

FORTGESCHRITTENE OPTIMIERUNG
UND INVERSE PROBLEME:
REGULARISIERUNG
INVERSER PROBLEME

Prof. Dr. Bastian von Harrach

Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik

Wintersemester 2019/2020

<http://numerical.solutions>

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ein Beispiel aus der Finanzmathematik: Risikoabschätzung einer binären Option	2
1.2	Hintergrund: Ableiten als inverses Problem	3
1.3	Parameteridentifikationsprobleme	3
2	Lineare inverse Probleme	5
2.1	Einige Grundbegriffe	5
2.2	Moore-Penrose-Inverse	12
2.3	Kompakte Operatoren	16
2.3.1	Definition und erste Eigenschaften	16
2.3.2	Spektraltheorie kompakter Operatoren	21
3	Regularisierung linearer Probleme	29
3.1	Regularisierung	29
3.2	Schwache Konvergenz	33
3.3	Parameterwahlstrategien	37
3.4	Das Diskrepanzprinzip für das Tikhonov-Verfahren	41

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel 1

Einleitung

Hadamard (1865-1963) nannte ein Problem *wohlgestellt*, falls

1. eine Lösung existiert (*Existenz*),
2. die Lösung eindeutig ist (*Eindeutigkeit*),
3. die Lösung stetig von den Eingangsdaten abhängt (*Stabilität*).

Trifft eine dieser Eigenschaften nicht zu, so spricht man von einem *schlecht gestellten* Problem (engl.: *ill-posed*).

Seien X, Y Hilberträume und $A : X \rightarrow Y$ stetig und linear (wir schreiben $A \in \mathcal{L}(X, Y)$). Dann ist das *direkte Problem*, zu gegebenem $x \in X$ den Vektor $y = Ax$ zu berechnen, offenbar wohlgestellt. Für das dazugehörige *inverse Problem*, eine lineare Gleichung $Ax = y$ zu lösen, bedeuten die Hadamard-Kriterien:

- Existenz: $y \in \mathcal{R}(A)$ bzw. A surjektiv.
- Eindeutigkeit: A injektiv.
- Stabilität: A^{-1} stetig.

In dieser Vorlesung untersuchen wir, wie schlecht gestellte Probleme dennoch stabil gelöst werden können.

1.1 Ein Beispiel aus der Finanzmathematik: Risikoabschätzung einer binären Option

Wir betrachten eine binäre Option (auch: digitale Option oder Cash-or-Nothing-Option). Der Käufer einer solchen Option erhält zu einem späteren Zeitpunkt (am Verfallszeitpunkt/maturity date) einen festgelegten Betrag (payoff), falls dann der Kurs einer bestimmte Aktie (Basiswert, underlying) über einem gewissen Wert (strike) liegt. Ansonsten erhält er nichts.

Die linke Seite von Abbildung 1.1 zeigt den fairen Preis V einer solchen Option in Abhängigkeit vom Kurs des Underlyings S_0 . Die rote durchgezogene Kurve zeigt dabei analytisch berechnete Werte. (Für solch einfache Beispiele existieren geschlossene Lösungsformeln.) Schwarz gepunktet sind (mit dem sogenannten Monte Carlo-Verfahren) numerisch genäherte Werte eingezeichnet. Beide Kurven stimmen sehr gut überein.

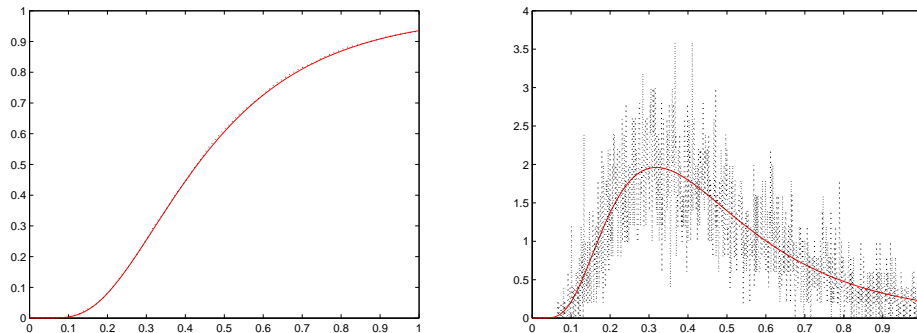


Abbildung 1.1: Analytisch und mit Monte Carlo berechneter Optionspreis und Delta.

Zur Risikobewertung einer binären Option ist es wichtig zu wissen, wie stark der Preis V vom Kurs des Underlyings S_0 abhängt, ob etwa schon minimale Kursschwankungen große Wertschwankungen der Option auslösen können. Hierfür relevant ist das sogenannte *Delta*

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_0}.$$

Die rechte Seite in Abbildung 1.1 zeigt das mittels finiter Differenzen aus den Kurven auf der linken Seite berechnete Delta.

$$\Delta(S_0) \approx \frac{V(S_0 + h) - V(S_0)}{h}, \quad h = 10^{-3}$$

Während die numerisch berechneten Werte der Option noch sehr gut mit den korrekten (analytisch berechneten) Werten übereinstimmen, sind die daraus numerisch berechneten Ableitungen offenbar völlig unbrauchbar.

Durch die Division durch h werden die in der numerischen Bewertung vorhandenen Fehler um das $1/h = 1000$ -fache verstärkt und ruinieren das Ergebnis.

1.2 Hintergrund: Ableiten als inverses Problem

Der Grund für die beobachtete Instabilität ist, dass die Ableitung einer Funktion nicht stetig von den Funktionswerten abhängt. Ein einfaches Beispiel ist

$$f_n(x) = \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x), \quad f'_n(x) = \cos(n\pi x)$$

Offenbar konvergiert $f_n(x)$ glm. auf $[0, 1]$ gegen die Nullfunktion, während $f'_n(x)$ für keinen Punkt $x \in (0, 1]$ konvergiert.

Wir können die Ableitung auch als inverses Problem zu einer linearen Abbildung zwischen Hilberträumen auffassen. Dazu definieren wir

$$A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1), \quad Af := \int_0^x f(s) \, ds$$

Man rechnet leicht nach, dass A tatsächlich eine Abbildung von $L^2(0, 1)$ nach $L^2(0, 1)$, sowie linear und stetig ist. Außerdem ist $Af - g = \text{const.}$ genau dann, wenn $f = g'$ (im Sinne der *schwachen* bzw. *distributionellen* Ableitung).

Offenbar ist auch

$$Af'_n = f_n, \quad \|f_n\|_{L^2(0,1)}^2 = \frac{1}{2n^2\pi^2} \quad \text{und} \quad \|f'_n\|_{L^2(0,1)}^2 = \frac{1}{2},$$

d.h. $\|Af'_n\| = \frac{1}{n\pi} \|f'_n\|$. A kann also nicht stetig invertierbar sein. Das Ableiten einer Funktion ist ein *schlecht gestelltes, inverses Problem*.

1.3 Parameteridentifikationsprobleme

Viele Vorgänge in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften lassen sich durch partielle Differentialgleichungen beschreiben, deren Lösung die Vorhersage

KAPITEL 1. EINLEITUNG

des Verhaltens eines Systems bei vollständiger Kenntnis aller dazu nötigen Parameter ermöglicht. So beschreibt z.B.

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u(x)) &= f(x) & \forall x \in \Omega \\ u(x) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

die stationäre Wärmeverteilung in einem Körper Ω dessen Rand auf Nulltemperatur gehalten wird. $u(x)$ ist dabei die Temperatur im Punkt x . $a(x)$ ist die Wärmeleitfähigkeit und $f(x)$ ist eine von außen angelegte Wärmequelle.

Das dazugehörige inverse Problem ist es, die Wärmeleitfähigkeit des Körpers durch Messungen der Temperatur $u(x)$ zu bestimmen. Wir betrachten ein einfaches eindimensionales Beispiel:

$$-(a(x)u_x(x))_x = f(x) \quad x \in (0, 1)$$

mit $u(0) = 0 = u(1)$. Falls u_x nirgendwo verschwindet, dann erhalten wir

$$a(x) = -\frac{1}{u_x(x)} \left(a(0)u_x(0) + \int_0^x f(s) \, ds \right)$$

Um a zu berechnen, müssen die Temperaturmessungen $u(x)$ also differenziert werden, was wie im letzten Abschnitt erklärt ein schlecht-gestelltes Problem darstellt. Zusätzliche (nicht-lineare) Instabilitäten können durch die Division durch den möglicherweise kleinen Ausdruck $u_x(x)$ auftreten.

Kapitel 2

Lineare inverse Probleme

Der Aufbau dieses Kapitel folgt an vielen Stellen dem sehr empfehlenswerten Lehrbuch [Rieder].

2.1 Einige Grundbegriffe

Es seien stets X, Y, Z (reelle) Hilberträume mit Skalarprodukten $(\cdot, \cdot)_X, (\cdot, \cdot)_Y$ und dadurch induzierten Normen $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$.

Definition und Satz 2.1

Sei $A : X \rightarrow Y$ linear. Dann sind äquivalent:

- (a) A ist stetig.
- (b) A ist beschränkt, d.h. es existiert $C > 0$ mit

$$\|Ax\|_Y \leq C \|x\|_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Sei $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear. Dann sind äquivalent:

- (a) b ist stetig.
- (b) b ist beschränkt, d.h. es existiert $C > 0$ mit

$$|b(x, y)| \leq C \|x\|_X \|y\|_Y \quad \text{für alle } x \in X, y \in Y.$$

Beweis:

Wir setzen das als bekannt voraus und verweisen z.B. auf [Alt].

□

Definition und Satz 2.2

Den Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(X, Y)$. $\mathcal{L}(X, Y)$ ist ein Banachraum mit der Operatornorm

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Für $Y = X$ schreiben wir auch $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$ und für $Y = \mathbb{R}$ heißt $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ auch der Dualraum von X .

Beweis:

Auch das setzen wir als bekannt voraus und verweisen wieder auf [Alt]. \square

Satz 2.3 (Lax-Milgram)

Es sei X ein Hilbertraum und

$$b : X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige, symmetrische, koerzive Bilinearform, d.h.

$$\begin{aligned} b(u, v) &= b(v, u) & \forall u, v \in X & \quad (\text{Symmetrie}) \\ \exists C > 0 : |b(u, v)| &\leq C \|u\| \|v\| & \forall u, v \in X & \quad (\text{Stetigkeit}) \\ \exists \beta > 0 : b(u, u) &\geq \beta \|u\|^2 & \forall u \in X & \quad (\text{Koerzivität}) \end{aligned}$$

und b ist in beiden Komponenten linear. Weiterhin sei $l \in X'$.

Dann existiert genau ein $u \in X$ mit

$$b(u, v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in X. \tag{2.1}$$

u hängt stetig und linear von l ab,

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\beta} \|l\|_{X'}.$$

und u ist das eindeutige Minimum von

$$J : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(v) := \frac{1}{2} b(v, v) - \langle l, v \rangle.$$

Beweis:

2. Übungsblatt, Aufgabe 1. \square

Bemerkung 2.4

- (a) Nimmt man als Bilinearform b das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_X$ in einem Hilbertraum X , so sind offenbar alle Voraussetzungen von Satz 2.3 erfüllt. Es gibt also zu jeder Linearform $l \in X'$ ein $\xi \in X$, so dass

$$(\xi, x)_X = l(x) \quad \text{für alle } x \in X$$

und $\iota : X' \rightarrow X, l \mapsto \xi$ ist eine stetige lineare Abbildung.

ι besitzt eine stetige lineare Inverse, denn zu jedem $\xi \in X$ ist durch

$$l : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad l(x) := (\xi, x)_X \quad \text{für alle } x \in X$$

eine Linearform definiert mit $\iota(l) = \xi$ und

$$\|l\|_{X'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{(\xi, x)_X}{\|x\|} = \|\xi\|_X.$$

X ist daher isometrisch isomorph zu X' . Dies bezeichnet man auch als Riesz'schen Darstellungssatz.

- (b) Nach Definition und Satz 2.2 ist X' ein Banachraum. Durch das Skalarprodukt

$$(l_1, l_2)_{X'} := (\iota(l_1), \iota(l_2))_X$$

wird X' sogar zum Hilbertraum.

- (c) Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Für jedes $y \in Y$ definiert $l : x \mapsto (Ax, y)_Y$ eine stetige Linearform $l \in X'$ und daher existiert

$$\xi \in X \quad \text{mit} \quad (x, \xi)_X = (Ax, y)_Y.$$

Außerdem hängt in dieser Konstruktion $\xi \in X$ stetig und linear von $l \in X'$ und dieses stetig und linear von $y \in Y$ ab.

Zu jedem $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ kann daher der adjungierte Operator $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ definiert werden durch

$$(x, A^*y)_X := (Ax, y)_Y \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

Man zeigt leicht, dass $(A^*)^* = A$.

Satz 2.5

Ist $V \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum, dann ist V mit dem Skalarprodukt aus X selbst ein Hilbertraum.

Beweis:

Offenbar ist $(\cdot, \cdot)_X$ auch ein Skalarprodukt auf V und die Vollständigkeit folgt direkt aus der Abgeschlossenheit und der Vollständigkeit von X . \square

Definition und Satz 2.6

Sei $V \subseteq X$ ein (nicht notwendigerweise abgeschlossener) Unterraum.

Wir definieren $P_{\bar{V}} \in \mathcal{L}(X)$ durch $P_{\bar{V}}x := v$ für $x \in X$, wobei

$$v := \arg \min_{\tilde{v} \in \bar{V}} \|x - \tilde{v}\|_X.$$

$P_{\bar{V}}$ heißt orthogonale Projektion auf V .

Außerdem definieren wir das orthogonale Komplement durch

$$V^\perp := \{x \in X : (x, V) = 0\} := \{x \in X : (x, v) = 0 \quad \forall v \in V\}.$$

Dann gilt

(a)

$$v = P_{\bar{V}}x \iff v \in \bar{V} \quad \text{und} \quad v - x \in \bar{V}^\perp,$$

insbesondere ist also $\mathcal{R}(P_{\bar{V}}) = \bar{V}$ und $\mathcal{N}(P_{\bar{V}}) = \bar{V}^\perp$.

(b) $V^\perp = \bar{V}^\perp$.

(c) $X = \bar{V} \oplus V^\perp$.

(d) $(V^\perp)^\perp = \bar{V}$.

(e) Für $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$.

(f) Für $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist $\overline{\mathcal{R}(A^*)} = \mathcal{N}(A)^\perp$.

Beweis:

Es ist

$$\arg \min_{\tilde{v} \in \bar{V}} \|x - \tilde{v}\|_X = \arg \min_{\tilde{v} \in \bar{V}} \|x - \tilde{v}\|_X^2 = \arg \min_{\tilde{v} \in \bar{V}} \left(\frac{1}{2}(\tilde{v}, \tilde{v})_X - (x, \tilde{v})_X \right)$$

Da \bar{V} ein Hilbertraum ist (Satz 2.5), existiert nach dem Satz von Lax-Milgram (Satz 2.3) genau ein Minimum von $\frac{1}{2}(\tilde{v}, \tilde{v})_X - (x, \tilde{v})_X$, dieses ist die eindeutige Lösung von

$$(v, w) = (x, w) \quad \forall w \in \bar{V} \iff v - x \in \bar{V}^\perp$$

und v hängt stetig und linear von x ab. Damit ist gezeigt, dass $P_{\bar{V}} \in \mathcal{L}(X)$ wohldefiniert ist und (a) gilt. Offenbar ist auch $P_{\bar{V}}^2 = P_{\bar{V}}$, also $P_{\bar{V}}$ tatsächlich eine Projektion.

(b) folgt durch stetige Fortsetzung.

(c) $\bar{V} \cap V^\perp = 0$ ist klar und jedes $x \in X$ lässt sich (stetig) zerlegen in

$$x = P_{\bar{V}}x + (x - P_{\bar{V}}x) \in \bar{V} + V^\perp.$$

(d) klar: $\bar{V} \subseteq (\bar{V}^\perp)^\perp = (V^\perp)^\perp$

Ist umgekehrt $x \in (V^\perp)^\perp$, dann ist nach (a)

$$P_{\bar{V}}x - x \in V^\perp, \quad \text{aber auch} \quad P_{\bar{V}}x - x \in (V^\perp)^\perp,$$

also $(P_{\bar{V}}x - x, P_{\bar{V}}x - x) = 0$ und damit $x = P_{\bar{V}}x \in \bar{V}$.

(e)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A)^\perp &= \{\eta \in Y : (\eta, y) = 0 \ \forall y \in \mathcal{R}(A)\} \\ &= \{\eta \in Y : 0 = (\eta, Ax) = (A^*\eta, x) \ \forall x \in X\} \\ &= \{\eta \in Y : A^*\eta = 0\} = \mathcal{N}(A^*). \end{aligned}$$

(f) Aus $(A^*)^* = A$, (e) und (d) folgt

$$\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{N}((A^*)^*)^\perp = (\mathcal{R}(A^*)^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A^*)}. \quad \square$$

Definition 2.7

Sei $V \subseteq X$ ein Unterraum von X . Eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow Y$ bezeichnen wir auch als Operator von X nach Y mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) = V$ und schreiben

$$A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y.$$

Wenn wir die Schreibweise von Definition 2.7 verwenden, wird meistens $\mathcal{D}(A)$ dicht in X liegen und A unbeschränkt sein.

Definition und Satz 2.8

Seien A, B und C (möglicherweise unbeschränkte) lineare Operatoren mit Definitionsbereichen $\mathcal{D}(A), \mathcal{D}(B)$ und $\mathcal{D}(C)$.

(a) Wir schreiben $A \subseteq B$ falls

$$\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B) \quad \text{und} \quad Ax = Bx \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Wir schreiben $A = B$ falls zusätzlich $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.

(b) Wir definieren $A + B$ und AB punktweise auf den natürlichen Definitionsbereichen

$$\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B), \quad \mathcal{D}(AB) = \{x \in \mathcal{D}(B) : Bx \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Für $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir αA punktweise auf

$$\mathcal{D}(\alpha A) = \mathcal{D}(A).$$

$0A$ ist der (beschränkte und überall definierte) Nulloperator.

(c) Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= A + (B + C), & (A + B)C &= AC + BC, \\ (AB)C &= A(BC), & A(B + C) &\supseteq AB + AC. \end{aligned}$$

Beweis:

Übungsaufgabe □

Definition und Satz 2.9

(a) Die adjungierte Abbildung eines linearen Operators

$$A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$$

mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ ist der durch

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \forall x \in \mathcal{D}(A), y \in \mathcal{D}(A^*) \quad (2.2)$$

eindeutig definierte lineare Operator $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subseteq Y \rightarrow X$ mit Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(A^*) := \{y \in Y : x \mapsto (Ax, y) \text{ ist stetig auf } \mathcal{D}(A)\}$$

(b) Sind $A : \mathcal{D}(A) \subseteq Y \rightarrow Z$, $B : \mathcal{D}(B) \subseteq X \rightarrow Y$ und AB lineare Operatoren mit dichten Definitionsbereichen, dann ist

$$(AB)^* \supseteq B^*A^*.$$

Ist $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$, dann gilt sogar $(AB)^* = B^*A^*$.

(c) Ein linearer Operator $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$ heißt symmetrisch, falls

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A).$$

Ist $\mathcal{D}(A)$ dicht in X , so gilt

$$A \text{ symmetrisch} \iff A \subseteq A^*,$$

und A heißt selbstadjungiert, falls $A = A^*$, also zusätzlich $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ gilt.

Beweis:

(a) Offenbar ist $\mathcal{D}(A^*)$ ein Unterraum von Y . Für $y \in \mathcal{D}(A^*)$ kann $x \mapsto (Ax, y)$ zu einer stetigen linearen Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden, nach dem Satz von Riesz (Bemerkung 2.4) existiert also genau eine Lösung A^*y der definierenden Gleichung (2.2). Die Linearität von A^* ist klar.

(b) Sei $y \in \mathcal{D}(B^*A^*)$. Wir wollen zeigen, dass $y \in \mathcal{D}((AB)^*)$, d.h.

$$x \mapsto (ABx, y) \text{ ist stetig auf } \mathcal{D}(AB).$$

Sei dazu $x \in \mathcal{D}(AB)$. Dann ist insbesondere $x \in \mathcal{D}(B)$ und $A^*y \in \mathcal{D}(B^*)$, also

$$(Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y).$$

Es ist aber auch $Bx \in \mathcal{D}(A)$ und $y \in \mathcal{D}(A^*)$, also

$$(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y) \quad \forall x \in \mathcal{D}(AB), y \in \mathcal{D}(B^*A^*).$$

Es folgt, dass für alle $y \in \mathcal{D}(B^*A^*)$ die Abbildung $x \mapsto (ABx, y) = (x, B^*A^*y)$ stetig ist in $\mathcal{D}(AB)$ und damit $\mathcal{D}(B^*A^*) \subseteq \mathcal{D}((AB)^*)$.

Damit erhalten wir

$$(x, B^*A^*y) = (ABx, y) = (x, (AB)^*y) \quad \forall x \in \mathcal{D}(AB), y \in \mathcal{D}(B^*A^*)$$

und da $\mathcal{D}(AB)$ dicht in X liegt folgt

$$B^*A^*y = (AB)^*y \quad \forall y \in \mathcal{D}(B^*A^*)$$

also $B^*A^* \subseteq (AB)^*$.

Nun sei A beschränkt. Um $(AB)^* = B^*A^*$ zu beweisen, müssen wir nur noch zeigen, dass $\mathcal{D}((AB)^*) \subseteq \mathcal{D}(B^*A^*)$. Sei also $y \in \mathcal{D}((AB)^*)$. Dann ist für alle $x \in \mathcal{D}(AB)$

$$(x, (AB)^*y) = (ABx, y) = (Bx, A^*y).$$

wobei wir in der zweiten Umformung $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ verwendet haben. Es ist also $x \mapsto (Bx, A^*y)$ stetig in $\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(B)$ und damit $A^*y \in \mathcal{D}(B^*)$. Also ist $y \in \mathcal{D}(B^*A^*)$, womit die Behauptung folgt.

(c) Sei A symmetrisch mit dichtem $\mathcal{D}(A)$. Für alle $y \in \mathcal{D}(A)$ ist

$$x \mapsto (Ax, y) = (x, Ay)$$

stetig, also $y \in \mathcal{D}(A^*)$ und $Ay = A^*y$ für alle $y \in \mathcal{D}(A)$, d.h. $A \subseteq A^*$. Die Rückrichtung ist trivial. \square

Bemerkung 2.10

Achtung! Alle von A gebildeten Ausdrücke hängen automatisch auch von $\mathcal{D}(A)$ ab, insbesondere auch A^ und $\mathcal{D}(A^*)$!*

Es gibt oft mehrere natürliche Möglichkeiten $\mathcal{D}(A)$ zu wählen, der Definitionsbereich muss nicht der „maximal mögliche“ sein. Umgekehrt ist $\mathcal{D}(A^)$ entsprechend Def. 2.9 eindeutig durch A und $\mathcal{D}(A^*)$ festgelegt und muss ebenfalls nicht mit dem „maximal möglichen“ Definitionsbereich übereinstimmen.*

Beispiel 2.11

Wir definieren die (eindimensionalen) Sobolevräume

$$\begin{aligned} H^1(0, 1) &= \{u \in L^2(0, 1) : u' \in L^2(0, 1)\} \\ H_0^1(0, 1) &= \{u \in H^1(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\} \\ H_\pi^1(0, 1) &= \{u \in H^1(0, 1) : u(0) = u(1)\} \end{aligned}$$

Auf allen drei Räumen können wir den unbeschränkten Ableitungsoperator definieren

$$\begin{aligned} A_1 : D(A_1) \subset L^2(0, 1) &\rightarrow L^2(0, 1), & A_1 f &= f', & D(A_1) &= H^1(0, 1), \\ A_2 : D(A_2) \subset L^2(0, 1) &\rightarrow L^2(0, 1), & A_2 f &= f', & D(A_2) &= H_0^1(0, 1), \\ A_3 : D(A_3) \subset L^2(0, 1) &\rightarrow L^2(0, 1), & A_3 f &= f', & D(A_3) &= H_\pi^1(0, 1). \end{aligned}$$

Dann kann man zeigen, dass (siehe z.B. [Rudin, Ex. 13.4])

$$A_1^* = -A_2, \quad A_2^* = -A_1, \quad A_3^* = -A_3.$$

2.2 Moore-Penrose-Inverse

In diesem Abschnitt ist immer $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein linearer beschränkter Operator zwischen Hilberträumen X und Y . Wir interessieren uns für die Lösung der linearen Gleichung

$$y = Ax$$

für möglicherweise nicht injektives und/oder nicht surjektives A .

Satz 2.12

Sei $y \in Y$. Äquivalent sind

(a) $x \in X$ löst $Ax = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}y$

(b) $x \in X$ minimiert das Residuum

$$\|Ax - y\|_Y \leq \|A\xi - y\|_Y \quad \forall \xi \in X.$$

(c) $x \in X$ löst die Normalgleichungen

$$A^*Ax = A^*y. \quad (2.3)$$

Beweis:

(a) \iff (b) folgt direkt aus unserer Definition von $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}$ und stetiger Fortsetzung.

(a) \iff (c): Nach Satz 2.6(a),(e) ist

$$Ax = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}y \iff Ax - y \in \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*) \iff A^*Ax = A^*y,$$

also gilt (a) \iff (c). \square

Satz 2.13

(a) Zu $y \in Y$ existiert genau dann eine Lösung der Normalgleichungen (2.3), wenn $y \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$.

(b) Zu $y \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$ existiert genau eine Lösung x^+ der Normalgleichungen mit minimaler Norm,

$$A^*Ax^+ = A^*y \quad \text{und} \quad \|x^+\| \leq \|x\| \quad \forall x \in (A^*A)^{-1}A^*y.$$

Beweis:

(a) Löst x die Normalgleichungen, so ist $Ax - y \in \mathcal{R}(A)^\perp$, also $y = Ax + y - Ax \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$.

Ist umgekehrt $y \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$, also $y = Ax + \eta$ mit $\eta \in \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$ dann folgt $A^*y = A^*Ax$.

(b) Die Menge $U := (A^*A)^{-1}A^*y$ ist das Urbild der abgeschlossenen einelementigen Menge $\{A^*y\}$ unter der stetigen Abbildung A^*A . U ist also abgeschlossen und damit vollständig.

Für die eindeutige Existenz eines Elementes $x^+ \in U$ mit minimaler Norm zeigen wir, dass jede minimierende Folge $x_n \in U$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \inf_{x \in U} \|x\|$ eine Cauchy-Folge ist: U ist offenbar konvex, insbesondere ist $\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m \in U \quad \forall n, m$ und damit

$$\begin{aligned} \inf_{x \in U} \|x\| &\leq \left\| \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m \right\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x_n\| + \frac{1}{2}\|x_m\| \rightarrow \inf_{x \in U} \|x\| \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \inf_{x \in U} \|x\|^2 &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m \right\|^2 \\ &= \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \|x_n\|^2 + \frac{1}{2}(x_n, x_m) + \frac{1}{4} \|x_m\|^2 \right), \end{aligned}$$

also $\lim_{n,m \rightarrow \infty} (x_n, x_m) = \inf_{x \in U} \|x\|^2$ und damit

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|^2 = 0.$$

Da U vollständig ist, existiert $x^+ := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in U$.

$$\|x^+\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \inf_{x \in U} \|x\|,$$

also ist x^+ eine Lösung der Normalgleichungen mit minimaler Norm.

Schließlich kann es keine weitere von x^+ verschiedene Lösung \hat{x} der Normalgleichungen mit minimaler Norm geben, da sonst $x^+, \hat{x}, x^+, \hat{x}, \dots$ eine minimierende Folge, jedoch keine Cauchy-Folge wäre. \square

Definition 2.14

Zu $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ definieren wir die Abbildung

$$A^+ : \mathcal{D}(A^+) \subset Y \rightarrow X, \quad y \mapsto x^+,$$

mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A^+) := \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$, durch die entsprechend Satz 2.13b) eindeutig bestimmte Minimum-Norm-Lösung x^+ der Normalgleichungen.

A^+ heißt verallgemeinerte oder Moore-Penrose-Inverse von A .

Satz 2.15

- (a) $\mathcal{D}(A^+) = Y$, genau dann wenn $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen ist.
- (b) $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{N}(A)^\perp$.
- (c) Löst x die Normalgleichungen $A^*Ax = A^*y$, so ist $x^+ = P_{\mathcal{N}(A)^\perp}x$.
- (d) A^+ ist linear.

Beweis:

(a) Gilt $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$, so ist $Y = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{D}(A^+)$.

Ist umgekehrt $Y = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$, dann folgt

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}(\overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{R}(A)^\perp) = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}(\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp) = \mathcal{R}(A).$$

(b)+(c) Sei $x^+ = A^+y$ mit $y \in \mathcal{D}(A^+)$. Angenommen $\exists x \in \mathcal{N}(A)$ mit $(x^+, x) \neq 0$. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ löst dann auch $x^+ + \lambda x$ die Normalengleichungen, aber wegen

$$\|x^+ + \lambda x\|^2 = \|x^+\|^2 + 2\lambda(x^+, x) + \lambda^2 \|x\|^2$$

können wir λ so wählen, dass $\|x^+ + \lambda x\| < \|x^+\|$ (z.B. $\lambda := -(x^+, x) / \|x\|^2$). Dies widerspricht der Minimalnormeigenschaft von x^+ . Es ist also $\mathcal{R}(A^+) \subseteq \mathcal{N}(A)^\perp$.

Aus $A^*Ax = A^*y$ folgt $A^*A(x - x^+) = 0$ und damit $(A(x - x^+), A(x - x^+)) = 0$. Es ist also $x - x^+ \in \mathcal{N}(A)$ und mit Satz 2.6 und $\mathcal{R}(A^+) \subseteq \mathcal{N}(A)^\perp$ folgt $x^+ = P_{\mathcal{N}(A)^\perp}x$ und damit (c). Da jedes x die Normalengleichungen zu $y := Ax$ löst, folgt damit auch $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{N}(A)^\perp$.

(d) Sind $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(A^+)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann löst $A^+y_1 + \lambda A^+y_2$ offenbar die Normalengleichungen zu $y_1 + \lambda y_2$. Mit (c) und (b) folgt

$$A^+(y_1 + \lambda y_2) = P_{\mathcal{N}(A)^\perp}(A^+y_1 + \lambda A^+y_2) = A^+y_1 + \lambda A^+y_2. \quad \square$$

Satz 2.16

Die Moore-Penrose-Inverse A^+ ist die einzige Abbildung

$$\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp \subseteq Y \rightarrow X,$$

die die folgenden vier Moore-Penrose-Axiome erfüllt

$$\begin{aligned} AA^+A &= A & \text{auf } X, & & A^+A &= P_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}} & \text{auf } X, \\ A^+AA^+ &= A^+ & \text{auf } \mathcal{D}(A^+), & & AA^+ &= P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}, & \text{auf } \mathcal{D}(A^+). \end{aligned}$$

Beweis:

Da A^+y die Normalengleichungen löst folgt mit Satz 2.12(a)

$$AA^+y = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}y \quad \forall y \in \mathcal{D}(A^+)$$

und damit auch

$$AA^+Ax = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}Ax = Ax \quad \forall x \in X.$$

Jedes $x \in X$ löst die Normalengleichungen zu $y := Ax \in \mathcal{D}(A^+)$, also folgt aus Satz 2.15c)

$$A^+Ax = x^+ = P_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}}x$$

und damit wegen $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{N}(A)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ auch

$$A^+AA^+y = P_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}}A^+y = A^+y \quad \forall y \in \mathcal{D}(A^+).$$

Erfülle nun umgekehrt $A^\circ : \mathcal{D}(A^\circ) = \mathcal{D}(A^+) \subset Y \rightarrow X$ die Moore-Penrose-Axiome. Für $y \in \mathcal{D}(A^+)$ und $x = A^\circ y$ ist dann

$$Ax = AA^\circ y = P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}y,$$

Nach Satz 2.12 löst $x = A^\circ y$ also die Normalgleichungen. Mit Satz 2.15c) folgt

$$A^+y = P_{\overline{\mathcal{R}(A^*)}}A^\circ y = A^\circ AA^\circ y = A^\circ y. \quad \square$$

Bemerkung 2.17

(a) Aus

$$\mathcal{N}(A^*A) = \{x : A^*Ax = 0\} \subseteq \{x : (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = 0\} = \mathcal{N}(A)$$

folgt $\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)$.

(b) Ist A injektiv, so besitzt A^*A eine Linksinverse $(A^*A)^{-1}$ und es gilt

$$A^+y = (A^*A)^{-1}A^*y \quad \text{für alle } y \in \mathcal{D}(A^+).$$

(c) Endlich-dimensionale Vektorräume sind (bzgl. jeder Norm) vollständig. Für lineare beschränkte Operatoren mit $\dim \mathcal{R}(A) < \infty$ gilt also stets $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$ und damit $\mathcal{D}(A^+) = Y$.

2.3 Kompakte Operatoren

2.3.1 Definition und erste Eigenschaften

Definition 2.18

$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt kompakt, falls das Bild jeder in X beschränkten Folge eine konvergente Teilfolge in Y besitzt bzw. (äquivalent dazu) wenn $\overline{A(B)}$ kompakt ist für alle beschränkten Teilmengen $B \subset X$. Die Menge aller kompakten Operatoren bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(X, Y)$.

Satz 2.19

(a) $\mathcal{K}(X, Y)$ ist ein Vektorraum. Jede Hintereinanderausführung von kompakten Operatoren und stetigen Operatoren ist wiederum kompakt.

- (b) Jeder stetige Operator mit endlich dimensionalem Bild ist kompakt (die sogenannten degenerierte Operatoren).
- (c) $\mathcal{K}(X, Y)$ ist abgeschlossen bezüglich der Operatornorm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$. Insbesondere ist also wegen (b) jeder Grenzwert degenerierter Operatoren kompakt.

Beweis:

- (a) ist trivial.
- (b) folgt aus dem Satz von Bolzano-Weierstrass.
- (c) Sei $(K_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(X, Y)$ mit $K_k \rightarrow K \in \mathcal{L}(X, Y)$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{1,l})_{l \in \mathbb{N}}$, sodass $K_1 x_{1,l}$ konvergiert. Von dieser existiert wiederum eine Teil-Folge $(x_{2,l})_{l \in \mathbb{N}}$, sodass $K_2 x_{2,l}$ konvergiert und davon eine Teil-Folge $(x_{3,l})_{l \in \mathbb{N}}$, u.s.w.

Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ bilden dann fast alle Glieder der Diagonalfolge $(x_{l,l})_{l \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_{k,l})_{l \in \mathbb{N}}$, sodass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(K_k x_{l,l})_{l \in \mathbb{N}} \subset Y$ konvergiert. Damit folgt für alle $k, l, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \|Kx_{l,l} - Kx_{m,m}\|_Y \\ & \leq \|Kx_{l,l} - K_k x_{l,l}\|_Y + \|K_k x_{l,l} - K_k x_{m,m}\|_Y + \|K_k x_{m,m} - Kx_{m,m}\|_Y \\ & \leq \|K - K_k\|_{\mathcal{L}(X, Y)} (\|x_{l,l}\|_X + \|x_{m,m}\|_X) + \|K_k x_{l,l} - K_k x_{m,m}\|_Y. \end{aligned}$$

Der erste Summand wird für hinreichend große k beliebig klein, der zweite Summand für hinreichend große $l(k), m(k)$. Es gilt also

$$\lim_{l, m \rightarrow \infty} \|Kx_{l,l} - Kx_{m,m}\|_Y = 0,$$

d.h. $(Kx_{l,l})_{l \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge und damit konvergent. □

Satz 2.20 (Arzela-Ascoli)

Sei $\Omega \subset X$ kompakt und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ eine gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Folge stetiger Funktionen $u_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, d.h.

$$\exists C > 0 : \sup_{x \in \Omega} |u_k(x)| \leq C \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.4}$$

und

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k(x) - u_k(y)| \rightarrow 0 \quad \text{für } \|x - y\|_X \rightarrow 0. \tag{2.5}$$

Dann besitzt $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge in $C(\Omega)$ bezüglich der Supremumsnorm $\|u\|_{C(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$.

Beweis:

- (a) Wir zeigen zuerst, dass $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Fast-Cauchy-Folgen besitzt, d.h. zu jedem $\delta > 0$ existiert eine Teilfolge $(u_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$\limsup_{i,j \rightarrow \infty} \|u_{k_i} - u_{k_j}\|_{C(\Omega)} < \delta. \quad (2.6)$$

Hierzu sei $\epsilon > 0$. Wir überdecken $[-C, C] \subset \mathbb{R}$ und $\Omega \subset X$ mit ϵ -Kugeln. Seien also $(x_m)_{m=1}^M \subset \Omega$ und $(y_l)_{l=1}^L \subset [-C, C]$, sodass

$$\Omega \subset \bigcup_{m=1}^M B_\epsilon(x_m) \quad \text{und} \quad [-C, C] \subset \bigcup_{l=1}^L B_\epsilon(y_l).$$

Wegen (2.4) bildet jedes Element u_k der Funktionenfolge die Punkte $(x_m)_{m=1}^M$ nach $(u_k(x_m))_{m=1}^M \subset [-C, C]$ ab, wir können also jedem u_k (mindestens) eine Abbildung

$$\pi : \{1, \dots, M\} \rightarrow \{1, \dots, L\}$$

mit $|u_k(x_m) - y_{\pi(m)}| < \epsilon$ zuordnen.

Da es nur endlich viele solcher Abbildung gibt, existiert ein π , dem unendlich viele u_k , also eine Teilfolge $(u_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, zugeordnet werden. Für jedes $x \in \Omega$ existiert ein $m \in \{1, \dots, M\}$ mit $x \in B_\epsilon(x_m)$ und es gilt

$$\begin{aligned} |u_{k_i}(x) - u_{k_j}(x)| &\leq |u_{k_i}(x) - u_{k_i}(x_m)| + |u_{k_i}(x_m) - y_{\pi(m)}| \\ &\quad + |y_{\pi(m)} - u_{k_j}(x_m)| + |u_{k_j}(x_m) - u_{k_j}(x)| \\ &\leq 2\epsilon + 2 \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{\|x-y\|_X < \epsilon} |u_k(x) - u_k(y)| =: \delta_\epsilon. \end{aligned}$$

Wegen (2.5) konvergiert $\delta_\epsilon \rightarrow 0$ für $\epsilon \rightarrow 0$. Für jedes beliebig kleine $\delta > 0$ finden wir also eine Teilfolge mit der Eigenschaft (2.6).

- (b) Nun konstruieren wir aus den Fast-Cauchy-Folgen richtige Cauchy-Folgen. Nach (a) existiert eine Teilfolge, die (2.6) mit $\delta_1 = 1$ erfüllt. Auf diese können wir wiederum (a) anwenden und finden so eine Teilfolge, die (2.6) mit $\delta_2 = \frac{1}{2}$ und darin wiederum eine, die (2.6) mit $\delta_3 = \frac{1}{3}$ erfüllt, u.s.w.

Wir nehmen nun das erste Glied der Teilfolge zu $\delta_1 = 1$, dann das zweite Glied der Teilfolge zu $\delta_2 = \frac{1}{2}$, u.s.w. So erhalten wir eine Teilfolge $(u_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ der ursprünglichen Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\limsup_{i,j \rightarrow \infty} \|u_{k_i} - u_{k_j}\|_{C(K)} \leq \delta_l = \frac{1}{l} \rightarrow 0,$$

also eine Cauchy-Folge. Da $C(\Omega)$ vollständig ist, konvergiert die Teilfolge $(u_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$. \square

Satz 2.21

Ist $K \in \mathcal{K}(X, Y)$, so ist $K^* \in \mathcal{K}(Y, X)$.

Beweis:

Sei $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset Y$ beschränkt. Wir müssen zeigen, dass $(K^*y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Dazu definieren wir zuerst

$$l_k : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad l_k(\eta) := (y_k, \eta).$$

Offenbar ist $l_k \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{R})$ und

$$|l_k(\eta) - l_k(\eta')| = |(y_k, \eta - \eta')| \leq \|y_k\|_Y \|\eta - \eta'\|_Y \quad \forall \eta, \eta' \in Y,$$

also sind die $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ als stetige Funktionen auf Y auch gleichgradig stetig.

Sei $B := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\} \subset X$ die Einheitskugel in X . Da K kompakt ist, ist $\Omega := \overline{K(B)} \subset Y$ eine kompakte Teilmenge von Y .

Die Folge der Einschränkungen $(l_k|_{\Omega})_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ ist auf Ω gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig, besitzt also nach dem Satz von Arzela-Ascoli (Satz 2.20) eine in $C(\Omega)$ konvergente Teilfolge $(l_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$.

Für $(l_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \sup_{\eta \in \Omega} |l_{k_i}(\eta) - l_{k_j}(\eta)| = 0,$$

und damit insbesondere

$$\begin{aligned} \lim_{i, j \rightarrow \infty} \left\| K^*(y_{k_i} - y_{k_j}) \right\|_X &= \lim_{i, j \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} |(K^*(y_{k_i} - y_{k_j}), x)_X| \\ &= \lim_{i, j \rightarrow \infty} \sup_{\eta \in K(B)} |(y_{k_i} - y_{k_j}, \eta)_Y| = 0. \end{aligned}$$

$(K^*(y_{k_j}))_{j \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge, und damit konvergent. □

Satz 2.22

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zu einer Kernfunktion $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ definieren wir den Fredholm-Integraloperator der 1. Art

$$K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad (Kf)(x) := \int_{\Omega} k(x, y)f(y) dy.$$

K ist kompakt, $\|K\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}$ und K^* ist gegeben durch

$$K^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad (K^*g)(x) := \int_{\Omega} k(y, x)g(y) dy.$$

Beweis:

Für alle $f \in L^2(\Omega)$ ist

$$\begin{aligned} \|Kf\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int |(Kf)(x)|^2 dx = \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} k(x, y) f(y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |k(x, y)|^2 dy \right) \left(\int_{\Omega} |f(y)|^2 dy \right) dx \\ &= \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

also

$$K \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)) \quad \text{und} \quad \|K\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq \|k\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}.$$

Da K offenbar linear von k abhängt, folgt damit auch dass $K \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ stetig von $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ abhängt. Da $C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ dicht in $L^2(\Omega \times \Omega)$ liegt (siehe z.B. [Forster3, §10, Satz 3]), genügt es nach Satz 2.19 die Kompaktheit von K für $k \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ zu zeigen.

Sei also $k \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ und $(f_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ beschränkt. Wir zeigen, dass $(Kf_l)_{l \in \mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli erfüllt.

Glm. Beschränktheit:

$$|Kf_l(x)|^2 \leq \int_{\Omega} |k(x, y)|^2 dy \|f_l\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |\Omega| \sup_{y \in \Omega} |k(x, y)|^2 \|f_l\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.7)$$

also $\sup_{x \in \Omega, l \in \mathbb{N}} |Kf_l(x)| < \infty$.

Glgd. Stetigkeit:

$$\begin{aligned} |(Kf_l)(x) - (Kf_l)(\xi)|^2 &= \left| \int_{\Omega} (k(x, y) - k(\xi, y)) f_l(y) dy \right|^2 \\ &\leq \|f_l\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_{\Omega} |k(x, y) - k(\xi, y)|^2 dy \\ &\leq \|f_l\|_{L^2(\Omega)}^2 |\Omega| \sup_{y \in \Omega} |k(x, y) - k(\xi, y)|^2 \end{aligned}$$

Da k glm. stetig ist und f_l beschränkt ist, folgt

$$\sup_{l \in \mathbb{N}} |(Kf_l)(x) - (Kf_l)(\xi)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |x - \xi| \rightarrow 0,$$

insbesondere also auch $Kf_l \in C(\overline{\Omega})$.

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli besitzt Kf_l eine in $C(\overline{\Omega})$ konvergente Teilfolge und genauso wie in (2.7) folgt, dass diese auch in $L^2(\Omega)$ konvergiert. K ist also kompakt.

Schließlich ist für alle $f, g \in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} (f, K^*g) &= (Kf, g) = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} k(x, y) f(y) dy \right) g(x) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x) \left(\int_{\Omega} k(y, x) g(y) dy \right) dx, \end{aligned}$$

also $(K^*g)(x) = \int_{\Omega} k(y, x)g(y) dy$. □

Korollar 2.23

Den Operator aus Abschnitt 1.2

$$A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1), \quad (Af)(x) := \int_0^x f(y) dy$$

können wir als Integraloperator

$$(Af)(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy, \quad \text{mit } k(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{für } y < x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

schreiben.

Offenbar ist $k \in L^2((0, 1)^2)$, also ist A nach Satz 2.22 kompakt.

2.3.2 Spektraltheorie kompakter Operatoren

Satz 2.24

Sei $A \in \mathcal{L}(X)$, $A = A^*$. Dann ist

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Beweis:

Offenbar ist

$$S := \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

Außerdem gilt für jedes $c > 0$

$$\begin{aligned} 4 \|Ax\|^2 &= \left(A \left(cx + \frac{1}{c} Ax \right), \left(cx + \frac{1}{c} Ax \right) \right) \\ &\quad - \left(A \left(cx - \frac{1}{c} Ax \right), \left(cx - \frac{1}{c} Ax \right) \right) \\ &\leq S \left(\left\| cx + \frac{1}{c} Ax \right\|^2 + \left\| cx - \frac{1}{c} Ax \right\|^2 \right) \\ &= 2S \left(c^2 \|x\|^2 + \frac{1}{c^2} \|Ax\|^2 \right). \end{aligned}$$

Für $Ax \neq 0$ wähle $c^2 = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ dann folgt (offenbar auch für $Ax = 0$)

$$\|Ax\| \leq S \|x\|,$$

also $S \geq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$. □

Satz 2.25

Für $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ gilt $\|A^*A\|_{\mathcal{L}(X)} = \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)}^2$.

Beweis:

Es gilt

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)}^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (A^*Ax, x) = \|A^*A\|_{\mathcal{L}(X)},$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 2.24 verwendet haben. □

Definition 2.26

Sei $A \in \mathcal{L}(X)$, $A = A^*$. A heißt

- (a) positiv, falls $(Ax, x) > 0$ für alle $x \neq 0$.
- (b) positiv semidefinit, falls $(Ax, x) \geq 0$ für alle $x \in X$.
- (c) positiv definit oder koerziv, falls

$$\exists \alpha > 0 : (Ax, x) \geq \alpha \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Analog heißt A negativ (neg. semidefinit, neg. definit), falls $-A$ positiv (pos. semidefinit, pos. definit) ist.

Definition und Satz 2.27

Ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ heißt Orthonormalbasis (ONB), falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (a) Das Erzeugnis $\langle e_1, e_2, \dots \rangle$ (d.h. der Raum aller endlichen Linearkombinationen) liegt dicht in X .
- (b) $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ für alle $x \in X$.
- (c) $(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)(\xi, e_n)$ für alle $x, \xi \in X$.
- (d) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)^2$ für alle $x \in X$.

Dies zeigt, dass wir $x \in X$ mit dem unendlichen langen Vektor seiner Entwicklungskoeffizienten

$$x = \begin{pmatrix} (x, e_1) \\ (x, e_2) \\ \vdots \end{pmatrix} \in l^2$$

identifizieren können und damit wie im endlich-dimensionalen rechnen können.

Hilberträume in denen eine (endliche oder abzählbare unendliche) ONB existiert heißen separabel.

Beweis:

Für jedes $x \in X$ und $V_N := \langle e_1, \dots, e_N \rangle$ gilt offenbar

$$\xi := \sum_{n=1}^N (x, e_n) e_n \in V_N, \quad x - \xi \in V_N^\perp,$$

also ist nach Satz 2.6 $P_{V_N} x = \xi$ und damit insbesondere

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N (x, e_n) e_n \right\| = \min_{v \in V_N} \|x - v\| = \text{dist}(x, \langle e_1, \dots, e_N \rangle). \quad (2.8)$$

(a) \implies (b): Sei $x \in X$ und

$$x_m \in \langle e_1, e_2, \dots \rangle \quad \text{mit} \quad x_m \rightarrow x.$$

Dann ist $x_m \in V_{N_m}$ für ein $N_m \in \mathbb{N}$ und mit (2.8) folgt für jedes $N \geq N_m$

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N (x, e_n) e_n \right\| \leq \|x - x_m\| \rightarrow 0,$$

also $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (x, e_n) e_n = x$.

(b) \implies (c): folgt aus der Stetigkeit des Skalarproduktes.

(c) \implies (d): setze $\xi := x$.

(d) \implies (a): Wir wenden (d) auf $\xi := x - \sum_{n=1}^N (x, e_n) e_n$ an und erhalten

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N (x, e_n) e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi, e_n)^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} (x, e_n)^2 \rightarrow 0.$$

Dies zeigt (b) und damit insbesondere auch (a). □

Satz 2.28

Sei $K \in \mathcal{K}(X)$, $K = K^*$ und K positiv semidefinit. Dann hat K nur abzählbar viele von Null verschiedene Eigenwerte

$$\|K\| = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots > 0,$$

die sich höchstens im Nullpunkt häufen (d.h. falls unendlich viele Eigenwerte existieren, so ist $\lambda_n \rightarrow 0$).

Die zugehörigen Eigenvektoren v_n können so gewählt werden, dass sie eine ONB von $\mathcal{N}(K)^\perp$ bilden.

Beweis:

Für $K = 0$ ist die Aussage trivial. Für $K \neq 0$, existiert wegen Satz 2.24 eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ mit

$$\|x_k\| = 1, \quad (Kx_k, x_k) \rightarrow \|K\| =: \lambda_1 > 0.$$

Aus

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Kx_k - \lambda_1 x_k\|^2 = \|Kx_k\|^2 - 2\lambda_1(Kx_k, x_k) + \lambda_1^2 \|x_k\|^2 \\ &\leq 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1(Kx_k, x_k) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

folgt

$$Kx_k - \lambda_1 x_k \rightarrow 0. \tag{2.9}$$

Da K kompakt besitzt Kx_k eine konvergente Teilfolge, o.B.d.A. sei dies bereits Kx_k . Aus (2.9) folgt, dass auch x_k konvergiert. Mit $v_1 := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ ist dann

$$\|v_1\| = 1, \quad Kv_1 - \lambda_1 v_1 = 0.$$

v_1 ist also Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 .

Nun setzen wir $X_1 = \langle v_1 \rangle^\perp$. Für jedes $x \in X_1$ ist

$$(Kx, v_1) = (x, Kv_1) = \lambda_1(x, v_1) = 0,$$

also $K(X_1) \subseteq X_1$. Offenbar ist damit $K_1 := K|_{X_1} \in \mathcal{K}(X_1)$ positiv semidefinit, $K_1 = K_1^*$ und $\|K_1\| \leq \|K\|$. Ist $K_1 = 0$, so ist die Aussage bewiesen, anderenfalls existieren $v_2 \in X_1$ und $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$, sodass $Kv_2 = K_1 v_2 = \lambda_2 v_2$.

Wir fahren so fort und erhalten eine (möglicherweise abbrechende) Folge von Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$ mit zugehörigem ONS von Eigenvektoren (v_1, v_2, v_3, \dots) . Die Folge ist genau dann endlich, wenn $K_m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und in diesem Fall ist die Aussage bewiesen.

Wir zeigen jetzt, dass $\lambda_n \rightarrow 0$, falls die Folge unendlich ist. Angenommen $\exists \epsilon > 0$ mit $\lambda_n \geq \epsilon$. Dann ist $\left\| \frac{1}{\lambda_n} v_n \right\| \leq \frac{1}{\epsilon}$. Da K kompakt ist, hat also $K \left(\frac{1}{\lambda_n} v_n \right) = v_n$ eine konvergente Teilfolge. Dies widerspricht aber der Orthogonalität der v_n .

Es ist noch zu zeigen, dass $\overline{\langle v_1, v_2, \dots \rangle} = \mathcal{N}(K)^\perp$. Sei dazu $v \in \langle v_1, v_2, \dots \rangle^\perp$. Dann liegt nach Konstruktion $v \in X_n$, also $\|Kv\| = \|K_n v\| \leq \lambda_{n+1} \|v\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $Kv = 0$. Damit ist

$$\langle v_1, v_2, \dots \rangle^\perp = \mathcal{N}(K),$$

also nach Satz 2.6 $\overline{\langle v_1, v_2, \dots \rangle} = \mathcal{N}(K)^\perp$.

Wie im endlich-dimensionalen gilt, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen, sodass damit auch gezeigt ist, dass keine weiteren (von Null verschiedenen) Eigenwerte existieren können. \square

Definition und Satz 2.29

Für jedes $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ existiert eine (möglicherweise endliche) Folge

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots > 0$$

von sich höchstens im Nullpunkt häufenden Zahlen, sowie Orthonormalfolgen

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y, \quad (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \quad \text{mit} \quad Kv_n = \sigma_n u_n, \quad K^* u_n = \sigma_n v_n.$$

Außerdem ist $\|K\| = \sigma_1$ und $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bildet eine ONB von $\mathcal{N}(K)^\perp$.

(u_n, v_n, σ_n) heißt Singulärwertzerlegung.

Beweis:

Offenbar ist $K^*K \in \mathcal{K}(X)$ selbstadjungiert und positiv semidefinit. Nach Satz 2.28 existiert also eine ONB $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{N}(K^*K)^\perp = \mathcal{N}(K)^\perp$ (siehe Bemerkung 2.17(a)), sowie eine Folge

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > 0,$$

mit $K^*K v_n = \lambda_n v_n$ und $\lambda_1 = \|K^*K\| = \|K\|^2$ (siehe Satz 2.25).

Mit $\sigma_n := \sqrt{\lambda_n}$ und $u_n := \frac{1}{\sigma_n} K v_n$ folgt

$$K v_n = \sigma_n u_n, \quad K^* u_n = \frac{1}{\sigma_n} K^* K v_n = \sigma_n v_n, \quad \|K\| = \sigma_1$$

und wegen

$$(u_n, u_m) = \frac{1}{\sigma_n \sigma_m} (K v_n, K v_m) = \frac{\lambda_n}{\sigma_n \sigma_m} (v_n, v_m) = \delta_{nm}.$$

ist auch $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem. \square

Bemerkung 2.30

Sei $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ und (u_n, v_n, σ_n) seine Singulärwertzerlegung.

- (a) Da (v_n) eine ONB von $\mathcal{N}(K)^\perp$ bildet, können wir jedes $x \in X$ gemäß Satz 2.27 schreiben als

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n, x) v_n \quad \text{mit } x_0 \in \mathcal{N}(K).$$

Es gilt also

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n (v_n, x) u_n.$$

- (b) Wir definieren $A_N : X \rightarrow Y$ durch

$$A_N x = \sum_{n=1}^N \sigma_n (v_n, x) u_n.$$

Dann ist $\dim \mathcal{R}(A_N) \leq N < \infty$.

Aus Satz 2.27 und Satz 2.29 folgt, dass für alle $x \in X$

$$\begin{aligned} \|Kx - A_N x\|^2 &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \sigma_n (v_n, x) u_n \right\|^2 \leq \sigma_{N+1}^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (v_n, x)^2 \\ &\leq \sigma_{N+1}^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\|K - A_N\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \rightarrow 0, \quad \text{d.h. } A_N \rightarrow K$$

Zusammen mit Satz 2.19 erhalten wir, dass die kompakten Operatoren genau der Abschluss der Operatoren mit endlich-dimensionalen Bild (sog. degenerierte Operatoren) sind.

- (c) Wir können

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n (v_n, x) u_n,$$

auch formal mit unendlich-dimensionalen Matrizen schreiben als

$$K = U \Sigma V^*,$$

mit

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots \end{pmatrix} & V &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots \end{pmatrix} \\
 V^* &= \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \end{pmatrix}, & V^*x &= \begin{pmatrix} (v_1, x) \\ (v_2, x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \\
 \Sigma &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Satz 2.31

Sei $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ und (u_n, v_n, σ_n) seine Singulärwertzerlegung.

(a) Für jedes $y \in Y$ gilt

$$y \in \mathcal{D}(K^+) = \mathcal{R}(K) \oplus \mathcal{R}(K)^\perp \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y, u_n)^2}{\sigma_n^2} < \infty$$

(Picard-Kriterium)

(b) Für alle $y \in \mathcal{D}(K^+)$ gilt

$$K^+y = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1}(y, u_n)v_n.$$

Beweis:

(a) „ \implies “ **und** (b): Sei $y \in \mathcal{D}(K^+)$ und $x = K^+y$, dann ist $K^*Kx = K^*y$, also

$$(y, u_n) = \frac{1}{\sigma_n}(y, Kv_n) = \frac{1}{\sigma_n}(K^*y, v_n) = \frac{1}{\sigma_n}(K^*Kx, v_n) = \sigma_n(x, v_n).$$

Außerdem ist $x \in \mathcal{R}(K^+) = \mathcal{N}(K)^\perp$, d.h.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, v_n)v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1}(y, u_n)v_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y, u_n)^2}{\sigma_n^2}.$$

(a) „ \impliedby “: Nun sei $y \in Y$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y, u_n)^2}{\sigma_n^2}$ konvergiere. Dann bildet

$$\left(\sum_{n=1}^N \sigma_n^{-1}(y, u_n)v_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

eine Cauchy-Folge, sodass der Grenzwert $x := \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{-1}(y, u_n)v_n$ existiert.

Da $K^*y \in \mathcal{N}(K)^\perp$ liegt, ist außerdem

$$K^*y = \sum_{n=1}^{\infty} (K^*y, v_n)v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(y, u_n)v_n = K^*Kx,$$

also nach Satz 2.13(a) $y \in D(K^+)$. □

Satz 2.32

Sei $K \in \mathcal{K}(X, Y)$. K^+ ist genau dann stetig, wenn K degeneriert ist.

Beweis:

Ist K degeneriert, d.h. existiert eine endliche Singulärwertzerlegung $(u_n, v_n, \sigma_n)_{n=1}^N$, so ist für alle $y \in \mathcal{D}(K^+)$

$$\|K^+y\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^N \sigma_n^{-1}(y, u_n)v_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \frac{(y, u_n)^2}{\sigma_n^2} \leq \frac{1}{\sigma_N^2} \|y\|^2,$$

also K^+ stetig.

Im Falle einer unendlichen Singulärwertzerlegung $(u_n, v_n, \sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist $K^+u_n = \frac{1}{\sigma_n}v_n$ unbeschränktes Bild der beschränkten Folge (u_n) , also K^+ nicht stetig. □

Beispiel 2.33

Wir betrachten wieder den Operator aus Abschnitt 1.2 und Folgerung 2.23

$$A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1), \quad Af := \int_0^x f(y) dy = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy,$$

mit

$$k(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{für } y < x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In den Übungen zeigen wir, dass die Singulärwertzerlegung von A gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \frac{1}{(j - 1/2)\pi}, \\ v_j(x) &= \sqrt{2} \cos((j - 1/2)\pi x), \\ u_j(x) &= \sqrt{2} \sin((j - 1/2)\pi x). \end{aligned}$$

Einige weitere wichtige Eigenschaften kompakter Operatoren werden wir in Abschnitt 3.2 behandeln.

Kapitel 3

Regularisierung linearer Probleme

In diesem Kapitel seien weiterhin X, Y Hilberträume. Außerdem sei stets $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ und (u_n, v_n, σ_n) seine Singulärwertzerlegung.

Wir betrachten wieder das Problem $Kx = y$ zu lösen, wobei wir annehmen, dass wir y nur bis auf einen kleinen Messfehler δ kennen, d.h. wir kennen y^δ mit $\|y^\delta - y\| < \delta$.

Die Moore-Penrose-Inverse K^+ ist nicht überall definiert und nicht stetig, d.h. im Allgemeinen ist $y^\delta \notin \mathcal{D}(K^+)$ und selbst wenn $y^\delta, y \in \mathcal{D}(K^+)$, so kann (für beliebig kleine $\delta > 0$) die Abweichung $K^+y^\delta - K^+y$ beliebig groß sein. Die naive Anwendung der Moore-Penrose-Inverse scheitert also selbst für beliebig kleine Messfehler!

Idee dieses Kapitels: Ersetze K^+ durch stetige Approximation R_α . Der Parameter α steuert dabei wie stetig R_α ist bzw. wie gut R_α die gewünschte Inverse K^+ approximiert.

Ziel: $R_{\alpha(\delta, y^\delta)}y^\delta \rightarrow x = K^+y$ für $\delta \rightarrow 0$.

3.1 Regularisierung

Definition 3.1

Eine Familie $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ von linearen Operatoren $R_\alpha : Y \rightarrow X$ heißt Regularisierung von K^+ für $\alpha \rightarrow 0$, falls

- (a) $R_\alpha \in \mathcal{L}(Y, X)$ für alle $\alpha > 0$ (Stabilität)

(b) $R_\alpha y \rightarrow K^+ y$ für alle $y \in \mathcal{D}(K^+)$ (pktw. Konvergenz).

Analog verwenden wir auch Regularisierungen $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und ersetzen in diesem Fall $\alpha \rightarrow 0$ durch $k \rightarrow \infty$.

Definition 3.2

Sei $(F_\alpha)_{\alpha > 0}$ eine Familie beschränkter Funktionen $F_\alpha : (0, \|K\|^2] \rightarrow \mathbb{R}$. $(F_\alpha)_{\alpha > 0}$ heißt Filter, falls

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F_\alpha(\lambda) = 1/\lambda \quad \forall \lambda \in (0, \|K\|^2].$$

Ist zusätzlich $\lambda F_\alpha(\lambda)$ glm. beschränkt in α , d.h.

$$\exists C > 0 : \lambda |F_\alpha(\lambda)| < C \quad \forall \alpha > 0, \lambda \in (0, \|K\|^2],$$

so heißt $(F_\alpha)_{\alpha > 0}$ regularisierender Filter.

Definition und Satz 3.3

Sei $(F_\alpha)_{\alpha > 0}$ ein Filter. Wir definieren damit

$$R_\alpha : Y \rightarrow X, \quad R_\alpha y := \sum_{n=1}^{\infty} F_\alpha(\sigma_n^2) \sigma_n(u_n, y) v_n$$

und schreiben auch formal $R_\alpha = F_\alpha(K^* K) K^*$.¹

Dann ist $R_\alpha \in \mathcal{L}(Y, X)$ und

$$\begin{aligned} \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y, X)} &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |F_\alpha(\sigma_n^2)| \|K^*\|_{\mathcal{L}(Y, X)}, \\ \|K R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y)} &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |F_\alpha(\sigma_n^2)| \sigma_n^2 \end{aligned}$$

Ist $(F_\alpha)_{\alpha > 0}$ ein regularisierender Filter, so gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha y = K^+ y \quad \text{für alle } y \in \mathcal{D}(K^+),$$

$(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ ist also eine Regularisierung für K^+ .

Beweis:

Für jedes α ist F_α beschränkt und damit

$$\begin{aligned} \|R_\alpha y\|^2 &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |F_\alpha(\sigma_n^2)|^2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(u_n, y) v_n \right\|^2 \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |F_\alpha(\sigma_n^2)|^2 \|K^* y\|^2 \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |F_\alpha(\sigma_n^2)|^2 \|K^*\|^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

¹Die Frage, für welche Funktionen dies mehr als nur formale Bedeutung hat ist Gegenstand des sog. *Funktionalkalküls* und wird uns in dieser Vorlesung nicht beschäftigen.

Es ist also $R_\alpha \in \mathcal{L}(Y, X)$ und $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |F_\alpha(\sigma_n^2)| \|K^*\|$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \|KR_\alpha y\|^2 &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |F_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^2|^2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (u_n, y) u_n \right\|^2 \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |F_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^2|^2 \|y\|^2, \end{aligned}$$

also $\|KR_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |F_\alpha(\sigma_n^2)|\sigma_n^2$.

Nun sei $y \in D(K^+)$. Mit Satz 2.31 ist $\frac{1}{\sigma_n}(u_n, y) = (v_n, K^+y)$ und

$$\begin{aligned} \|(K^+ - R_\alpha)y\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^{-1} - F_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n) (u_n, y) v_n \right\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^{-1} - F_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n)^2 (u_n, y)^2 \\ &= \sum_{n=1}^N (1 - F_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^2)^2 (v_n, K^+y)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} (1 - F_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^2)^2 (v_n, K^+y)^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^N (1 - F_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^2)^2 (v_n, K^+y)^2 + (1 + C)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (v_n, K^+y)^2, \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ die Konstante aus der Definition regularisierender Filter ist. Der zweite Summand wird unabhängig von α beliebig klein für $N \rightarrow \infty$ und der erste Summand wird für festes N und $\alpha \rightarrow 0$ beliebig klein. Es folgt

$$R_\alpha y \rightarrow K^+ y. \quad \square$$

Beispiel 3.4

(a) Durch

$$F_\alpha(\lambda) := \begin{cases} \lambda^{-1} & : \lambda \geq \alpha \\ 0 & : \lambda < \alpha \end{cases}$$

ist offenbar ein regularisierender Filter definiert. Er führt zur abgeschnittenen Singulärwertzerlegung

$$R_\alpha y = \sum_{\sigma_n \geq \sqrt{\alpha}} \sigma_n^{-1} (u_n, y) v_n.$$

(b) Durch

$$F_\alpha(\lambda) := \frac{1}{\lambda + \alpha}$$

ist ebenfalls offenbar ein regularisierender Filter definiert. Er führt zur Tikhonov-Regularisierung

$$R_\alpha y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} (u_n, y) v_n.$$

Bemerkung 3.5 (Motivation der Tikhonov-Regularisierung)

Ist K nicht degeneriert, dann ist K^+ nicht stetig. Es existiert also keine Konstante $C > 0$ mit

$$\|x\|_X \leq C \|Kx\|_Y \quad \forall x \in X.$$

Möglicherweise divergiert also $\|K^+ y^\delta\|_X \rightarrow \infty$ für $\delta \rightarrow 0$, d.h. für immer kleinere Messfehler konvergieren unsere naiven Lösungen i.A. nicht nur nicht, sondern können sogar beliebig groß werden!

Ein naheliegender praktischer Ansatz ist daher das Problem nur so gut es geht zu lösen, und gleichzeitig zu verhindern, dass die Norm der Lösung zu groß wird, d.h. zu y suchen wir den Minimierer $x_\alpha = R_\alpha y$ von

$$\|y - Kx\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2 \rightarrow \min! \tag{3.1}$$

Der Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ steuert dabei, ob die Lösung auf Kosten Ihrer Regularität (hier: ihrer $\|\cdot\|_X$ -Norm) besser zu den Daten passen soll ($\alpha \rightarrow 0$) oder umgekehrt ($\alpha \rightarrow \infty$).

Die Minimierungsaufgabe lässt sich auch schreiben als

$$\left\| \begin{pmatrix} K \\ \sqrt{\alpha}I \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{Y \times X}^2 = \left\| \begin{pmatrix} Kx - y \\ \sqrt{\alpha}x \end{pmatrix} \right\|_{Y \times X}^2 \rightarrow \min!$$

Gemäß Satz 2.12 löst der Minimierer x_α die Normalgleichungen

$$\begin{pmatrix} K^* & \sqrt{\alpha}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ \sqrt{\alpha}I \end{pmatrix} x_\alpha = \begin{pmatrix} K^* & \sqrt{\alpha}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$(K^*K + \alpha I)x_\alpha = K^*y. \tag{3.2}$$

Wir verwenden die Singulärwertzerlegung von K und erhalten

$$x_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (x_\alpha, v_n) v_n + x_0, \quad x_0 \in \mathcal{N}(K)$$

und

$$\mathcal{N}(K)^\perp \ni K^*y = \sum_{n=1}^{\infty} (K^*y, v_n)v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(u_n, y)v_n.$$

x_α löst also

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^2 + \alpha)(x_\alpha, v_n)v_n + \alpha x_0 = (K^*K + \alpha I)x_\alpha = K^*y = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(u_n, y)v_n$$

und durch Koeffizientenvergleich folgt

$$x_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (x_\alpha, v_n)v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} (u_n, y)v_n.$$

Bemerkung 3.6

Für die abgeschnittene Singulärwertzerlegung wissen wir schon aus Satz 2.31, dass

$$\|R_\alpha y\| \rightarrow \infty \quad \text{falls } y \notin \mathcal{D}(K^+).$$

Tatsächlich kann es keine Regularisierung geben für die $\|R_\alpha\|$ beschränkt bleibt. Um dies zu zeigen benötigen wir jedoch noch einige Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis.

3.2 Schwache Konvergenz

Satz 3.7

- (a) Ist $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k$ mit abgeschlossenen Mengen V_k , so besitzt mindestens ein V_k nicht-leeres Inneres, d.h.

$$\exists k \in \mathbb{N}, x \in X, \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset V_k.$$

(Baire'scher Kategoriensatz)

- (b) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ punktweise beschränkt, d.h.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n x\| < \infty \quad \forall x \in X,$$

so ist A_n beschränkt, also $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty$.
(Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit)

Beweis:

- (a) Angenommen kein V_k enthält eine Kugel $B_\epsilon(x)$. Zu $\epsilon_0 := 1$ und $x_0 := 0$ ist dann $B_{\epsilon_0}(x_0) \setminus V_1$ nichtleer und offen. Es existiert also $\epsilon_1 < 1$, $x_1 \in B_{\epsilon_0}(x_0)$ mit $\overline{B_{\epsilon_1}(x_1)} \subset B_{\epsilon_0}(x_0) \setminus V_1$.

$B_{\epsilon_1}(x_1) \setminus V_2$ ist wiederum nichtleer und offen, enthält also eine abgeschlossene Kugel $\overline{B_{\epsilon_2}(x_2)}$ mit $0 < \epsilon_2 < 1/2$, $x_2 \in B_{\epsilon_1}(x_1)$. Wir fahren so fort und wählen dabei immer $\epsilon_n < 1/n$. Dies ergibt eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deren Grenzwert $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ in jedem $\overline{B_{\epsilon_k}(x_k)}$ und damit in keinem V_k liegt. Dies widerspricht $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k$.

(b) Setze

$$V_k := \{x \in X : \|A_n x\| \leq k \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Die V_k sind offensichtlich abgeschlossen und aus der punktweise Beschränktheit folgt $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k$. Nach (a) existiert ein K und eine Kugel $B_\epsilon(x_0)$ mit $B_\epsilon(x_0) \subset V_K$, also

$$\|A_n(x + x_0)\| \leq K \quad \forall \|x\| < \epsilon, \ n \in \mathbb{N}.$$

Aus der Linearität von A_n folgt

$$\|A_n(x)\| \leq 2K \quad \forall \|x\| < \epsilon, \ n \in \mathbb{N},$$

und damit

$$\|A_n\| \leq \frac{2K}{\epsilon} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Satz 3.8 (Banach-Steinhaus)

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

(A_n) konvergiert genau dann punktweise gegen ein $A : X \rightarrow Y$, wenn

(a) $\exists C > 0 : \quad \|A_n\| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

(b) $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert für alle x in einer dichten Teilmenge $V \subseteq X$.

Außerdem ist dann $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Beweis:

„ \Leftarrow “: Sei $x \in X$. Wir zeigen, dass $(A_n x)$ eine Cauchy-Folge ist. Für alle $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \|A_n x - A_m x\| &\leq \|A_n x - A_n v\| + \|A_n v - A_m v\| + \|A_m v - A_m x\| \\ &\leq 2C \|x - v\| + \|A_n v - A_m v\|. \end{aligned}$$

Der erste Summand wird unabhängig von n, m beliebig klein für geeignetes v , der zweite Summand konvergiert für festes v und $n, m \rightarrow \infty$ gegen 0. $(A_n x)$ ist also eine Cauchy-Folge und damit konvergent.

Wir können also $Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ für alle $x \in X$ definieren. Die Linearität von A ist klar. Die Stetigkeit folgt aus

$$\|Ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq C \|x\|.$$

„ \implies “: Konvergiert A_n punktweise auf ganz X , so ist es insbesondere punktweise beschränkt, sodass (a) aus Satz 3.7(b) folgt. (b) ist trivial. \square

Definition 3.9

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ konvergiert schwach gegen $x \in X$, falls

$$(x_n, \xi) \rightarrow (x, \xi) \quad \text{für alle } \xi \in X.$$

Wir schreiben auch $x_n \rightharpoonup x$.

Offenbar ist der schwache Grenzwert eindeutig und die schwache Grenzwertbildung vertauscht mit den Vektorraumoperationen.

Bemerkung 3.10

Der Begriff Konvergenz ist in der Mathematik festgelegt. Ihn einfach umzudefinieren birgt die Gefahr vieler Missverständnisse. So ist etwa die Definition

$$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \quad \text{konvergiert gegen } a \in \mathbb{R}, \text{ falls } a_1 = a.$$

ziemlicher Unsinn und besitzt sicher nicht die bekannten und intuitiv erwarteten Eigenschaften eines Grenzwertbegriffs.

Von Konvergenz sollte man deshalb nur sprechen, wenn es eine Norm, Metrik oder zumindest Topologie gibt, die diese Konvergenz induziert. Wir werden die zu Definition 3.9 gehörige Topologie hier weder explizit angeben noch verwenden. Es ist aber wichtig festzustellen, dass es sie gibt.

Satz 3.11

- (a) Es gibt eine Topologie auf X , die die Konvergenz aus Definition 3.9 induziert und die X zu einem topologischen Vektorraum macht, d.h. in dieser Topologie sind die Vektorraumoperationen stetig und einelementige Mengen sind abgeschlossen.
- (b) Für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ folgt aus $x_n \rightarrow x$ auch $x_n \rightharpoonup x$.
- (c) Schwach konvergente Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sind beschränkt.
- (d) Ist $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, $x_n \rightharpoonup x \in X$, so gilt $Ax_n \rightharpoonup Ax \in Y$.

- (e) Ist $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, $x_n \rightharpoonup x \in X$, so gilt $Kx_n \rightarrow Kx$.
- (f) Gilt für eine schwach konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, $x_n \rightharpoonup x$ zusätzlich $\|x_n\| \leq \|x\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt sogar $x_n \rightarrow x$.

Beweis:

- (a) [Rudin, Chp. 3]
- (b) klar.
- (c) Für die Abbildungen

$$A_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}), \quad A_n \xi := (x_n, \xi)$$

gilt offenbar $\|A_n\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{R})} = \|x_n\|_X$. ($A_n \leftrightarrow x_n$ ist gerade der Riesz-Isomorphismus, vgl. Bemerkung 2.4). Schwache Konvergenz der x_n bedeutet punktweise Konvergenz der A_n , sodass die Beschränktheit aus Satz 3.8 folgt.

- (d) Für alle $y \in Y$ gilt

$$(Ax_n, y) = (x_n, A^*y) \rightarrow (x, A^*y) = (Ax, y),$$

also $Ax_n \rightharpoonup Ax$.

- (e) Nach (d) konvergiert $Kx_n \rightharpoonup Kx$. Da nach (c) (x_n) beschränkt ist, konvergiert eine Teilfolge von jeder Teilfolge von $(Kx_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Aus (b) und der Eindeutigkeit des schwachen Limes folgt, dass eine Teilfolge jeder Teilfolge gegen Kx konvergiert. Außerhalb jeder Umgebung von Kx können also nur endlich viele Kx_n liegen, sodass $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Kx_n$ folgt.

- (f) Es ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|^2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|x\|^2 - 2(x, x_n) + \|x_n\|^2) \leq 0. \quad \square$$

Satz 3.12

In einem Hilbertraum X besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.

Beweis:

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ beschränkt. Nach Satz 2.5 ist $V := \overline{\langle x_1, x_2, \dots \rangle}$ ein Hilbertraum.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $(x_1, x_k), (x_2, x_k), \dots$ eine beschränkte Folge in \mathbb{R} . Nach Bolzano-Weierstrass existiert also eine Teilfolge $(x_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass $(x_{1,n}, x_1)$ konvergiert und davon wiederum eine Teil-Teilfolge $(x_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$, sodass $(x_{2,n}, x_2)$ konvergiert, u.s.w.

Für die Diagonalfolge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} := (x_{n,n})_{n \in \mathbb{N}}$ gilt also, dass (v_n, x_k) für jedes k konvergiert. Wir definieren

$$A_n \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = V', \quad A_n : x \mapsto (v_n, x),$$

dann folgt $\|A_n\|_{V'} = \|v_n\|_V \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k\|_X < \infty$ und aufgrund der Linearität konvergiert $A_n x$ für alle $x \in \langle x_1, x_2, \dots \rangle$.

Aus Satz 3.8 folgt, dass ein $A \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ existiert mit

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \quad \forall x \in V$$

und nach dem Satz von Riesz existiert $v \in V$ mit $(v, x) = Ax$ für alle $x \in V$.

Schließlich ist für alle $x \in X$, $P_V x \in V$ und $x - P_V x \in V^\perp$, also

$$\begin{aligned} (v_n, x) &= (v_n, P_V x) + (v_n, x - P_V x) = (v_n, P_V x) = A_n P_V x \\ &\rightarrow AP_V x = (v, P_V x) = (v, P_V x) + (v, x - P_V x) = (v, x). \end{aligned}$$

Die Teilfolge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert also schwach gegen $v \in V \subseteq X$. □

Korollar 3.13

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ beschränkt, so besitzt $(Kx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in $\mathcal{R}(K)$ liegt.

Beweis:

Nach Satz 3.12 existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \rightharpoonup x$ und aus Satz 3.11(e) folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} Kx_{n_k} = Kx$ □

3.3 Parameterwahlstrategien

In diesem Abschnitt sei K stets nicht-degeneriert.

Satz 3.14

Ist $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ eine Regularisierung von K^+ , dann gilt

(a) $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow 0$.

(b) Ist zudem $\|KR_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y)}$ glm. beschränkt in α , dann gilt für alle $y \notin \mathcal{D}(K^+)$

$$\|R_\alpha y\|_X \rightarrow \infty \quad \text{für } \alpha \rightarrow 0.$$

Nach Satz 3.3 gilt (b) für regularisierende Filter.

Beweis:

(a) Angenommen es existiert eine (glm. in α) beschränkte Teilfolge von R_α . Dann wäre K^+ stetig nach dem Satz 3.8 (Banach-Steinhaus). Dann wäre aber nach Satz 2.32 K degeneriert.

(b) Angenommen es existiert eine beschränkte Teilfolge $\|R_\alpha y\|_X$. Nach Korollar 3.13 existiert dann eine Teilfolge von $KR_\alpha y$, die gegen ein $\eta \in \mathcal{R}(K)$ konvergiert.

Außerdem konvergiert KR_α punktweise auf $\mathcal{D}(K^+)$ gegen $KK^+ = P_{\overline{\mathcal{R}(K)}}$. Aus der Beschränktheit von KR_α folgt mit Satz 3.8 (Banach-Steinhaus), auch $KR_\alpha y \rightarrow P_{\overline{\mathcal{R}(K)}}y$. Es gilt also $P_{\overline{\mathcal{R}(K)}}y = \eta \in \mathcal{R}(K)$ und damit $y \in \mathcal{R}(K) + \mathcal{R}(K)^\perp = \mathcal{D}(K^+)$. \square

Bemerkung 3.15

Für die Abweichung von $x_\alpha^\delta := R_\alpha y^\delta$ vom gesuchten K^+y gilt

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\delta - K^+y\| &\leq \|x_\alpha^\delta - R_\alpha y^\delta\| + \|R_\alpha y^\delta - K^+y\| \\ &= \|R_\alpha(y^\delta - y)\| + \|R_\alpha y^\delta - K^+y\| \end{aligned}$$

Der erste Summand $R_\alpha(y^\delta - y)$ beschreibt den fortgepflanzten Datenfehler. Gemäß Satz 3.14 konvergiert er (für $y^\delta \notin \mathcal{D}(K^+)$) für $\alpha \rightarrow 0$ gegen unendlich. Der zweite Summand beschreibt den durch die Regularisierung eingeführten Verfahrensfehler. Er konvergiert für $\alpha \rightarrow 0$ gegen Null.

Das Parameterwahlproblem besteht darin, α (in Abhängigkeit von δ und y^δ) so zu wählen, dass der Gesamtfehler $\|x_\alpha^\delta - K^+y\|$ möglichst klein wird und für $\delta \rightarrow 0$ gegen Null konvergiert.

Definition 3.16

Eine Funktion

$$\alpha : \mathbb{R}^+ \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (\delta, y^\delta) \rightarrow \alpha(\delta, y^\delta)$$

heißt Parameterwahlstrategie.

Analog heißt für Regularisierungen $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Funktion $k(\delta, y^\delta)$ Parameterwahlstrategie oder auch Stoppregel.

Eine Kombination von Regularisierung und Parameterwahlstrategie heißt Regularisierungsverfahren, falls für jedes $y \in \mathcal{D}(K^+)$

$$R_{\alpha(y^\delta, \delta)} y^\delta \rightarrow K^+ y$$

für jede Folge $(y^\delta)_{\delta > 0} \subseteq Y$ mit $\|y^\delta - y\| \leq \delta$.

Hängt α nur von δ ab, so sprechen wir von einer a priori Parameterwahl sonst von einer a posteriori Parameterwahl.

Satz 3.17

Sei $(R_\alpha)_{\alpha > 0}$ eine Regularisierung. Dann erzeugt jede Parameterwahlstrategie $\alpha = \alpha(\delta)$ mit

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \|R_\alpha\| \delta \rightarrow 0 \quad (\text{für } \delta \rightarrow 0)$$

ein Regularisierungsverfahren.

Beweis:

Wie in Bemerkung 3.15 gilt für $y \in \mathcal{D}(K^+)$

$$\|x_\alpha^\delta - K^+ y\| \leq \underbrace{\|R_\alpha\| \|y^\delta - y\|}_{\leq \|R_\alpha\| \delta \rightarrow 0} + \underbrace{\|R_\alpha y - K^+ y\|}_{\rightarrow 0 \text{ für } \alpha \rightarrow 0},$$

womit die Behauptung folgt. □

Für allgemeine Filter haben wir $\|R_\alpha\|$ schon in Satz 3.3 abgeschätzt, für regularisierende Filter lässt sich dies noch verschärfen:

Satz 3.18

Für regularisierende Filter $(F_\alpha)_{\alpha > 0}$ ist

$$\|R_\alpha\| \leq C \sup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{|F_\alpha(\sigma_n^2)|} \leq C \sup_{\lambda \in (0, \|K\|^2]} \sqrt{|F_\alpha(\lambda)|}$$

mit $C = \sup_{\alpha > 0, \lambda \in (0, \|K\|^2]} \sqrt{\lambda |F_\alpha(\lambda)|}$.

Beweis:

Es ist

$$\begin{aligned} \|R_\alpha y\|^2 &= \left(R_\alpha y, \sum_{n=1}^{\infty} F_\alpha(\sigma_n^2) \sigma_n(u_n, y) v_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} F_\alpha(\sigma_n^2) \sigma_n(u_n, y) (R_\alpha y, v_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_\alpha(\sigma_n^2) (u_n, y) (K R_\alpha y, u_n) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |F_\alpha(\sigma_n^2)| \|K R_\alpha\| \|y\|^2. \end{aligned}$$

und aus Satz 3.3 folgt $\|K R_\alpha\| \leq C^2$. □

Beispiel 3.19

(a) Für die abgeschnittene Singulärwertzerlegung

$$F_\alpha(\lambda) := \begin{cases} \lambda^{-1} & : \lambda \geq \alpha \\ 0 & : \lambda < \alpha \end{cases}$$

ist $\|R_\alpha\| \leq C \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Also erzeugt jede Parameterwahlstrategie $\alpha(\delta)$ mit

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} \rightarrow 0$$

ein Regularisierungsverfahren.

Mit der Wahl $\alpha(\delta) := \delta$ folgt also

$$R_{\alpha(\delta)} y^\delta = \sum_{\sigma_k \geq \sqrt{\delta}} \sigma_k^{-1}(u_k, y^\delta) v_k \rightarrow K^+ y \quad \text{für } \delta \rightarrow 0.$$

(b) Für die Tikhonov-Regularisierung

$$F_\alpha(\lambda) := \frac{1}{\lambda + \alpha}$$

gilt $\|R_\alpha\| \leq C \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, sodass jede Parameterwahl mit

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0,$$

zu einem Regularisierungsverfahren führt.

Mit der Wahl $\alpha(\delta) := \delta$ folgt also

$$R_{\alpha(\delta)} y^\delta = (K^* K + \delta I)^{-1} K^* y^\delta \rightarrow K^+ y \quad \text{für } \delta \rightarrow 0.$$

Satz 3.20 (Bakushinskii)

Sei $(R_\alpha)_{\alpha>0}$ eine Regularisierung. Es existiert keine Parameterwahl $\alpha = \alpha(y^\delta)$, sodass für alle $y \in \mathcal{D}(K^+)$

$$R_{\alpha(y^\delta)} y^\delta \rightarrow K^+ y \quad \text{für } \delta \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Beweis:

Angenommen, es gibt eine solche Parameterwahl. Definiere

$$R : Y \rightarrow X, \quad R\eta := R_{\alpha(\eta)}\eta.$$

3.4. DAS DISKREPANZPRINZIP FÜR DAS TIKHONOV-VERFAHREN

Für jedes $y \in \mathcal{D}(K^+)$ folgt mit $y^\delta := y$ aus (3.3), dass $Ry = K^+y$, d.h. $R|_{\mathcal{D}(K^+)} = K^+$

Außerdem folgt aus (3.3) für jede Folge $y^\delta \rightarrow y$, dass

$$Ry^\delta = R_{\alpha(y^\delta)}y^\delta \rightarrow K^+y = Ry,$$

d.h. R (und damit K^+) ist stetig auf $\mathcal{D}(K^+)$. Dies widerspricht Satz 2.32. \square

Bemerkung 3.21

Satz 3.20 zeigt dass die Kenntnis des Datenfehlers notwendig ist für eine konvergente Parameterwahlstrategie. In der Praxis ist dieser jedoch nicht immer bestimmbar und so haben sich neben den mathematisch rigoros gerechtfertigten auch heuristische Parameterwahlstrategie etabliert. Ein Beispiel hierfür ist das L-Kurven-Kriterium, in dem $\|x_\alpha^\delta\|$ als Funktion von $\|y^\delta - Kx_\alpha^\delta\|$ (doppeltlogarithmisch) geplottet wird und der zum linken „Eckpunkt“ gehörige Parameter α verwendet wird (vgl. das in der Vorlesung gemalte Bild).

3.4 Das Diskrepanzprinzip für das Tikhonov-Verfahren

In diesem Abschnitt besitze K stets dichtes Bild, d.h. $\overline{\mathcal{R}(K)} = Y$, und wir betrachten nur die Tikhonov-Regularisierung

$$R_\alpha = (K^*K + \alpha I)^{-1}K^*.$$

Sei $y^\delta \in Y$, $\delta > 0$ mit $\|y^\delta - y\| \leq \delta$. Der Parameter $\alpha > 0$ steuert (wie in Bemerkung 3.5 beschrieben), wie gut $x_\alpha^\delta := R_\alpha y^\delta$ zu den gemessenen Daten passt. Um so kleiner α gewählt wird, umso kleiner wird das Residuum

$$\|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|.$$

Dabei erscheint es sinnlos, hier eine höhere Genauigkeit als δ zu fordern. Die PWS

$$\text{„Wähle } \alpha(y^\delta, \delta) \text{ sodass } \|Kx_{\alpha(y^\delta, \delta)}^\delta - y^\delta\| = \delta\text{“}$$

heißt *Diskrepanzprinzip von Morozov*.

Die Existenz eines solchen α kann nur dann garantiert werden, wenn K dichtes Bild besitzt. Im allgemeinen Fall $\mathcal{D}(K^+) = \mathcal{R}(K) + \mathcal{R}(K)^\perp$ mit

$\mathcal{R}(K)^\perp \neq \{0\}$ könnte nämlich selbst für exakte Daten und exakte Inversion das Residuum

$$K(K^+y) - y \stackrel{\text{Satz 2.16}}{=} P_{\overline{\mathcal{R}(K)}}y - y \in \mathcal{R}(K)^\perp$$

beliebig groß werden.

Falls K dichtes Bild besitzt (was wir in diesem Abschnitt stets voraussetzen), so existiert jedoch immer ein Parameter $\alpha(y^\delta, \delta)$, der das Diskrepanzprinzip erfüllt, und mit dieser Parameterwahl ergibt sich ein Regularisierungsverfahren, also $R_{\alpha(y^\delta, \delta)}y^\delta \rightarrow K^+y$.

Um dies zu zeigen, beweisen wir zunächst die in Bemerkung 3.5 gemachten Aussagen.

Lemma 3.22

Sei $\alpha > 0$ und $y^\delta \in Y$.

$K^*K + \alpha I \in \mathcal{L}(X)$ ist stetig invertierbar und

$$x_\alpha^\delta := (K^*K + \alpha I)^{-1}K^*y^\delta = R_\alpha y^\delta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} (u_n, y^\delta) v_n$$

ist der eindeutige Minimierer von

$$\|y^\delta - Kx\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2 \rightarrow \min!$$

Beweis:

Wegen

$$(K^*K + \alpha I)x = z \iff ((K^*K + \alpha I)x, \xi)_X = (z, \xi)_X \quad \forall \xi \in X.$$

folgt die stetige Invertierbarkeit von $K^*K + \alpha I$ aus dem Satz von Lax-Milgram (Satz 2.3). Die Singulärwertdarstellung von $(K^*K + \alpha I)^{-1}$ folgt sofort aus der von K .

Um die Minimiereigenschaft zu zeigen, sei $x \in X$ mit $x \neq x_\alpha^\delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \|y^\delta - Kx\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2 - \|y^\delta - Kx_\alpha^\delta\|_Y^2 + \alpha \|x_\alpha^\delta\|_X^2 \\ &= -2(y^\delta, Kx)_Y + (x, (K^*K + \alpha I)x)_X + 2(y^\delta, Kx_\alpha^\delta)_Y \\ &\quad - (x_\alpha^\delta, (K^*K + \alpha I)x_\alpha^\delta)_X \\ &= ((x - x_\alpha^\delta), (K^*K + \alpha I)(x - x_\alpha^\delta))_X \\ &\quad + 2(x, (K^*K + \alpha I)x_\alpha^\delta)_X - 2(y^\delta, Kx)_Y \\ &\quad - 2(x_\alpha^\delta, (K^*K + \alpha I)x_\alpha^\delta)_X + 2(y^\delta, Kx_\alpha^\delta)_Y \\ &= \|K(x - x_\alpha^\delta)\|_Y^2 + \alpha \|x - x_\alpha^\delta\|_X^2 > 0. \end{aligned}$$

□

3.4. DAS DISKREPANZPRINZIP FÜR DAS TIKHONOV-VERFAHREN

Lemma 3.23

Sei $y^\delta \in Y$.

(a) Die Funktion

$$\alpha \mapsto \|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|, \quad \text{mit } x_\alpha^\delta := R_\alpha y^\delta,$$

ist stetig und monoton steigend.

(b) Es gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\| = \|y^\delta\|.$$

Beweis:

Das Erzeugnis $\langle u_1, u_2, \dots \rangle$ liegt offensichtlich dicht in $\mathcal{R}(K)$ und damit auch in $\overline{\mathcal{R}(K)} = Y$. Nach Definition und Satz 2.27 ist daher

$$y^\delta = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n, y^\delta) u_n$$

und damit

$$Kx_\alpha^\delta - y^\delta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \alpha} - 1 \right) (u_n, y^\delta) u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{-\alpha}{\sigma_n^2 + \alpha} (u_n, y^\delta) u_n. \quad (3.4)$$

(a) Aus (3.4) folgt dass

$$\|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{\frac{\sigma_n^2}{\alpha} + 1} \right)^2 (u_n, y^\delta)^2$$

und dieses ist offenbar streng monoton steigend in α .

Außerdem ist für $\alpha_1, \alpha_2 > 0$

$$\begin{aligned} \|x_{\alpha_1}^\delta - x_{\alpha_2}^\delta\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha_1} - \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha_2} \right) (u_n, y^\delta) v_n \right\|^2 \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha_1} - \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha_2} \right)^2 \|y^\delta\|^2 \\ &\leq (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \frac{\sigma_1^2}{\alpha_1^2 \alpha_2^2} \|y^\delta\|^2. \end{aligned}$$

x_α^δ und damit insbesondere auch $\|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|$ hängt also stetig von $\alpha > 0$ ab.

(b) Wir verwenden wieder (3.4). Für $\alpha \rightarrow 0$ wird in

$$\begin{aligned} \|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\alpha}{\sigma_n^2 + \alpha} \right)^2 (u_n, y^\delta)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\sigma_n^2 + \alpha} \right)^2 (u_n, y^\delta)^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^N \left(\frac{\alpha}{\sigma_n^2} \right)^2 (u_n, y^\delta)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} (u_n, y^\delta)^2 \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{\sigma_N^2} \right)^2 \|y^\delta\|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} (u_n, y^\delta)^2 \end{aligned}$$

der zweite Summand (unabhängig von $\alpha > 0$) für hinreichend große $N \in \mathbb{N}$ beliebig klein und der erste Summand wird für festes N und hinreichend kleines $\alpha > 0$ beliebig klein. Damit folgt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\| = 0.$$

Für $\alpha \rightarrow \infty$ gilt

$$\|Kx_\alpha^\delta\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \alpha} \right)^2 (u_n, y^\delta)^2 \leq \left(\frac{\sigma_1^2}{\alpha} \right)^2 \|y^\delta\|^2 \rightarrow 0,$$

und damit $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\| = \|y^\delta\|$. □

Satz 3.24

(a) Zu jedem $y^\delta \in Y$ und $0 < \delta \leq \|y^\delta\|$ existiert genau ein $\alpha(y^\delta, \delta)$ mit

$$\|Kx_{\alpha(y^\delta, \delta)}^\delta - y^\delta\| = \delta.$$

(b) Die Tikhonov-Regularisierung bildet mit dieser Parameterwahlstrategie² ein Regularisierungsverfahren, d.h. für jedes $y \in \mathcal{D}(K^+)$ gilt

$$R_{\alpha(y^\delta, \delta)} y^\delta \rightarrow K^+ y$$

für jede Folge $(y^\delta)_{\delta > 0} \subseteq Y$ mit $\|y^\delta - y\| \leq \delta$.

²Strenggenommen ist diese Parameterwahlstrategie nur für $y \neq 0$ und hinreichend kleine $\delta > 0$ wohldefiniert. Eine überall definiertes Regularisierungsverfahren erhält man, indem für $\delta > \|y^\delta\|$, $\alpha := \infty$, also $x_{\alpha(y^\delta, \delta)}^\delta := 0$ gesetzt wird.

3.4. DAS DISKREPANZPRINZIP FÜR DAS TIKHONOV-VERFAHREN

Beweis:

(a) folgt aus Lemma 3.23

Zum Beweis von (b) beachte zunächst, dass für jede Folge $\delta \rightarrow 0$ aufgrund unserer Parameterwahl und der Minimalitätseigenschaft aus Lemma 3.22 gilt, dass

$$\begin{aligned} \delta^2 + \alpha(y^\delta, \delta) \|x_{\alpha(y^\delta, \delta)}^\delta\|^2 &= \|y^\delta - Kx_{\alpha(y^\delta, \delta)}^\delta\|^2 + \alpha(y^\delta, \delta) \|x_{\alpha(y^\delta, \delta)}^\delta\|^2 \\ &\leq \|y^\delta - KK^+y\|^2 + \alpha(y^\delta, \delta) \|K^+y\|^2 \\ &\leq \delta^2 + \alpha(y^\delta, \delta) \|K^+y\|^2. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt ausgenutzt, dass $KK^+y = y$ wegen $\overline{\mathcal{R}(K)} = Y$ gilt (vgl. Satz 2.16). Für alle $\delta > 0$ (und zugehörige y^δ mit $\|y^\delta - y\| \leq \delta$) ist also

$$\|x_{\alpha(y^\delta, \delta)}^\delta\| \leq \|K^+y\|. \quad (3.5)$$

Nach Satz 3.12 besitzt jede Teilfolge von $x_{\alpha(y^\delta, \delta)}^\delta$ eine schwach konvergente Teilfolge. Sei \hat{x} ein dazugehöriger schwacher Grenzwert. Aus dem Diskrepanzprinzip und Satz 3.11(e) folgt $\|K\hat{x} - y\| = 0$. Da $\|K^+y\|$ die Lösung mit minimaler Norm ist (Definition 2.14) ist $\|K^+y\| \leq \|\hat{x}\|$ und mit (3.5) folgt aus Satz 3.11(f), dass \hat{x} sogar starker Grenzwert der betrachteten Teilfolge ist. Aus (3.5) folgt dann aber $\|\hat{x}\| \leq \|K^+y\|$ und somit $\hat{x} = K^+y$. Insgesamt ist also gezeigt, dass jede Teilfolge von $x_{\alpha(y^\delta, \delta)}^\delta$ eine gegen K^+y konvergente Teilfolge besitzt. Es gilt also

$$x_{\alpha(y^\delta, \delta)}^\delta \rightarrow K^+y. \quad \square$$

KAPITEL 3. REGULARISIERUNG LINEARER PROBLEME

Literaturverzeichnis

- [Alt] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. 3. Auflage. Springer, Berlin, 1999.
- [Forster3] O. Forster: *Analysis 3. Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen*. 3. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1996.
- [Rieder] A. Rieder. *Keine Probleme mit Inversen Problemen*. Vieweg, Wiesbaden, 2003.
- [Rudin] W. Rudin: *Functional analysis. Second edition*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.