

Gebietserkennung in einem parabolisch-elliptischen Problem

Bastian Gebauer

gebauer@math.uni-mainz.de

Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Germany

Zusammenarbeit mit

Florian Fruehauf & Otmar Scherzer, Universität Innsbruck

Darmstadt, 6. Juli 2006

Inhalt

Inhalt

- Motivation
- Das direkte Problem
- Das inverse Problem
- Numerische Ergebnisse

Motivation

Motivation

Ein parabolisch-elliptisches Problem

Wärmeleitungsgleichung:

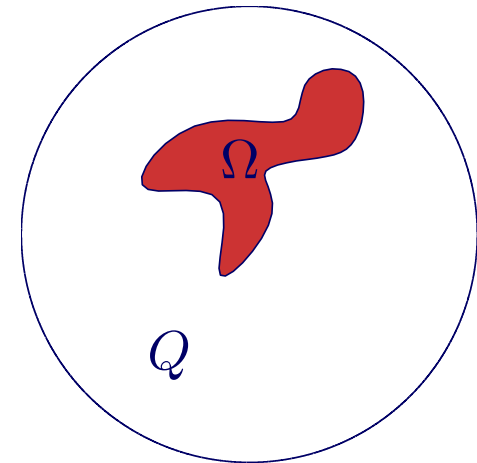
$$\partial_t(c(x)u(x, t)) - \nabla \cdot (\kappa(x)\nabla u(x, t)) = 0$$

$u(x, t)$: Temperatur $c(x)$: Wärmekapazität $\kappa(x)$: Wärmeleitfähigkeit

Spezialfall:

$$c(x) = \chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{in } \Omega, \\ 0 & \text{in } Q, \end{cases} \quad \kappa \in L_+^\infty(B)$$

wobei $\bar{\Omega} \subset B$, $Q := B \setminus \bar{\Omega}$



- Parabolisch in Ω (Für $\kappa = 1$: $\partial_t u - \Delta u = 0$)
- Elliptisch in Q (Für $\kappa = 1$: $\Delta u = 0$)

Anwendungen

Anwendungen:

- Gebiet mit Einschlüssen sehr viel höherer Wärmekapazität
- Ammari, Buffa, Nédélec (2000):
Streuung niederfrequenter elektromagnetischer Wellen an elektrisch leitfähigen Objekten in nicht-leitender Umgebung:

$$\partial_t(\sigma E) - \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} E = -\partial_t J$$

σ : Leitfähigkeit,

J : (erzeugende) Strom,

μ : Permeabilität,

E : elektrische Feld

- Wirbelströme in unendlich langem Zylinder
Für $B = \mathbb{R}^2$, $\kappa = 1$: MacCamy, Suri (1987), Costabel (1990)
Costabel, Ervin, Stephan (1990)

Direktes / Inverses Problem

- **Direktes Problem:** Existenz einer Lösung $u(x, t)$ von

$$\partial_t(\chi_\Omega(x)u(x, t)) - \nabla \cdot (\kappa(x)\nabla u(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in B \times]0, T[$$

Physikalisch sinnvoll:

- Randwerte: $u|_{\partial B}$ oder $\kappa\partial_\nu u|_{\partial B}$
- Anfangswerte: $u(x, 0) = 0$ für $x \in \Omega$
- Interfacebedingungen: $[u]_{\partial\Omega} = 0, \quad [\kappa\partial_\nu u]_{\partial\Omega} = 0$

- **Inverses Problem:** Bestimme Ω aus Randmessungen

$$(u|_{\partial B}, \kappa\partial_\nu u|_{\partial B}),$$

d. h. aus dem Neumann-Dirichlet-Operator

$$\Lambda_1 : \kappa\partial_\nu u|_{\partial B} \mapsto u|_{\partial B}$$

Das direkte Problem

Das direkte Problem

Mathematische Formulierung

Die Gleichung

$$\partial_t(\chi_\Omega u) - \nabla \cdot (\kappa \nabla u) = 0, \quad \text{in } B \times]0, T[\quad (\text{PEP})$$

ist definiert für $u \in H^{1,0}(B) := L^2(0, T, H^1(B))$ durch

$$\int_0^T \int_\Omega u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) \, dx \, dt - \int_0^T \int_B \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t) \, dx \, dt = 0$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(B \times]0, T[)$.

Für Lösungen $u \in H^{1,0}(B)$ von (PEP) sind definiert:

$$\begin{aligned} u|_{\partial B} &\in H^{1/2,0}(\partial B), & \kappa \partial_\nu u|_{\partial B} &\in H^{-1/2,0}(\partial B), \\ u^+|_{\partial \Omega} &\in H^{1/2,0}(\partial \Omega), & u^-|_{\partial \Omega} &\in H^{1/2,0}(\partial \Omega), \\ \kappa \partial_\nu u^+|_{\partial \Omega} &\in H^{-1/2,0}(\partial \Omega), & \kappa \partial_\nu u^-|_{\partial \Omega} &\in H^{-1/2,-1/4}(\partial \Omega). \end{aligned}$$

Interfacebedingungen

Lemma

$u \in H^{1,0}(B)$ löst genau dann (PEP), wenn $u \in H^{1,0}(B \setminus \Sigma)$ und

$$\partial_t u - \nabla \cdot (\kappa \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega \times]0, T[,$$

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = 0 \quad \text{in } Q \times]0, T[,$$

$$[\kappa \partial_\nu u]_\Sigma = 0,$$

$$[u]_\Sigma = 0.$$

\rightsquigarrow Physikalisch sinnvolle Interfacebedingungen sind bereits in (PEP) enthalten.

(PEP) ist Spezialfall eines Diffraktionsproblems mit

$$[\kappa \partial_\nu u]_{\partial\Omega} = \psi \in H^{-1/2,0}(\partial\Omega),$$

$$[u]_{\partial\Omega} = f \in H^{1/2,0}(\partial\Omega).$$

Anfangsbedingung / Eindeutigkeit

Lemma

Ist $u \in H^{1,0}(B)$ eine Lösung von (PEP), dann ist

$$u|_{\Omega} \in W(0, T, H^1(\Omega), H^1(\Omega)') \subseteq C^0([0, T], L^2(\Omega))$$

bezüglich $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)'$.

u ist eindeutig bestimmt durch Vorgabe von

$$\kappa \partial_{\nu} u|_{\partial B} \in H^{-\frac{1}{2},0}(\partial B),$$

$$u(x, 0) \in L^2(\Omega).$$

Existenz

Lemma

Zu jedem $g \in H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(\partial B)$ existiert eine Lösung $u \in H^{1,0}(B)$ von (PEP) mit

$$\kappa \partial_{\nu} u|_{\partial B} = g \quad \text{und} \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

u hängt stetig von g ab.

Beweis mit **Projektionslemma von Lions**:

Gegeben Hilbertraum H , $\Phi \leq H$ und Bilinearform $a : H \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- Für alle $\varphi \in \Phi$ ist $u \mapsto a(u, \varphi)$ stetig.
- Es existiert $\alpha > 0$ mit $a(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_H^2$ für alle $\varphi \in \Phi$.

Dann existiert für alle $l \in H'$ ein $u_0 \in H$, so dass

$$a(u_0, \varphi) = l(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \Phi \quad \text{und} \quad \|u_0\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{H'}.$$

Variationelle Formulierung

Lemma

Für $g \in H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(\partial B)$ sind äquivalent:

- $u \in H^{1,0}(B)$ löst (PEP), $u(x, 0) = 0$ in Ω und $\kappa \partial_{\nu} u|_{\partial B} = g$.
- $u \in H^{1,0}(B)$, $u|_{\Omega} \in W$, $u(x, 0) = 0$ in Ω und u erfüllt

$$\int_0^T \langle (u|_{\Omega})', v|_{\Omega} \rangle dt + \int_0^T \int_B \kappa \nabla u \cdot \nabla v dx dt = \int_0^T \langle g, v|_{\partial B} \rangle dt$$

für alle $v \in H^{1,0}(B)$.

Analoge Resultate gelten für Diffraktionsproblem mit vorgegebenen

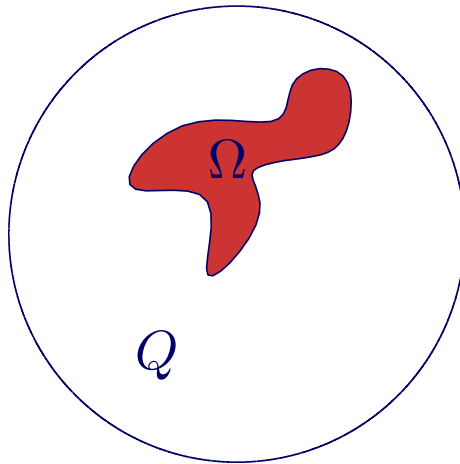
$$[\kappa \partial_{\nu} u]_{\partial \Omega} = \psi \in H^{-1/2,0}(\partial \Omega) \quad \text{und} \quad [u]_{\partial \Omega} = f \in H^{1/2,0}(\partial \Omega).$$

Das inverse Problem

Das inverse Problem

Randmessungen

Randmessungen an Gebiet mit und ohne Einschluss:
(nun zusätzlich $\kappa = 1 + \tilde{\kappa}\chi_\Omega$, $\tilde{\kappa} \in L_+^\infty(\Omega)$)

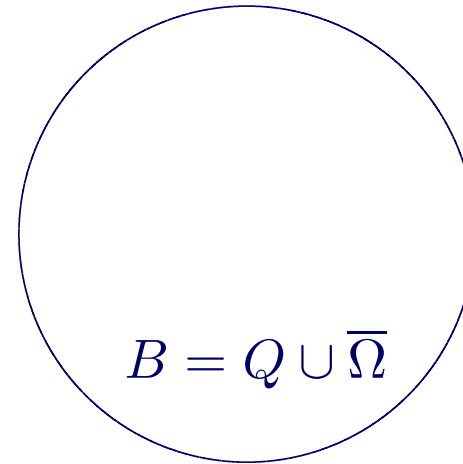


$$\Lambda_1 : g \mapsto u_1|_{\partial B},$$

$$\partial_t(\chi_\Omega u_1) - \nabla \cdot (\kappa \nabla u_1) = 0,$$

$$\partial_\nu u_1|_{\partial B} = g,$$

$$u_1(x, 0)|_\Omega = 0.$$

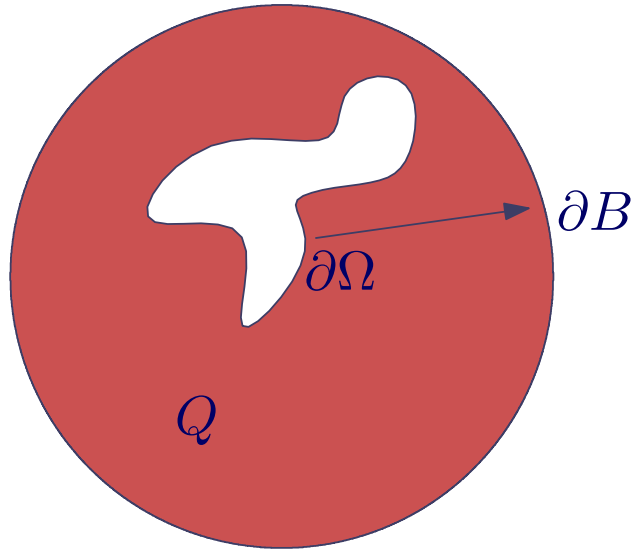


$$\Lambda_0 : g \mapsto u_0|_{\partial B},$$

$$\Delta u_0 = 0,$$

$$\partial_\nu u_0|_{\partial B} = g.$$

Virtuelle Messungen



ψ : eingespeister Wärmefluss auf $\partial\Omega$

$L : \psi \mapsto v|_{\partial B}$, wobei

$$\Delta v(x, t) = 0 \quad \text{in} \quad Q \times]0, T[, \quad (1)$$

$$\partial_\nu v|_{\partial B} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial B \times]0, T[, \quad (2)$$

$$\partial_\nu v|_{\partial\Omega} = \psi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \times]0, T[. \quad (3)$$

Aus $\mathcal{R}(L)$ kann Ω bestimmt werden:

$$v_z|_{\partial B} \in \mathcal{R}(L) \quad \text{genau dann, wenn} \quad z \in \Omega$$

mit einer Lösung v_z von (1) in $B \setminus \{z\}$, (2) auf ∂B und Singularität in $z \in B$,
(z. B. Richtungsableitung der Fundamentallösung der Laplace-Gleichung)

Faktorisierungsmethode

Für „ähnliche Probleme“ existiert **Faktorisierung**: $\Lambda_0 - \Lambda_1 = LFL^*$

$$\begin{array}{ccc} H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(\partial B) & \xrightarrow{\Lambda_0 - \Lambda_1} & H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(\partial B) \\ & \searrow L^* & \nearrow L \\ & H_{\diamond}^{\frac{1}{2},0}(\Sigma) \xrightarrow{F} H_{\diamond}^{-\frac{1}{2},0}(\Sigma) & \end{array}$$

Allgemein gilt:

$$AA^* = BB^* \implies \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B).$$

Sind $\Lambda_0 - \Lambda_1$, F selbstadjungiert und positiv, so folgt

$$\mathcal{R}((\Lambda_0 - \Lambda_1)^{1/2}) = \mathcal{R}(LF^{1/2})$$

Ist F bijektiv, so ergibt sich die **Bildraumidentität**:

$$\mathcal{R}((\Lambda_0 - \Lambda_1)^{1/2}) = \mathcal{R}(L)$$

$\mathcal{R}(L)$ (und damit Ω) kann aus den Messungen Λ_0 , Λ_1 berechnet werden.

Faktorisierungsmethode

Bildraumidentität

$$\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}((\Lambda_0 - \Lambda_1)^{1/2}).$$

- wurde ursprünglich von Kirsch für Inverse Streuprobleme entwickelt
- wurde gezeigt für
 - Elektrostatik (Hähner)
 - EIT (Brühl, Hanke), auch mit verschiedenen Elektrodenmodellen (Brühl, Hanke, Hyvönen) und im Halbraum (Schappel)
 - Diffusionsprobleme (Kirsch), auch mit Robin-Randbedingungen (Hyvönen)
 - allgemeine reelle elliptische Probleme (G.)

Bisher sind keine Anwendungen auf zeitabhängige Probleme gelungen.

Gilt die Bildraumidentität in diesem parabolisch-elliptischen Fall?

Hauptresultat

- Bildrauminklusionen:

$$\mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2}) \subseteq \mathcal{R}(L),$$

$$\mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2}) \supseteq \mathcal{R}(L|_V),$$

$\tilde{\Lambda}$: symmetrischer Anteil von $\Lambda_1 - \Lambda_0$,

$$V = H^{1/4}(0, T, H_{\diamond}^{-1/2}(\partial\Omega))$$

- Die singulären Funktionen v_z erfüllen

$$v_z|_{\partial B} \in \mathcal{R}(L) \quad \text{genau dann, wenn} \quad z \in \Omega,$$

und $\partial_{\nu} v_z|_{\partial\Omega} \in V$.

↪

$$z \in \Omega \quad \text{genau dann, wenn} \quad v_z|_{\partial B} \in \mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2}).$$

Konsequenzen

$z \in \Omega$ genau dann, wenn $v_z|_{\partial B} \in \mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2})$.

- Theoretisches Resultat:

Ω ist eindeutig bestimmt durch Λ_1 .

- Rekonstruktionsalgorithmus:

Für alle $z \in B$ berechne v_z und teste, ob $v_z|_{\partial B} \in \mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2})$.

- nichtiterativ, benötigt keinen Vorwärtslöser
- unabhängig von Art (κ_1) und Anzahl der Einschlüsse
- Bildraumtest $v_z|_{\partial B} \in \mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2})$ muss numerisch implementiert werden

Numerische Ergebnisse

Numerische Ergebnisse

Implementierung

$z \in \Omega$ genau dann, wenn $v_z|_{\partial B} \in \mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2})$.

$\tilde{\Lambda}$ injektiv, kompakt, selbstadjungiert \rightsquigarrow Spektralzerlegung (u_k, σ_k) von $\tilde{\Lambda}$

$$\tilde{\Lambda}^{1/2} u_k = \sigma_k^{1/2} u_k, \quad \sigma_k > 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

Picard-Kriterium:

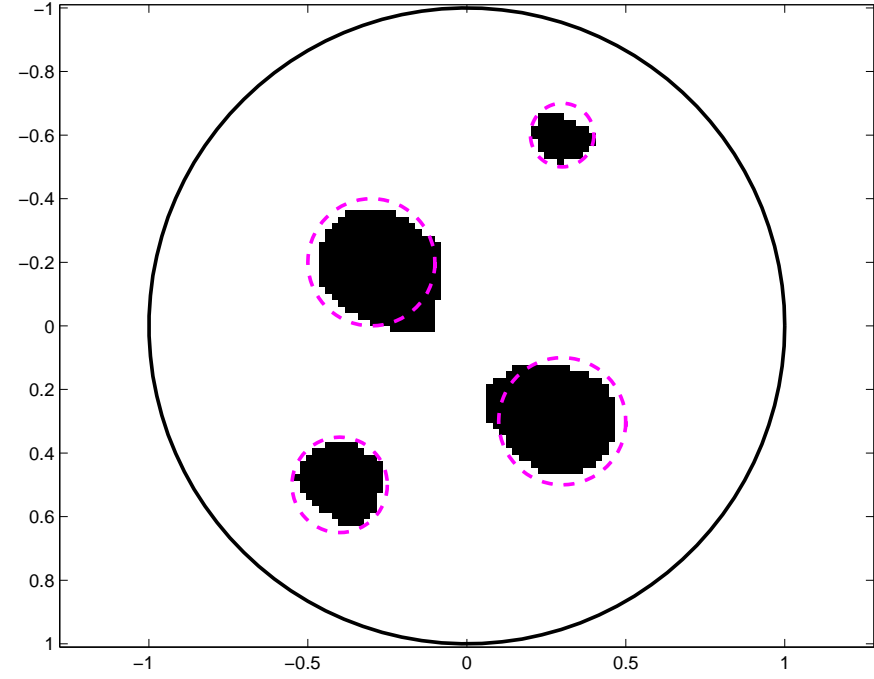
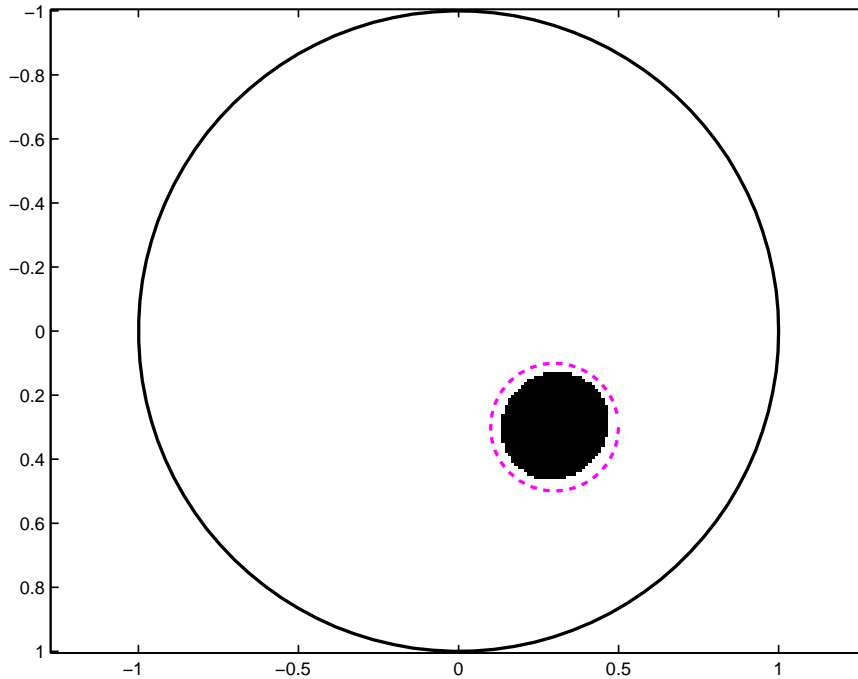
$$v_z|_{\partial B} \in \mathcal{R}(\tilde{\Lambda}^{1/2}) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_k} \langle v_z|_{\partial B}, u_k \rangle^2 < \infty$$

Numerische Implementierung:

Gegeben eine (endlich-dim.) Näherung an $\tilde{\Lambda}$ mit Spektralzerl. $(\tilde{u}_k, \tilde{\sigma}_k)_{k=1}^n$

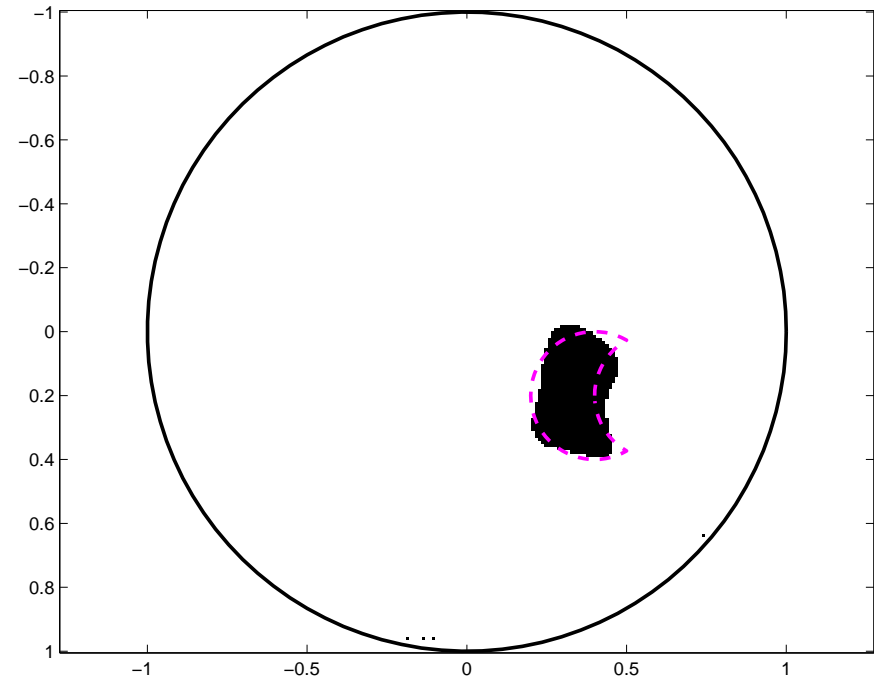
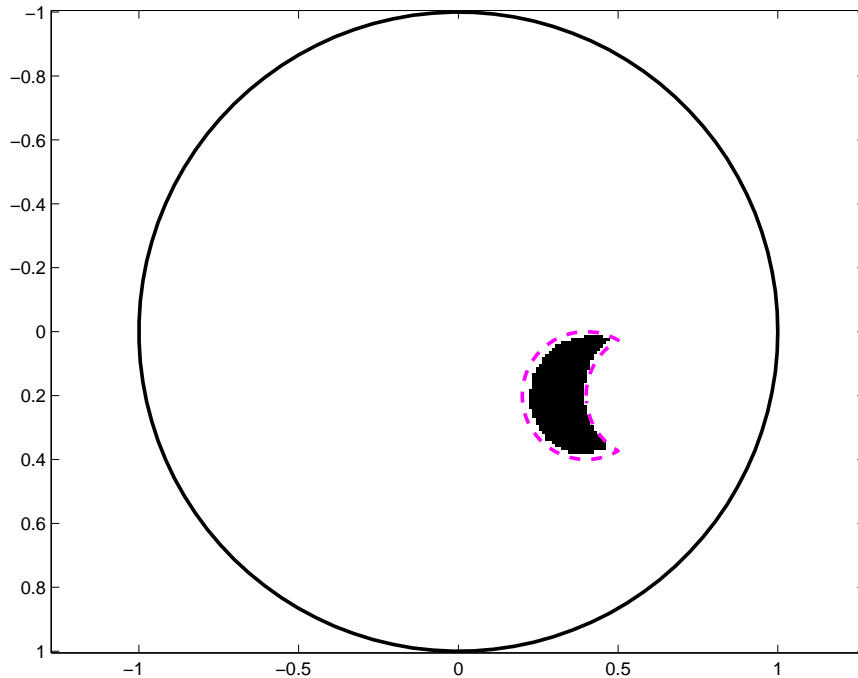
teste, ob $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tilde{\sigma}_k} \langle v_z|_{\partial B}, \tilde{u}_k \rangle^2$ „klein“ ist.

Numerische Ergebnisse



Rekonstruktionen eines und mehrerer Einschlüsse.

Numerische Ergebnisse



Rekonstruktion eines nichtkonvexen Einschlusses
(links: mit exakten Daten, rechts: mit 0.1% Rauschen)

Applet zur Faktorisierungsmethode in der Impedanztomographie:

<http://www.numerik.mathematik.uni-mainz.de/geit/>