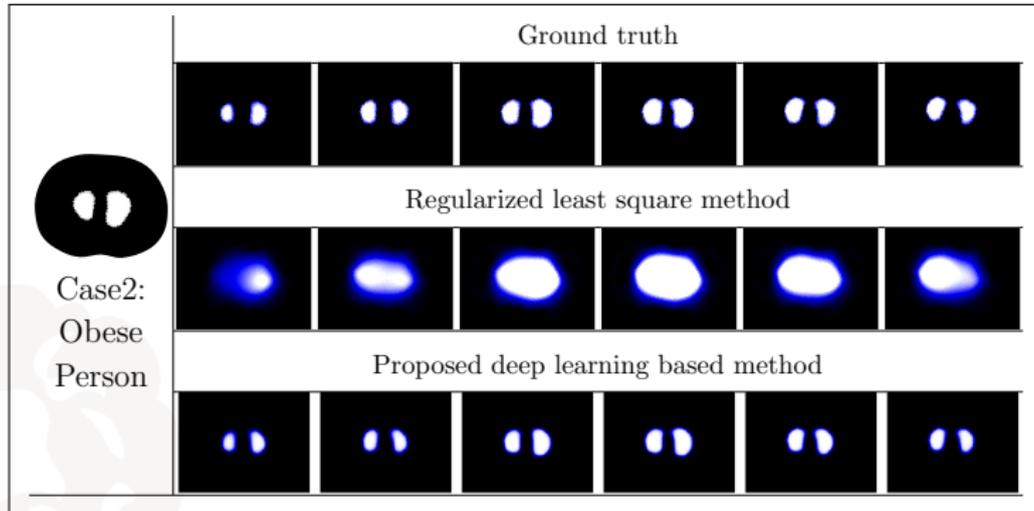
Regularisierung

Lineare Tikhonov-Regularisierung:

$$\|Fx - y^\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2 \rightarrow \min!$$

*Unter allen Bildern, die gleich gut zu den Messdaten passen,
wähle das mit kleinster Norm.*

- ▶ **Problem:** Welche Norm belohnt „richtige“ Bilder?
(Euklidnorm? p -Norm? Norm des diskreten Gradienten? Totalvariation?)
- ▶ **Neuer Ansatz:** „Richtige“ Lungenbilder bilden niedrig-dim. nicht-lineare Untermannigfaltigkeit aller Bilder
- Lerne diese zunächst aus Trainingsdaten und verwende sie bei der Lösung des inversen Problems



Seo, Kim, Jargal, Lee, H.: A learning-based method for solving ill-posed nonlinear inverse problems: a simulation study of Lung EIT, SIAM J. Imaging Sci. 2019

„Was richtig ist, entscheidet die Realität.“

- ▶ *Manchmal muss man das falsche Problem lösen, um die richtige Lösung zu erhalten.*
- ▶ *Manchmal enthält die falsche Lösung auch schon etwas Richtiges.*
- ▶ *Was richtig ist, entscheidet die Realität.*

Vielen Dank!
