

# NUMERIK PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

**Prof. Dr. Bastian von Harrach**

Goethe-Universität Frankfurt am Main  
Institut für Mathematik

Wintersemester 2021/22

<http://numerical.solutions>



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Schwache Lösungstheorie elliptischer PDGL</b>	<b>3</b>
2.1	Distributionen . . . . .	3
2.1.1	Der Raum der Testfunktionen . . . . .	4
2.1.2	Der Raum der Distributionen . . . . .	5
2.2	Sobolevräume . . . . .	10
2.2.1	Motivation und Definition . . . . .	10
2.2.2	Ein Spursatz (Dirichlet-Randwerte) . . . . .	11
2.2.3	Die Greensche Formel (Neumann-Randwerte) . . . . .	14
2.2.4	Nullfortsetzungen . . . . .	16
2.3	Variationsformulierungen und Satz von Lax-Milgram . . . . .	17
2.3.1	Variationsformulierung . . . . .	18
2.3.2	Der Satz von Lax-Milgram . . . . .	20
2.3.3	Variationelle Lösungstheorie . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Finite-Elemente-Verfahren</b>	<b>27</b>
3.1	Galerkin-Verfahren und Céa-Lemma . . . . .	27
3.2	Numerische Umsetzung des Galerkin-Verfahrens . . . . .	31
3.3	Eindimensionale lineare finite Elemente . . . . .	33
3.4	Zweidimensionale lineare finite Elemente . . . . .	36

## INHALTSVERZEICHNIS

---

<b>4</b>	<b>Ausblick: Parabolische DGL</b>	<b>43</b>
4.1	Variationsformulierung . . . . .	44
4.2	Die Linienmethode . . . . .	47
<b>A</b>	<b>Lösungstheorie parabolischer DGL</b>	<b>51</b>

# Kapitel 1

## Einleitung und Motivation

Viele Vorgänge in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften lassen sich durch gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen beschreiben, deren Lösung die Vorhersage des Verhaltens eines Systems bei vollständiger Kenntnis aller dazu nötigen Parameter ermöglicht. Im Sommersemester 2020 haben wir in der Vorlesung *Numerik von Differentialgleichungen* [NumerikDGL] bereits Lösungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen und einfache Finite Differenzen Verfahren für partielle Differentialgleichungen behandelt. Diese Verfahren beruhen auf der *klassischen* Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen. Die eindeutige Lösbarkeit der betrachteten partiellen Differentialgleichungen und die Konvergenz der durch Finite Differenzen erhaltenen Lösungen gegen die wahre Lösung konnten wir in [NumerikDGL] nur für wenige Fälle unter speziellen Bedingungen zeigen.

Ziel dieser Vorlesung ist nun die Entwicklung mächtigerer Finite Elemente-Verfahren zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen. Diese Verfahren beruhen auf der modernen *variationellen* Theorie partieller Differentialgleichungen, in die wir im Rahmen dieser Vorlesung ebenfalls eine Einführung geben.

Zur Motivation der Abschwächung des klassischen Lösungsbegriffs betrachten wir das folgende Randwertproblem

$$-(k(x)u'(x))' = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad u(-1) = 0, u(1) = 0.$$

Wie in der Vorlesung [NumerikDGL] besprochen, beschreibt diese Gleichung die eindimensionale stationäre Verteilung der Temperatur  $u(x)$  in einem Stab mit Wärmeleitfähigkeit  $k(x)$ , der Wärmequellen  $f(x)$  ausgesetzt ist, und an seinen Enden auf Nulltemperatur gehalten wird, vgl. die in der Vorlesung gemalten Skizzen.

Nehmen wir nun an, dass der Stab aus zwei verschiedenen Materialien besteht,

$$k(x) = 1 \quad \text{für } x \in (-1, 0), \quad k(x) = 2 \quad \text{für } x \in (0, 1)$$

## KAPITEL 1. EINLEITUNG UND MOTIVATION

---

und dass für die Wärmequellen gilt  $f(x) := 1$ .

Für die Lösung  $u$  muss gelten

$$u''(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in (-1, 0), \\ -1/2 & \text{für } x \in (0, 1), \end{cases}$$

so dass

$$u'(x) = \begin{cases} -x + a & \text{für } x \in (-1, 0), \\ -1/2x + b & \text{für } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Für  $a \neq b$  ist  $u(x)$  nicht differenzierbar. Ist hingegen  $0 \neq a = b$  so ist  $k(x)u'(x)$  nicht differenzierbar, und für  $0 = a = b$  ist die Randbedingung  $u(-1) = u(1) = 0$  nicht erfüllbar. Schon für diese einfache Beispiel eines aus zwei Materialien zusammengesetzten Stabes, kann es also keine Lösung geben, wenn wir die Ableitungen im klassischen Sinne interpretieren.

### **Bemerkung 1.1**

*Die physikalisch korrekte Lösung erhalten wir, indem wir die Wärmeleitungsgleichung in beiden Stabhälften separat betrachten*

$$-1u''(x) = 1 \quad \text{für } x \in (-1, 0), \quad \text{und} \quad -2u''(x) = 1 \quad \text{für } x \in (0, 1),$$

*und die beiden Hälften durch die Interface-Bedingung koppeln, dass die Temperatur und der Wärmefluss an der Grenzfläche übereinstimmen muss:*

$$\begin{aligned} u(x)|_{x=0-} &= u(x)|_{x=0+}, \\ 1u'(x)|_{x=0-} &= 2u'(x)|_{x=0+}. \end{aligned}$$

*Damit ergibt sich*

$$u(x) = \begin{cases} -x^2/2 - x/6 + 1/3 & \text{für } x \in (-1, 0), \\ -x^2/4 - x/12 + 1/3 & \text{für } x \in (0, 1). \end{cases}$$

*Diese physikalisch korrekte Lösung  $u$  ist nicht differenzierbar in  $x = 0$ !*

Der in dieser Vorlesung vorgestellte schwache Lösungsbegriff hat sich nicht nur für die physikalisch korrekte Behandlung von partiellen Differentialgleichungen mit un stetigen Koeffizienten durchgesetzt. Er liefert auch eine umfassendere und vollständigere Lösungstheorie für PDGL als der klassische Lösungsbegriff. In der modernen Behandlung partieller Differentialgleichungen untersucht man deshalb üblicherweise eine Gleichung zuerst auf Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung, und danach die schwache Lösung auf ihre klassische Differenzierbarkeitseigenschaften (sog. Regularität).

# Kapitel 2

## Schwache Lösungstheorie elliptischer Differentialgleichungen

### 2.1 Distributionen

Wir stellen zuerst einen neuen Ableitungsbegriff vor, der es uns ermöglicht, nahezu jede Funktion beliebig oft abzuleiten. Zur Motivation betrachten wir die Frage, ob sich sinnvoll eine Ableitung einer Sprungfunktion (auch: *Heaviside-Funktion*)

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases},$$

auch über den Punkt  $x = 0$  hinweg definieren lässt. Falls ja, so müsste für die Ableitung  $\delta(x) := H'(x) = 0$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  gelten, aber gleichzeitig  $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1$  sein.

*„ $\delta(x)$  ist überall null außer in einem Punkt, und da ist  $\delta$  so dermaßen unendlich, dass das Integral eins ergibt.“*

Das ist offensichtlich mathematischer Unsinn, aber es entspricht der intuitiven Vorstellung der Dichte einer Punktmasse. Genauso war es im Rahmen der reellen Zahlen unsinnig, von  $\sqrt{-1}$  zu sprechen. So wie man die reellen Zahlen zu komplexen Zahlen erweiterte und damit  $\sqrt{-1}$  eine rigorose Bedeutung gab, werden wir den Funktionenbegriff zum Begriff der Distributionen erweitern, und  $\delta$  eine rigorose Bedeutung geben.

### 2.1.1 Der Raum der Testfunktionen

#### Definition 2.1 (Testfunktionen)

Sei  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge. Wir nennen

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } \varphi \text{ kompakt, } \text{supp } \varphi \subset \Omega\}$$

den Raum der Testfunktionen.

Wenn es aus dem Zusammenhang hervorgeht oder egal ist, welche Menge  $\Omega$  gemeint ist, so schreiben wir auch kurz  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega)$ . Bezüglich der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ist  $\mathcal{D}$  ein Vektorraum.

#### Beispiel 2.2

Die Funktion  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{für } |x| < 1 \end{cases}$$

liegt in  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und erfüllt  $\text{supp } h = \overline{B_1(0)}$ . Durch geeignete Verschiebungen und Skalierungen von  $h$  lässt sich für jedes offene  $\Omega$  eine  $C^\infty$ -Funktion mit Träger in  $\Omega$  (also ein Element von  $\mathcal{D}(\Omega)$ ) konstruieren.

Es ist nützlich  $h$  so zu normieren, dass das Integral eins ergibt, d.h. wir definieren

$$\rho(x) := h(x) / \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) \, d\xi.$$

Außerdem engen wir den Träger ein,

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon).$$

Dann gilt  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon \, dx = 1$  und  $\text{supp } \rho_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$ .

#### Definition 2.3 (Konvergenz von Testfunktionen)

Eine Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  heißt konvergent (in  $\mathcal{D}(\Omega)$ ) gegen ein  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , falls

(a) eine kompakte Menge  $K \subset \Omega$  existiert mit

$$\text{supp } \varphi_k \subseteq K \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

(b) für jedes  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  die Folge der (partiellen) Ableitungen  $(D^\alpha \varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $D^\alpha \varphi$  konvergiert.



**Bemerkung 2.4**

Der Begriff Konvergenz ist in der Mathematik festgelegt. Ihn einfach umzudefinieren birgt die Gefahr vieler Missverständnisse. So ist etwa die Definition

$$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \quad \text{konvergiert gegen } a \in \mathbb{R}, \text{ falls } a_1 = a.$$

ziemlicher Unsinn und besitzt sicher nicht die bekannten und intuitiv erwarteten Eigenschaften eines Grenzwertbegriffs.

Von Konvergenz darf man deshalb nur sprechen, wenn es eine Norm, Metrik oder zumindest Topologie gibt, die diese Konvergenz induziert. Wir werden die zu Definition 2.3 gehörige Topologie hier nicht explizit angeben, es ist aber wichtig festzustellen, dass es sie gibt.

**Satz 2.5**

Es existiert eine Topologie auf  $\mathcal{D}(\Omega)$ , die die Konvergenz aus Definition 2.3 induziert. Bezüglich dieser Topologie ist  $\mathcal{D}(\Omega)$  ein sogenannter vollständiger topologischer Vektorraum, d.h. die Vektorraumoperationen sind stetig, einelementige Mengen sind abgeschlossen und Cauchy-Folgen<sup>1</sup> konvergieren.

**Beweis:** Dies wird z.B. in [Rudin, 6.2–6.5] bewiesen. □

**2.1.2 Der Raum der Distributionen****Definition 2.6**

Stetige lineare Funktionale  $f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  heißen verallgemeinerte Funktionen oder Distributionen. Die Menge aller Distributionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Für die Anwendung von  $f$  auf eine Testfunktion  $\varphi$  schreiben wir  $f(\varphi)$  oder  $\langle f, \varphi \rangle$ .

**Satz 2.7**

Ein lineares Funktional  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig auf  $\mathcal{D}$  (also eine Distribution) falls es folgenstetig ist, also

$$\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle \quad (\text{in } \mathbb{R}) \quad \text{für alle } (\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D} \text{ mit } \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ (in } \mathcal{D}).$$

**Beweis:** Die Hinrichtung gilt allgemein für Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Für die Rückrichtung sind die Linearität und die Eigenschaften von  $\mathcal{D}$  wichtig, sie wird z.B. in [Rudin, 6.6] bewiesen. □

<sup>1</sup>Eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  in einem topologischen Vektorraum heißt Cauchy-Folge, falls in jeder Umgebung der Null fast alle Folgendifferenzen  $x_n - x_m$  liegen.

**Definition und Satz 2.8 (Funktionen als Distributionen)**

Jede lokal integrierbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  erzeugt durch

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx$$

eine Distribution  $f$ . Solche von lokal integrierbaren Funktionen erzeugte Distributionen heißen regulär.

Zwei reguläre Distributionen sind genau dann gleich, wenn die sie erzeugenden Funktionen (im Lebesgue-Sinne) gleich sind. Wir können daher die Funktion  $f$  mit der zugehörigen Distribution  $\varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle$  identifizieren und so die (lokal integrierbaren) Funktionen als Teilmenge der Distributionen auffassen.

**Beweis:** Offenbar ist  $f$  ein lineares Funktional. Sei noch  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$  konvergent gegen ein  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Dann existiert nach Definition 2.3 eine kompaktes  $K \subset \Omega$  mit  $\text{supp } \varphi, \text{supp } \varphi_k \subseteq K$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Da  $f$  lokal integrierbar ist, existiert  $\int_K |f(x)| \, dx$  und es folgt

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi_k - \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} f(x) (\varphi_k(x) - \varphi(x)) \, dx \right| \\ &\leq \int_K |f(x)| \, dx \sup_{x \in K} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

also  $\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ . Nach Satz 2.7 ist deshalb  $f \in \mathcal{D}'$ .

Die Eindeutigkeit zeigen wir nur für den einfacheren Fall, dass  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist und verweisen für den allgemeinen Fall auf [Walter]. Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so folgt mit  $\rho_{\varepsilon}$  aus Beispiel 2.2 für jeden Punkt  $x_0 \in \Omega$

$$\begin{aligned} |\langle f(x), \rho_{\varepsilon}(x - x_0) \rangle - f(x_0)| &= \left| \int_{\Omega} (f(x) - f(x_0)) \rho_{\varepsilon}(x - x_0) \, dx \right| \\ &\leq \sup_{x \in B_{\varepsilon}(x_0)} |f(x) - f(x_0)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\langle f(x), \rho_{\varepsilon}(x - x_0) \rangle \rightarrow f(x_0) \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Eine Funktion  $f \in C(\Omega)$  ist also durch Kenntnis der zugehörigen Distribution eindeutig bestimmt.  $\square$

**Beispiel 2.9 (Delta-Distribution)**

Für jeden Punkt  $z \in \Omega$  ist durch

$$\langle \delta_z, \varphi \rangle := \varphi(z)$$

offenbar eine Distribution  $\delta_z \in \mathcal{D}'$  definiert, die (Diracsche)  $\delta$ -Funktion. Für  $z = 0$  schreibt man auch einfach  $\delta$ . In der naturwissenschaftlichen Literatur schreibt man wegen Satz 2.8 auch symbolisch

$$\text{„} \int_{\Omega} \delta_z(x) \varphi(x) dx \text{“} = \varphi(z),$$

obwohl es offensichtlich keine dazugehörige lokal integrierbare Funktion gibt. Mit  $z = 0$  und  $\varphi = 1$  in einer Umgebung der Null, ist dies gerade die in der Motivation angesprochene Vorstellung, dass  $\delta$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  verschwindet, aber ihr Integral dennoch eins ist.

**Definition und Satz 2.10 (Rechnen mit Distributionen)**

(a) Für  $f, g \in \mathcal{D}'$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  definieren wir  $f + g \in \mathcal{D}'$  durch

$$\langle f + g, \varphi \rangle := \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}$$

und  $\lambda f \in \mathcal{D}'$  durch

$$\langle \lambda f, \varphi \rangle := \langle f, \lambda \varphi \rangle = \lambda \langle f, \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}.$$

(b) Für  $f \in \mathcal{D}'$  definieren wir die  $\alpha$ -te (partielle) Ableitung,  $D^\alpha f \in \mathcal{D}'$ , für  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  durch

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}.$$

(c) Für  $f \in \mathcal{D}'$  und  $\psi \in C^\infty$  definieren wir das Produkt  $f\psi = \psi f \in \mathcal{D}'$  durch

$$\langle \psi f, \varphi \rangle := \langle f\psi, \varphi \rangle = \langle f, \psi\varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}.$$

**Beweis:** Dass durch (a) und (b) tatsächlich Distributionen definiert werden ist klar. Für (c) beachte, dass nach der Leibniz-Regel gilt

$$D^\alpha(\psi\varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \psi D^\beta \varphi.$$

Deshalb folgt aus  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}$  auch  $\psi\varphi_k \rightarrow \psi\varphi$  in  $\mathcal{D}$ . □

**Bemerkung 2.11**

(a) Durch die Addition und Skalarmultiplikation aus Definition 2.10 (a) wird  $\mathcal{D}'$  zum Vektorraum und die Identifikation aus Definition und Satz 2.8 ist linear, d.h. es ist egal, ob man lokal integrierbare Funktionen als Funktionen oder als Distributionen addiert bzw. mit Skalaren multipliziert.

(b) Mit partieller Integration sieht man, dass für alle hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktionen Definition 2.10 (b) mit der klassischen Ableitung übereinstimmt. Es ist also egal, ob man eine stetig differenzierbare Funktion als Funktion oder als Distribution differenziert.

Definition 2.10 (b) ermöglicht aber die Ableitung beliebiger Distributionen, also auch solcher, die als Funktionen nicht klassisch differenzierbar sind! Man spricht auch von einem verallgemeinertem oder distributionellem Ableitungsbegriff.

(c) Definition 2.10 (c) definiert nur das Produkt einer Distribution mit einer  $C^\infty$ -Funktion. Das Produkt zwischen zwei Distributionen ist im Allgemeinen nicht definiert. Für reguläre Distributionen kann man es aber über die Multiplikationen der zugehörigen Funktionen definieren.

(d) Vektorwertige Distributionen lassen sich als endlichdimensionale Tupel von Distributionen  $\mathcal{D}'(\Omega)^n$  definieren.

Für  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  und  $F = (F_1, \dots, F_n)^T \in \mathcal{D}'(\Omega)^n$  definieren wir entsprechend

$$\begin{aligned}\nabla f &:= (\partial_1 f, \dots, \partial_n f) \in \mathcal{D}'(\Omega)^n, \\ \nabla \cdot F &:= \partial_1 F_1 + \dots + \partial_n F_n \in \mathcal{D}'(\Omega).\end{aligned}$$

(e) Für eine offene Teilmenge  $O \subseteq \Omega$  und  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  ist die Einschränkung  $f|_O \in \mathcal{D}'(O)$  definiert durch

$$\langle f|_O, \varphi \rangle := \langle f, \tilde{\varphi} \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(O),$$

wobei  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$  die Nullfortsetzung von  $\varphi$  ist.

### Beispiel 2.12

Betrachte noch einmal die Sprungfunktion aus der Einleitung

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Ihre distributionelle Ableitung  $H' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  erfüllt

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) dx = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0)$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , es ist also tatsächlich  $H' = \delta$ .

### Satz 2.13

Ist  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  mit  $\partial_i f = 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , dann ist  $f$  lokal konstant, d.h. zu jedem Punkt  $x \in \Omega$  existiert eine Umgebung  $U$  und ein  $c \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_U c \varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

**Beweis:** Übungsaufgabe 2.3.

**Definition 2.14 (Konvergenz von Distributionen)**

Eine Distributionenfolge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}'$  heißt konvergent (in  $\mathcal{D}'$ ) gegen ein  $f \in \mathcal{D}'$  falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Auch hier gilt natürlich Bemerkung 2.4, so dass der folgende Satz unverzichtbar ist.

**Satz 2.15**

Es gibt eine Topologie, die  $\mathcal{D}'$  zu einem vollständigen topologischen Vektorraum macht und die Konvergenz aus Definition 2.14 induziert.

**Beweis:** [Rudin, 6.16]. □

**Beispiel 2.16**

Wir betrachten noch einmal die Funktionen  $\rho_\varepsilon(x)$  aus Beispiel 2.2. Im Beweis von Satz 2.8 haben wir gezeigt, dass  $\int \rho_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0)$  für alle stetigen  $\varphi$  und damit insbesondere für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$  gilt.

Es ist also

$$\rho_\varepsilon \rightarrow \delta \quad (\text{in } \mathcal{D}').$$

**Satz 2.17 (Rechenregeln für die Ableitung)**

(a) Für  $f \in \mathcal{D}'$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  ist

$$D^\alpha D^\beta f = D^\beta D^\alpha f = D^{\alpha+\beta} f.$$

(b) Für  $f, g \in \mathcal{D}'$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  ist

$$D^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda D^\alpha f + \mu D^\alpha g.$$

(c) Für  $f \in \mathcal{D}'$  und  $\psi \in C^\infty$  gilt die Leibniz-Formel,

$$D^\alpha(\psi f) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \psi D^\beta f$$

mit  $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$  und  $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ .

(d) Konvergiert  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'$  gegen  $f \in \mathcal{D}'$ , dann gilt

$$D^\alpha f_k \rightarrow D^\alpha f \quad (\text{in } \mathcal{D}')$$

für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .

**Beweis:** Übungsaufgabe 2.2. □

## 2.2 Sobolevräume

### 2.2.1 Motivation und Definition

Auch in diesem Kapitel sei  $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  stets eine offene Menge. Zusätzlich setzen wir voraus, dass  $\Omega$  beschränkt sei.

Wir haben durch die Einführung der Distributionen die Möglichkeit gewonnen, beliebig oft zu differenzieren, gleichzeitig aber die Möglichkeit der Multiplikation verloren (außer mit  $C^\infty$ -Funktionen), vgl. Bemerkung 2.11. Bei unserem einführenden Beispiel der Wärmeleitung in einem aus zwei Materialien zusammengesetzten Stab ergibt der Ausdruck  $(ku)'$  wegen der Multiplikation mit der unstetigen Funktion  $k(x)$  nicht für alle Distributionen  $u$  einen Sinn. Damit  $ku'$  einen Sinn ergibt, muss  $u'$  noch eine reguläre Distribution, also eine Funktion (im Lebesgue-Sinne) sein.

Zusammen mit dem Wunsch nach mehr Struktur, etwa Skalarprodukträume und normierte Räume statt lediglich topologischer Vektorräume, führt dies zur Definition der Sobolevräume.

#### Definition 2.18

*Der Raum*

$$\begin{aligned} H^k(\Omega) &:= \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq k\} \\ &= \left\{ u \in L^2(\Omega) : \forall |\alpha| \leq k \exists v_\alpha \in L^2(\Omega) : \right. \\ &\quad \left. (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} v_\alpha(x) \varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right\} \end{aligned}$$

heißt Sobolevraum  $k$ -ter Ordnung.

#### Definition und Satz 2.19

*Mit der üblichen (punktweisen) Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen aus  $L^2(\Omega)$  (bzw. aus  $\mathcal{D}'$ ) sowie dem Skalarprodukt*

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx$$

*und der dadurch induzierten Norm  $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ ,*

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

*ist  $H^k(\Omega)$  ein Hilbertraum.*

**Beweis:** Die Vektorraum- und Skalarprodukt-Eigenschaften folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften von  $L^2(\Omega)$ .

Für die Vollständigkeit beachte zuerst, dass aus  $u_l \rightarrow u$  in  $L^2(\Omega)$  folgt, dass für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  gilt

$$|\langle u_l - u, \varphi \rangle| \leq \|u_l - u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0,$$

also  $u_l \rightarrow u$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Nun sei  $(u_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset H^k(\Omega)$  eine Cauchy-Folge. Dann ist für alle  $|\alpha| \leq k$  die Folge  $D^\alpha u_l$  eine Cauchy-Folge in  $L^2(\Omega)$ . Da  $L^2(\Omega)$  vollständig ist, existieren  $v_\alpha \in L^2(\Omega)$  mit  $D^\alpha u_l \rightarrow v_\alpha$ . Insbesondere konvergiert  $u_l \rightarrow v_0 =: v$  in  $L^2(\Omega)$  und wegen Satz 2.17 gilt

$$D^\alpha v = D^\alpha \lim_{l \rightarrow \infty}^{(L^2)} u_l = D^\alpha \lim_{l \rightarrow \infty}^{(\mathcal{D}')} u_l = \lim_{l \rightarrow \infty}^{(\mathcal{D}')} D^\alpha u_l = \lim_{l \rightarrow \infty}^{(L^2)} D^\alpha u_l = v_\alpha.$$

Es ist also  $v \in H^k(\Omega)$  und  $D^\alpha u_l \rightarrow v_\alpha = D^\alpha v$  in  $L^2(\Omega)$ , d.h.  $u_l \rightarrow v$  in  $H^k(\Omega)$ .  $\square$

**Bemerkung 2.20**

*Auch ohne den Begriff der distributionellen Ableitung lassen sich die Sobolevräume  $k$ -ter Ordnung einführen und zwar als Abschluss der Funktionen*

$$\{u \in C^k(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega)\},$$

*bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ .*

*Wegen Satz 2.19 ergibt dies eine Teilmenge von  $H^k(\Omega)$ . Es war aber historisch lange nicht klar, ob beide Definitionen denselben Raum ergeben. Erst nach Jahrzehnten zeigten Meyers und Serrin, dass beide Definitionen tatsächlich äquivalent sind, dass also  $C^k(\Omega) \cap H^k(\Omega)$  dicht in  $H^k(\Omega)$  liegt, siehe z.B. [Adams, Theorem 3.17].*

**2.2.2 Ein Spursatz (Dirichlet-Randwerte)**

Es sei weiterhin  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  stets eine offene, beschränkte Menge. Wir werden in dieser Vorlesung fast ausschließlich mit dem Raum  $H^1(\Omega)$  arbeiten.

**Bemerkung 2.21**

*Das Skalarprodukt und die zugehörige Norm auf  $H^1(\Omega)$  schreiben wir auch als*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2.$$

Wir untersuchen nun das Verhalten von  $H^1(\Omega)$ -Funktionen auf  $\partial\Omega$ . Im eindimensionalen Fall betrachten wir nur den Fall, dass  $\Omega$  ein offenes Intervall  $]A, B[$  ist, so dass der Rand nur aus den Punkten  $A$  und  $B$  besteht. Im mehrdimensionalen Fall betrachten wir nur den Fall, dass der Rand  $\partial\Omega$  im folgenden Sinne glatt ist:

**Definition 2.22**

Der Rand  $\partial\Omega$  von  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , heißt glatt ( $C^\infty$ ), falls für jeden Punkt  $z \in \partial\Omega$  eine Umgebung  $B_r(z)$  und eine  $C^\infty$ -Funktion  $\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, so dass bis auf Umm Nummerierung und -orientierung gilt:

$$\Omega \cap B_r(z) = \{x \in B_r(z) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}. \quad (2.2)$$

**Bemerkung 2.23**

(a) Aus der Stetigkeit von  $\gamma$  in Definition 2.22 folgt offenbar, dass

$$\partial\Omega \cap B_r(z) = \{x \in B_r(z) : x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Ein glatter Rand ist also lokal der Graph einer  $C^\infty$ -Funktion. Darüber hinaus garantiert Definition 2.22 aber auch noch, dass die Menge  $\Omega$  lokal auf einer Seite ihres Randes liegt, vgl. die in der Vorlesung gemalten Skizzen.

(b) Auf glatten Rändern  $\partial\Omega$  können wir ein Integral erklären. Ist  $\Gamma \subset \partial\Omega$  mit

$$\Gamma = \left\{ \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} =: t \in T \subset \mathbb{R}^{n-1} \right\},$$

dann ist

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_T f(t, \gamma(t)) \sqrt{g(t)} \, dt,$$

mit der Gramschen Determinante

$$g(t) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} |\partial_{x_j} \gamma(t)|^2.$$

Entsprechend lässt sich der Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen  $L^2(\partial\Omega)$  einführen (vgl. z.B. [Forster3]).

Außerdem existiert auf  $\partial\Omega$  eine äußere Normale

$$\nu : \partial\Omega \rightarrow S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

$\nu$  erhält man z.B. durch Normalisierung von

$$(-\partial_{x_1} \gamma(t), \dots, -\partial_{x_{n-1}} \gamma(t), 1)^T, \quad t \in T.$$



Für beschränkte Mengen mit glatten Rändern gilt eine Verschärfung des Satzes von Meyer und Serrin aus Bemerkung 2.20.

**Satz 2.24**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein offenes beschränktes Intervall (für  $n = 1$ ) oder eine offene, beschränkte Menge mit glattem Rand (für  $n \geq 2$ ).

Zu jedem  $u \in H^1(\Omega)$  existiert eine Folge  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{\Omega})$ , so dass

$$u_k \rightarrow u \quad \text{in } H^1(\Omega).$$

Dabei ist  $C^\infty(\overline{\Omega}) := \{v|_\Omega : v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ . Offenbar gilt  $C^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ .

**Beweis:** [Evans] □

**Bemerkung 2.25**

Bei der Konstruktion der Lebesgue-Räume werden Funktionen miteinander identifiziert, deren Werte sich nur auf Nullmengen unterscheiden. Funktionen  $u \in H^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$  besitzen also nur bis auf Nullmengen wohldefinierte Werte. Insbesondere ändert sich also  $u$  nicht wenn wir nur  $u|_{\partial\Omega}$  abändern.

Auf der anderen Seite haben aber  $C^\infty(\overline{\Omega})$ -Funktionen wohldefinierte Randwerte auf  $\partial\Omega$ , und nach Satz 2.24 ist jede Funktion in  $H^1(\Omega)$  Grenzwert solcher glatter Funktionen. Der folgende Satz zeigt, dass die Randwerte dieser glatten Funktionen konvergieren, so dass man (in diesem Sinne) dennoch auf vernünftige Weise den Randwert von  $H^1$ -Funktionen definieren kann.

**Definition und Satz 2.26**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  eine offene, beschränkte Menge mit glattem Rand.

Es existiert ein beschränkter linearer Operator

$$\gamma_{\partial\Omega} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$$

so dass  $\gamma_{\partial\Omega}u = u|_{\partial\Omega}$  für alle  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ .  $\gamma_{\partial\Omega}$  heißt Spuroperator. Auch für  $u \in H^1(\Omega) \setminus C^\infty(\overline{\Omega})$  verwenden wir in diesem Sinne die Schreibweise  $u|_{\partial\Omega}$ .

**Beweis:** [Evans] □

**Definition und Satz 2.27**

Für ein eindimensionales Intervall  $\Omega = ]A, B[ \subset \mathbb{R}$ ,  $B > A$  gilt die folgende analoge Aussage:

Es existiert ein beschränkter linearer Spuroperator

$$\gamma : H^1(]A, B[) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

so dass  $\gamma u = (u(A), u(B))^T$  für alle  $u \in C^\infty([A, B])$ . Wir verwenden in diesem Sinne für alle  $u \in H^1([A, B])$  die Schreibweisen  $u(A)$  und  $u(B)$ . (Tatsächlich kann man zeigen, dass  $H^1$ -Funktionen über eindimensionalen Mengen stetig sind.)

$\gamma$  ist offenbar surjektiv, da für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  die Funktion

$$u(x) := \frac{\beta - \alpha}{B - A}(x - A) + \alpha$$

eine  $C^\infty$ -Funktion mit Spurwerten  $u(A) = \alpha$  und  $u(B) = \beta$  ist.

**Beweis:** Übungsaufgabe 3.3. □

### 2.2.3 Die Greensche Formel (Neumann-Randwerte)

Unter zusätzlichen Bedingungen können auch die Randwerte der Ableitung einer  $H^1$ -Funktion definiert werden. Für das Folgende sei zuerst  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  eine offene, beschränkte Menge mit glattem Rand.

Für  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  definieren wir dabei die (äußere) Normalenableitung durch

$$\partial_\nu u|_{\partial\Omega} := \partial_{\nu(x)} u(x) = \nu(x) \cdot \nabla u(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

und erinnern an den Gauß'schen Satz:

**Satz 2.28**

Für  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  gilt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \nu_i ds,$$

wobei  $\nu_i$  die  $i$ -te Komponente des äußeren Normalenvektors  $\nu$  auf  $\partial\Omega$  ist.

**Beweis:** siehe z.B. [Forster3, §15]. □

**Folgerung 2.29**

Seien  $u, w \in H^1(\Omega)$ . Dann ist

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} w dx + \int_{\Omega} u \frac{\partial w}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} u w \nu_j ds. \tag{2.3}$$

**Beweis:** Für  $u, w \in C^\infty(\overline{\Omega})$  gilt nach Satz 2.28

$$\int_{\partial\Omega} u w \nu_j ds = \int_{\Omega} \frac{\partial(uw)}{\partial x_j} dx$$

und damit (2.3). Mit Satz 2.24 und Satz 2.26 folgt dies durch stetige Fortsetzung auch für  $u, w \in H^1(\Omega)$ . □

**Folgerung 2.30 (Green'sche Formel)**

Seien  $u, w \in C^2(\overline{\Omega})$ . Es gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = - \int_{\Omega} \Delta u w \, dx + \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u w \, ds$$

**Beweis:** Wir wenden Satz 2.28 auf  $w \partial_{x_i} u$  an und erhalten

$$\int_{\partial\Omega} w(\partial_{x_i} u) \nu_i \, ds = \int_{\Omega} \partial_{x_i} (w(\partial_{x_i} u)) \, dx = \int_{\Omega} ((\partial_{x_i} w)(\partial_{x_i} u) + w \partial_{x_i}^2 u) \, dx.$$

Die Behauptung folgt dann durch Summation über alle  $x_i$ . □

Dies suggeriert die folgende Verallgemeinerung.

**Definition 2.31**

Sei  $u \in H_{\Delta}^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega)\}$ . Wir nennen  $g \in L^2(\partial\Omega)$  die Normalenableitung oder auch Neumann-Randwert von  $u$ , falls

$$\int_{\partial\Omega} g w|_{\partial\Omega} \, ds = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx + \int_{\Omega} \Delta u w \, dx,$$

für alle  $w \in H^1(\Omega)$ . Wir schreiben  $g = \partial_{\nu} u|_{\partial\Omega}$ .

**Bemerkung 2.32**

Nicht jede Funktion  $u \in H_{\Delta}^1(\Omega)$  besitzt Neumann-Randwerte in  $L^2(\partial\Omega)$ . Dies hängt damit zusammen, dass nicht jede Funktion  $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$  Randwert einer  $H^1(\Omega)$ -Funktion ist.

Man kann den Raum der Spurwerte genauer charakterisieren. Dies führt auf den Raum  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ , der in einem gewissen Sinne zwischen  $H^1$  und  $H^0 = L^2$  liegt. Der Raum der Neumann-Randwerte von Funktionen  $u \in H_{\Delta}^1(\Omega)$  ist  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ , der Raum der stetigen, linearen Abbildungen von  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  nach  $\mathbb{R}$ . Es gilt  $L^2(\partial\Omega) \subsetneq H^{-1/2}(\partial\Omega)$ , wir werden aber nur Funktionen mit Neumannrandwerten in  $L^2(\partial\Omega)$  benötigen. Man kann zeigen, dass Neumann-Randwerte eindeutig bestimmt sind.

**Bemerkung 2.33**

Für  $u \in H^1(\Omega)$  ist  $\nabla u \in L^2(\Omega)^n$  und darum die Multiplikation mit einer Funktion  $\kappa \in L^{\infty}(\Omega)$  definiert,  $\kappa \nabla u \in L^2(\Omega)^n$ . (Erinnerung: Für allgemeine Distributionen ist keine Multiplikation definiert!) Die  $L^2(\Omega)^n$ -Funktion  $\kappa \nabla u$  kann wiederum als Distribution differenziert werden, d.h. der Ausdruck

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla u) \in D'(\Omega)$$

ergibt für alle  $u \in H^1(\Omega)$  mathematisch einen Sinn.

## KAPITEL 2. SCHWACHE LÖSUNGSTHEORIE ELLIPTISCHER PDGL

Gilt für ein  $u \in H^1(\Omega)$  sogar  $\nabla \cdot (\kappa \nabla u) \in L^2(\Omega)$ , so nennen wir analog zu Definition 2.31,  $g \in L^2(\Omega)$  die Normalenableitung oder auch Neumann-Randwert von  $u$ , falls

$$\int_{\partial\Omega} gv|_{\partial\Omega} ds = \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\kappa \nabla u) v dx,$$

für alle  $v \in H^1(\Omega)$ . Wir schreiben  $g = \kappa \partial_\nu u|_{\partial\Omega}$ .

Wiederum kann man zeigen, dass Neumann-Randwerte eindeutig bestimmt sind, jedoch nicht jedes  $u \in H^1(\Omega)$  mit  $\nabla \cdot (\kappa \nabla u) \in L^2(\Omega)$  Neumann-Randwerte in  $L^2(\partial\Omega)$  besitzt.

### Bemerkung 2.34

Für ein eindimensionales Intervall  $\Omega = ]A, B[ \subset \mathbb{R}$ ,  $B > A$  gilt analoges:

Ist  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\kappa \in L^\infty(]A, B[)$  und  $(\kappa u')' \in L^2(\Omega)$ , so existieren Zahlen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\beta v(B) - \alpha v(A) = \int_A^B \kappa u' v' dx + \int_A^B (\kappa u')' v dx \quad \forall v \in H^1(]A, B[).$$

Für glatte  $u, v$  und  $\kappa$  gilt diese Gleichheit offenbar mit

$$\beta = \kappa(B)u'(B) \quad \text{und} \quad \alpha = \kappa(A)u'(A).$$

Für  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\kappa \in L^\infty(]A, B[)$  und  $(\kappa u')' \in L^2(\Omega)$  nennen wir  $\alpha$  und  $\beta$  deshalb die Neumann-Randwerte von  $u$  und schreiben

$$\kappa(B)u'(B) := \beta \quad \text{und} \quad \kappa(A)u'(A) := \alpha.$$

### 2.2.4 Nullfortsetzungen

Weiterhin sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein offenes beschränktes Intervall (für  $n = 1$ ) oder eine offene, beschränkte Menge mit glattem Rand (für  $n \geq 2$ ).

#### Definition 2.35

Wir definieren

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

also insbesondere für  $\Omega = ]A, B[ \subset \mathbb{R}$ ,

$$H_0^1(]A, B[) := \{u \in H^1(]A, B[) : u(A) = 0 = u(B)\}.$$

Wegen Satz 2.26 ist dies ein abgeschlossener Unterraum von  $H^1(\Omega)$  und damit selbst ein Hilbertraum bezüglich dem  $H^1$ -Skalarprodukt.

## 2.3. VARIATIONSFORMULIERUNGEN UND SATZ VON LAX-MILGRAM

### Satz 2.36

Ist  $u \in H_0^1(\Omega)$ , so lässt sich  $u$  durch Null zu einer Funktion  $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$  fortsetzen.

**Beweis:** Sei  $v$  die Nullfortsetzung von  $u$  und  $v_j$  die Nullfortsetzung von  $\partial_{x_j}u$ . Offenbar gilt  $v, v_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}$  und  $\|v_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\partial_{x_j}u\|_{L^2(\Omega)}$ , so dass wir nur zeigen müssen, dass  $v_j = \partial_{x_j}v$ . Dies folgt aus

$$\int_{\mathbb{R}^n} v \partial_{x_j} \varphi \, dx = \int_{\Omega} u \partial_{x_j} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} (\partial_{x_j} u) \varphi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} v_j \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

wobei wir Folgerung 2.29 und  $u|_{\partial\Omega} = 0$  verwendet haben.  $\square$

### Satz 2.37

$\mathcal{D}(\Omega)$  liegt dicht in  $H_0^1(\Omega)$ .

**Beweis:** [Evans]  $\square$

### Bemerkung 2.38

Für Funktionen aus  $C^\infty(\overline{\Omega})$  sind auch die Spurwerte von höheren Ableitungen definiert. Satz 2.37 zeigt jedoch, dass sich diese nicht vernünftig auf  $H^1(\Omega)$  erklären lassen.

In diesem Zusammenhang betonen wir noch einmal, dass die Definition der Neumann-Randwerte einer Funktion  $u \in H^1(\Omega)$  im letzten Abschnitt die zusätzliche Bedingung  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  bzw.  $\nabla \cdot (\kappa \nabla u) \in L^2(\Omega)$  erforderte.

## 2.3 Variationsformulierung elliptischer PDGL und der Satz von Lax-Milgram

In diesem Abschnitt behandeln wir die Lösungstheorie für das folgende Musterproblem einer linearen elliptischen partiellen Differentialgleichung,

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) + cu = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.4)$$

mit Koeffizienten  $a, c \in L^\infty(\Omega)$  und  $f \in L^2(\Omega)$  in einem beschränkten, glatt berandeten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ .

### Bemerkung 2.39

Aufgrund unserer Annahme an  $a$  und  $c$  ergeben die Multiplikationen in der Gleichung (2.4) für alle  $u \in H^1(\Omega)$  Sinn. Es ist  $\nabla u \in L^2(\Omega)^n$ , also  $a \nabla u \in L^2(\Omega)^n$  und

$cu \in L^2(\Omega)$ . Die Divergenz ist im distributionellen Sinne erklärt,  $-\nabla \cdot (a\nabla u) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

Für alle Lösungen  $u \in H^1(\Omega)$  der Gleichung (2.4) gilt wegen der Annahme an  $f$  sogar  $\nabla \cdot (a\nabla u) \in L^2(\Omega)$ . Für solche Lösungen von (2.4) (nicht aber für alle  $u \in H^1(\Omega)$ !) macht es also Sinn, entsprechend Bemerkung 2.33 eine zusätzliche Bedingung an die Normalenableitung  $a\partial_\nu u|_{\partial\Omega}$  zu stellen.

### 2.3.1 Variationsformulierung

Wir werden sehen, dass die Lösung von (2.4) erst durch Vorgabe von Dirichlet- oder Neumannrandwerten eindeutig bestimmt ist. Die eindeutige Existenz zeigen wir dabei durch Betrachtung der sogenannten *Variationsformulierung* von (2.4), die von der Randvorgabe abhängt.

#### Satz 2.40 (Variationsformulierungen)

(a) Die folgenden Probleme sind äquivalent (homogenes Dirichletproblem)

(i)  $u \in H^1(\Omega)$  löst (2.4) und  $u|_{\partial\Omega} = 0$ .

(ii)  $u \in H_0^1(\Omega)$  und löst

$$\int_{\Omega} (a\nabla u \cdot \nabla v + cuv) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

(b) Sei  $g \in L^2(\partial\Omega)$  ein möglicher Randwert einer  $H^1$ -Funktion, d.h. es existiere  $u_g \in H^1(\Omega)$  mit  $u_g|_{\partial\Omega} = g$ . Die folgenden Probleme sind äquivalent (inhomogenes Dirichletproblem)

(i)  $u \in H^1(\Omega)$  löst (2.4) und  $u|_{\partial\Omega} = g$ .

(ii)  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $u|_{\partial\Omega} = g$  und  $u$  löst

$$\int_{\Omega} (a\nabla u \cdot \nabla v + cuv) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.5)$$

(iii)  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $u_0 := u - u_g \in H_0^1(\Omega)$  und  $u_0$  löst

$$\int_{\Omega} (a\nabla u_0 \cdot \nabla v + cu_0 v) \, dx = - \int_{\Omega} (a\nabla u_g \cdot \nabla v + cu_g v) \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx$$

für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Insbesondere hängt  $u$  nicht von der Wahl von  $u_g$  sondern nur von  $g$  ab.

(c) Sei  $g \in L^2(\partial\Omega)$ . Die folgenden Probleme sind äquivalent (Neumannproblem)

### 2.3. VARIATIONSFORMULIERUNGEN UND SATZ VON LAX-MILGRAM

(i)  $u \in H^1(\Omega)$  löst (2.4) und  $a\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = g$ .

(ii)  $u \in H^1(\Omega)$ , und  $u$  löst

$$\int_{\Omega} (a\nabla u \cdot \nabla v + cuv) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, ds \quad (2.6)$$

für alle  $v \in H^1(\Omega)$ .

**Beweis:** (b) Wir zeigen direkt (b), dann folgt (a) als Spezialfall mit  $g = 0$  und  $u_g = 0$ . Sei also  $g \in L^2(\partial\Omega)$  und  $u_g \in H^1(\Omega)$  eine Funktion mit  $u_g|_{\partial\Omega} = g$ .

(i)  $\implies$  (ii): Zuerst sei  $u \in H^1(\Omega)$  Lösung von (2.4) und  $u|_{\partial\Omega} = g$ . Dann löst  $u$  für alle  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (a\nabla u \cdot \nabla v + cuv) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^n a(\partial_{x_j} u)(\partial_{x_j} v) + cuv \right) \, dx = \sum_{j=1}^n \langle a\partial_{x_j} u, \partial_{x_j} v \rangle + \langle cu, v \rangle \\ &= \left\langle -\sum_{j=1}^n \partial_{x_j} (a\partial_{x_j} u) + cu, v \right\rangle = \langle -\nabla \cdot (a\nabla u) + cu, v \rangle = \langle f, v \rangle \\ &= \int_{\Omega} f v \, dx. \end{aligned}$$

Da beide Seiten stetig sind in  $v$  bzgl. der  $H^1(\Omega)$ -Norm und  $\mathcal{D}(\Omega)$  dicht in  $H_0^1(\Omega)$  liegt, gilt dies sogar für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

(ii)  $\implies$  (i): Da  $u$  (2.5) für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$  löst, löst  $u$  (2.5) insbesondere auch für alle  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  und damit ist

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) + cu = f.$$

(iii)  $\iff$  (ii): klar.

(c) (i)  $\implies$  (ii): Sei  $u \in H^1(\Omega)$  Lösung von (2.4) mit  $a\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = g$ . Nach Bemerkung 2.33 gilt also für alle  $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, ds &= \int_{\Omega} (a\nabla u \cdot \nabla v + \nabla \cdot (a\nabla u)v) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (a\nabla u \cdot \nabla v + (cu - f)v) \, dx, \end{aligned}$$

so dass  $u$  (2.6) löst.

(ii)  $\implies$  (i): Für die Rückrichtung von (c), löse  $u \in H^1(\Omega)$  Gleichung (2.6) für alle  $v \in H^1(\Omega)$ . Dann gilt insbesondere für alle  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} (a \nabla u \cdot \nabla v + cuv) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

also  $-\nabla \cdot (a \nabla u) + cu = f$ .

Damit ist insbesondere auch  $-\nabla \cdot (a \nabla u) = f - cu \in L^2(\Omega)$  und für alle  $v \in H^1(\Omega)$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} g v |_{\partial\Omega} \, ds &= \int_{\Omega} (a \nabla u \cdot \nabla v + cuv - f v) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (a \nabla u \cdot \nabla v + \nabla \cdot (a \nabla u) v) \, dx, \end{aligned}$$

also nach Bemerkung 2.33  $a \partial_{\nu} u |_{\partial\Omega} = g$ . □

### 2.3.2 Der Satz von Lax-Milgram

Für alle drei Probleme folgt die eindeutige Lösbarkeit aus dem Satz von Lax-Milgram.

#### Satz 2.41 (Lax-Milgram)

Es sei  $H$  ein Hilbertraum und

$$b : H \times H \rightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige<sup>2</sup>, symmetrische, koerzive Bilinearform, d.h.

$$b(u, v) = b(v, u) \quad \forall u, v \in H \quad (\text{Symmetrie}) \quad (2.7)$$

$$\exists C > 0 : |b(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H \quad (\text{Stetigkeit}) \quad (2.8)$$

$$\exists \beta > 0 : b(u, u) \geq \beta \|u\|^2 \quad \forall u \in H \quad (\text{Koerzivität}) \quad (2.9)$$

und  $b$  ist in beiden Komponenten linear. Weiterhin sei  $l \in H'$ .

<sup>2</sup>Bedingung (2.8) ist dabei tatsächlich äquivalent zur Stetigkeit von  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ . Gilt nämlich  $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ , so folgt  $b(u_n, v_n) \rightarrow b(u, v)$  aus (2.8) wegen

$$|b(u_n, v_n) - b(u, v)| = |b(u_n, v_n - v) + b(u_n - u, v)| \leq C \|u_n\| \|v_n - v\| + C \|u_n - u\| \|v\| \rightarrow 0.$$

Ist umgekehrt (2.8) nicht erfüllt, so existiert eine Folge  $(u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $|b(u_n, v_n)| \geq n^2 \|u_n\| \|v_n\|$ . Für  $\tilde{u}_n := \frac{u_n}{n \|u_n\|}$ ,  $\tilde{v}_n := \frac{v_n}{n \|v_n\|}$  gilt dann aber  $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) \rightarrow (0, 0)$  und  $|b(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) - b(0, 0)| \geq 1$ , so dass  $b$  nicht stetig sein kann.



### 2.3. VARIATIONSFORMULIERUNGEN UND SATZ VON LAX-MILGRAM

Dann existiert genau ein  $u \in H$  mit

$$b(u, v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in H \quad (2.10)$$

und  $u$  hängt stetig und linear von  $l$  ab,

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\beta} \|l\|_{H'}.$$

**Beweis:** Die Eindeutigkeit und die stetige Abhängigkeit folgen direkt aus der Koerzivität. Sind nämlich  $u_1, u_2 \in H$  zwei Lösungen, so ist

$$\beta \|u_1 - u_2\|_H^2 \leq b(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = l(u_1 - u_2) - l(u_1 - u_2) = 0$$

also  $u_1 = u_2$ . Außerdem ist für eine Lösung  $u \in H$

$$\beta \|u\|_H^2 \leq b(u, u) = l(u) \leq \|l\|_{H'} \|u\|_H,$$

so dass  $u$  stetig von  $l$  abhängt mit Stetigkeitskonstante  $\frac{1}{\beta}$ . Die Linearität folgt aus der Eindeutigkeit und (2.10).

Für die Existenz zeigen wir zunächst, dass ein Minimum  $u \in H$  des Funktionals

$$J: H \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(v) := \frac{1}{2}b(v, v) - l(v)$$

existiert und danach, dass dieses Minimum auch (2.10) löst.

$J$  ist nach unten beschränkt,

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\beta \|v\|_H^2 - \|l\|_{H'} \|v\|_H = \frac{1}{2\beta} (\beta \|v\|_H - \|l\|_{H'})^2 - \frac{\|l\|_{H'}^2}{2\beta} \geq -\frac{\|l\|_{H'}^2}{2\beta}.$$

Deshalb existiert das Infimum  $\inf_{v \in H} J(v) \in \mathbb{R}$ . Sei  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq H$  eine *minimierende Folge*, also  $J(u_k) \rightarrow \inf_{v \in H} J(v)$ . Für diese Folge gilt

$$\begin{aligned} \beta \|u_k - u_l\|_H^2 &\leq b(u_k - u_l, u_k - u_l) \\ &= 2b(u_k, u_k) + 2b(u_l, u_l) - b(u_k + u_l, u_k + u_l) \\ &= 4J(u_k) + 4J(u_l) - 8J\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right) \\ &\leq 4J(u_k) + 4J(u_l) - 8 \inf_v J(v) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $k, l \rightarrow \infty$ .

$(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist also eine Cauchy-Folge, so dass der Grenzwert  $u := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$  existiert. Da  $J$  als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen stetig ist, erfüllt der Grenzwert  $J(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \inf_v J(v)$ ,  $u$  ist also ein Minimum von  $J$ .

Wir müssen noch zeigen, dass dieses Minimum (2.10) löst. Es gilt für alle  $c \in \mathbb{R}$  und  $v \in H$

$$\frac{1}{2}b(u, u) - l(u) \leq \frac{1}{2}b(u + cv, u + cv) - l(u + cv)$$

und damit

$$0 \leq cb(u, v) + \frac{1}{2}c^2b(v, v) - cl(v).$$

Mit einer Folge  $c_k > 0$ ,  $c_k \rightarrow 0^+$  und einer Folge  $c_k < 0$ ,  $c_k \rightarrow 0^-$  folgt deshalb

$$b(u, v) \geq l(v) \quad \text{und} \quad b(u, v) \leq l(v) \quad \forall v \in H,$$

also (2.10). □

### 2.3.3 Variationelle Lösungstheorie

#### Folgerung 2.42

Es gelte

$$a, c \in L_+^\infty(\Omega) := \{h \in L^\infty(\Omega), \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} h(x) > 0\}.$$

Dann sind das homogene Dirichletproblem, das inhomogene Dirichletproblem und das Neumannproblem jeweils eindeutig lösbar.

Die jeweilige Lösung hängt stetig und linear von der rechten Seite sowie der Dirichletvorgabe  $(f, u_g) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , bzw. von der rechten Seite und den Neumannranddaten  $(f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$  ab.

**Beweis:** Wir definieren die Bilinearform

$$b(u, v) = \int_{\Omega} (a \nabla u \cdot \nabla v + cuv) \, dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Sei zuerst  $c \in L_+^\infty(\Omega)$ . Mit

$$C := \max(\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} a(x), \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} c(x)),$$

$$\beta := \min(\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} a(x), \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} c(x))$$

gilt

$$\begin{aligned} |b(u, v)| &\leq C \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq 2C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

### 2.3. VARIATIONSFORMULIERUNGEN UND SATZ VON LAX-MILGRAM

und

$$b(u, u) \geq \beta \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) \, dx = \beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

$b$  erfüllt also die Voraussetzungen von Satz 2.41 für  $H = H^1(\Omega)$  (und damit insbesondere auch auf dem Teilraum  $H = H_0^1(\Omega)$ .)

**Im Falle des Dirichletproblems** setzen wir

$$l(v) := - \int_{\Omega} (a \nabla u_g \cdot \nabla v + c u_g v) \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dann ist wie oben

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq 2C \|u_g\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &= \left( 2C \|u_g\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

also  $l$  stetig und  $\|l\|_{H_0^1(\Omega)'} \leq 2C \|u_g\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}$ . Nach Satz 2.41 existiert daher genau eine Lösung  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  von

$$b(u_0, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

und  $u_0$  hängt linear und stetig von  $u_g$  und  $f$  ab. Nach Satz 2.40 (b) entspricht dies genau einer Lösung  $u = u_g + u_0$  des Dirichletproblems und auch diese hängt stetig und linear von  $(f, u_g)$  ab.

**Im Falle des Neumannproblems** setzen wir

$$l(v) := \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v |_{\partial\Omega} \, ds \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Dann existiert nach Satz 2.26 ein  $C' > 0$  so dass

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq C' \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Also ist auch hier  $l$  stetig und  $\|l\|_{H^1(\Omega)'} \leq C' \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right)$ .

Es existiert also nach Satz 2.41 genau eine Lösung von

$$b(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

also nach Satz 2.40 (c) genau eine Lösung des Neumannproblems, und die Lösung hängt stetig und linear von  $(f, g)$  ab.  $\square$

**Bemerkung 2.43**

Für ein eindimensionales Intervall  $\Omega = ]A, B[ \subset \mathbb{R}$ ,  $B > A$  gilt wiederum Analoges:  
Seien  $a, c \in L^\infty(]A, B[)$  und  $f \in L^2(]A, B[)$ .

(I) Die folgenden Probleme sind äquivalent (homogenes Dirichletproblem):

(i)  $u \in H^1(]A, B[)$  löst

$$-(au')' + cu = f \text{ in } ]A, B[ \quad \text{und} \quad u(A) = 0 = u(B).$$

(ii)  $u \in H_0^1(]A, B[)$  und löst

$$\int_A^B (au'v' + cuv) dx = \int_A^B f v dx \quad \forall v \in H_0^1(]A, B[).$$

(II) Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Sei  $u_g \in H^1(]A, B[)$  eine Funktion mit  $u_g(A) = \alpha$ ,  $u_g(B) = \beta$   
(z.B.  $u_g(x) = (x - A)(\beta - \alpha)/(B - A) + \alpha$ ). Die folgenden Probleme sind äquivalent (inhomogenes Dirichletproblem):

(i)  $u \in H^1(]A, B[)$  löst

$$-(au')' + cu = f \text{ in } ]A, B[ \quad \text{und} \quad u(A) = \alpha, u(B) = \beta.$$

(ii)  $u \in H^1(]A, B[)$ ,  $u(A) = \alpha$ ,  $u(B) = \beta$  und

$$\int_A^B (au'v' + cuv) dx = \int_A^B f v dx \quad \forall v \in H_0^1(]A, B[).$$

(iii)  $u \in H^1(]A, B[)$ ,  $u_0 := u - u_g \in H_0^1(]A, B[)$  und  $u_0$  erfüllt

$$\int_A^B (au_0'v' + cu_0v) dx = - \int_A^B (au_g'v' + cu_gv) dx + \int_A^B f v dx$$

für alle  $v \in H_0^1(]A, B[)$ .

(III) Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Die folgenden Probleme sind äquivalent (Neumannproblem):

(i)  $u \in H^1(]A, B[)$  löst

$$-(au')' + cu = f \text{ in } ]A, B[ \quad \text{und} \quad a(A)u'(A) = \alpha, a(B)u'(B) = \beta.$$

(ii)  $u \in H^1(]A, B[)$  und  $u$  erfüllt für alle  $v \in H^1(]A, B[)$

$$\int_A^B (au'v' + cuv) dx = \int_A^B f v dx + \beta v(B) - \alpha v(A).$$

### 2.3. VARIATIONSFORMULIERUNGEN UND SATZ VON LAX-MILGRAM

Wie zuvor folgt aus dem Satz von Lax-Milgram, dass für  $a, c \in L^{\infty}(\cdot, \cdot)$  das homogene und das inhomogene Dirichletproblem sowie das Neumannproblem eindeutig lösbar sind, und dass die jeweiligen Lösungen stetig und linear von der rechten Seite  $f \in L^2(\cdot, \cdot)$  und den Dirichlet- bzw. Neumannvorgaben  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  abhängen.

#### Bemerkung 2.44

(a) Nimmt man als Bilinearform  $b$  das Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_H$  in einem Hilbertraum  $H$ , so sind offenbar alle Voraussetzungen von Satz 2.41 erfüllt. Es gibt also eine stetige lineare Abbildung  $\iota : H' \rightarrow H$  mit

$$(\iota(l), v)_H = l(v) \quad \forall l \in H', v \in H.$$

Offenbar besitzt  $\iota$  auch eine stetige lineare Inverse

$$(\iota^{-1}u)(v) = (u, v)_H \quad \forall u, v \in H$$

und es gilt  $\|\iota^{-1}u\|_{H'} = \|u\|_H$ .  $H$  ist isometrisch isomorph zu  $H'$ . Dies bezeichnet man auch als Riesz'schen Darstellungssatz.

(b) Speziell für  $H = L^2(\Omega)$  identifiziert man üblicherweise  $H$  und  $H'$  durch  $\iota$ , unterscheidet also nicht zwischen einer Funktion  $u$  und dem linearen Funktional  $v \mapsto \int_{\Omega} uv dx$ . Dies entspricht der Identifikation von Funktionen mit Distributionen aus Definition 2.8.

(c) Für Koeffizienten  $a = c = 1$  ist  $b(\cdot, \cdot)$  aus Korollar 2.42 gerade das  $H^1$ -Skalarprodukt. Die Identifikation von  $H^1(\Omega)$  und  $H^1(\Omega)'$  würde also die Identifikation der rechten Seite der PDGL  $f \in L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)'$  mit der zugehörigen Lösung  $u$  bedeuten. Hier wäre eine Identifikation also sehr kontraintuitiv!

#### Bemerkung 2.45

Alle Resultate aus diesem Kapitel gelten auch schon unter der schwächeren Voraussetzung, dass  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet ist, d.h. die den Rand parametrisierende Funktion  $\gamma$  aus Definition 2.22 nur als Lipschitz-stetig vorausgesetzt wird, siehe [Grisvard].

## KAPITEL 2. SCHWACHE LÖSUNGSTHEORIE ELLIPTISCHER PDGL

---

# Kapitel 3

## Finite-Elemente-Verfahren

Die variationelle Theorie elliptischer PDGL führte zu dem Problem, die Lösung  $u \in H$  eines *Variationsproblem*, d.h. einer Gleichung der Form

$$b(u, v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in H$$

zu bestimmen, wobei

- $H$  ein Hilbertraum ist (in dieser Vorlesung:  $H = H^1(\Omega)$  oder  $H = H_0^1(\Omega)$  auf einem beschränkten glatt berandeten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  oder  $\Omega = ]A, B[ \subset \mathbb{R}$ ,
- $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  und  $l : H \rightarrow \mathbb{R}$  die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram (Satz 2.41) erfüllen ( $b$  bilinear, symmetrisch, stetig und koerziv,  $l$  stetig und linear).

### 3.1 Galerkin-Verfahren und Céa-Lemma

Ist  $H$  endlichdimensional, so ist dieses variationelle Problem nichts anderes als ein lineares Gleichungssystem:

#### Lemma 3.1

Sei  $\dim(H) = N$ .  $w_1, \dots, w_N \in H$  sei eine Basis von  $H$ . Sei  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear und  $l : H \rightarrow \mathbb{R}$  linear.

Dann löst  $u = \sum_{j=1}^N x_j w_j$  (mit  $x_j \in \mathbb{R}$ ) genau dann

$$b(u, v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in H, \tag{3.1}$$

### KAPITEL 3. FINITE-ELEMENTE-VERFAHREN

wenn der Vektor der Entwicklungskoeffizienten  $x = (x_1, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N$  das lineare Gleichungssystem

$$B^T x = y$$

löst, wobei  $B = (b(w_i, w_j))_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$  und  $y = (l(w_j))_{j=1}^N$ . Ist  $b$  zusätzlich symmetrisch, so gilt  $B = B^T$ .

**Beweis:** Für  $u = \sum_{j=1}^N x_j w_j$  und  $v = \sum_{i=1}^N \xi_i w_i$  gilt wegen der Bilinearität von  $b$  und der Linearität von  $l$

$$b(u, v) = \sum_{i,j=1}^N x_j \xi_i b(w_j, w_i) \quad \text{und} \quad l(v) = \sum_{i=1}^N \xi_i l(w_i).$$

Das variationelle Problem (3.1) ist also äquivalent zu

$$\sum_{i,j=1}^N x_j \xi_i b(w_j, w_i) = \sum_{i=1}^N \xi_i l(w_i) \quad \forall \xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}.$$

Dies können wir mit

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad \xi := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} l(w_1) \\ \vdots \\ l(w_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N,$$

sowie  $B := (b(w_i, w_j))_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N}$  schreiben als

$$\xi^T B^T x = \xi^T y \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

was offensichtlich äquivalent ist zu  $B^T x = y$ . Offenbar gilt für symmetrische  $b$ , dass  $B = B^T$ .  $\square$

Ist  $H$  unendlichdimensional (etwa  $H = H^1(\Omega)$ ) so können wir das Problem

$$\text{Finde } u \in H, \text{ so dass } b(u, v) = l(v) \text{ für alle } v \in H!$$

näherungsweise lösen, indem wir einen endlichdimensionalen Teilraum  $V \subset H$  wählen und das Problem

$$\text{Finde } \tilde{u} \in V, \text{ so dass } b(\tilde{u}, \tilde{v}) = l(\tilde{v}) \text{ für alle } \tilde{v} \in V!$$

(also gemäß Lemma 3.1 ein lineares Gleichungssystem) lösen. Dieses Vorgehen heißt *Galerkin-Verfahren*,  $\tilde{u}$  heißt auch *Galerkin-Projektion* der wahren Lösung  $u \in H$ .

Wir zeigen zunächst, dass die auftretenden endlichdimensionalen variationellen Probleme eindeutig lösbar sind:



### 3.1. GALERKIN-VERFAHREN UND CÉA-LEMMA

#### Lemma 3.2

Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  und  $l : H \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram. Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Teilvektorraum von  $H$ .

Dann existiert genau eine Lösung  $\tilde{u} \in V$  von

$$b(\tilde{u}, \tilde{v}) = l(\tilde{v}) \quad \text{für alle } \tilde{v} \in V.$$

Das gemäß Lemma 3.1 aufgestellte lineare Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar.

**Beweis:** Das  $H$ -Skalarprodukt ist offenbar auch ein Skalarprodukt auf  $V$ , und als endlichdimensionaler Raum ist  $V$  vollständig, also ein Hilbertraum. Erfüllen  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  und  $l : H \rightarrow \mathbb{R}$  die Voraussetzung des Satzes von Lax-Milgram, so erfüllen offensichtlich auch ihre Einschränkungen

$$b|_V : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad l|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$$

diese Voraussetzungen. Die Behauptung folgt deshalb aus dem Satz von Lax-Milgram.  $\square$

Wir würden erwarten, dass die Galerkin-Projektion  $\tilde{u}$  (d.h. die Lösung des Variationsproblems in  $V$ ) umso besser mit der wahren Lösung  $u$  (d.h. der Lösung des Variationsproblems in  $H$ ) übereinstimmt, umso besser sich die Vektoren in  $H$  durch die in  $V$  approximieren lassen. Dies zeigt der folgende Satz:

#### Satz 3.3 (Céa-Lemma)

Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  und  $l : H \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram. Seien  $C > 0$  und  $\beta > 0$  die Stetigkeits- und Koerzivitätskonstanten von  $b$ , also

$$|b(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \text{und} \quad b(u, u) \geq \beta \|u\|^2 \quad \forall u, v \in H.$$

Sei  $V \subseteq H$  ein endlichdimensionaler Untervektorraum von  $H$  und  $\tilde{u} \in V$  die dazugehörige Galerkin-Projektion, d.h. die Lösung von

$$b(\tilde{u}, \tilde{v}) = l(\tilde{v}) \quad \text{für alle } \tilde{v} \in V.$$

Dann gilt

$$\|u - \tilde{u}\|_H \leq \frac{C}{\beta} \inf_{v \in V} \|u - v\|_H.$$

**Beweis:** Für jedes  $v \in V$  ist

$$b(u - \tilde{u}, v) = b(u, v) - b(\tilde{u}, v) = l(v) - l(v) = 0$$

insbesondere ist also auch  $b(u - \tilde{u}, \tilde{u}) = 0$ . Für alle  $v \in V$  gilt deshalb

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|^2 &\leq \frac{1}{\beta} b(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) = \frac{1}{\beta} b(u - \tilde{u}, u) = \frac{1}{\beta} b(u - \tilde{u}, u - v) \\ &\leq \frac{C}{\beta} \|u - \tilde{u}\| \|u - v\| \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. □

Das Céa-Lemma (Satz 3.3) zeigt, dass (bis auf die Konstante  $\frac{C}{\beta}$ ) die Galerkin-Projektion  $\tilde{u} \in V$  die bestmögliche Approximation der wahren Lösung  $u \in H$  im Teilraum  $V$  ist.

**Folgerung 3.4**

(a) Seien  $V_1, V_2, \dots \subseteq H$  Untervektorräume und  $\tilde{u}_N$  die dazugehörigen Galerkin-Projektion. Gilt für jedes  $\eta \in H$

$$\inf_{v \in V_N} \|\eta - v\| \rightarrow 0,$$

dann konvergieren die Galerkin-Projektion gegen die wahre Lösung

$$\tilde{u}_N \rightarrow u.$$

(b) Sind  $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq H$  Untervektorräume, für die  $\bigcup_{N=1}^{\infty} V_N$  dicht in  $H$  liegt, so konvergieren die Galerkin-Projektionen gegen die wahre Lösung

$$\tilde{u}_N \rightarrow u.$$

**Beweis:** (a) folgt sofort aus dem Céa-Lemma (Satz 3.3).

(b) Da  $\bigcup_{N=1}^{\infty} V_N$  dicht in  $H$  liegt, existiert zu  $u \in H$  eine Folge  $v_n \in \bigcup_{N=1}^{\infty} V_N$  mit  $v_n \rightarrow u$ . Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  existiert ein  $N(n) \in \mathbb{N}$  so dass  $v_n \in V_{N(n)}$ . Für alle  $k \geq N(n)$  ist also  $v_n \in V_k$  und aus dem Céa-Lemma folgt, dass

$$\|u - \tilde{u}_k\| \leq \frac{C}{\beta} \inf_{v \in V_k} \|u - v\| \leq \frac{C}{\beta} \|u - v_n\|$$

und damit  $\tilde{u}_k \rightarrow u$ . □

## 3.2 Numerische Umsetzung des Galerkin-Verfahrens

Zur numerischen Lösung einer partiellen Differentialgleichung können wir also wie folgt vorgehen:

- (a) Wir formulieren die partielle Differentialgleichung (unter Berücksichtigung der Randvorgaben) als Variationsproblem

$$b(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H$$

in einem Hilbertraum  $H$  (siehe z.B. Satz 2.40 und Bemerkung 2.43).

- (b) Wir wählen endlichdimensionale Unterräume  $V_1, V_2, \dots \subset H$ .
- (c) Wir stellen zum Unterraum  $V_N$  (genauer: mittels einer Basis dieses Unterraums) die Matrix  $B$  und die rechte Seite  $y$  des zur Variationsformulierung auf  $V_N$  äquivalenten linearen Gleichungssystem auf (siehe Lemma 3.1).
- (d) Wir lösen diese Gleichungssysteme und erhalten die Galerkin-Projektion  $\tilde{u}_N$  (genauer: ihre Koeffizienten bezüglich der verwendeten Basis von  $V_N$ ).

Erfüllt die Variationsformulierung die Voraussetzungen von Lax-Milgram, dann ist die eindeutige Lösbarkeit der partiellen Differentialgleichung garantiert. Lassen sich die Funktionen in  $H$  (im Sinne von Folgerung 3.4) durch Funktionen aus  $V_N$  approximieren, so konvergieren die erhaltenen Galerkin-Projektionen gegen die wahre Lösung der partiellen Differentialgleichung. Wir müssen also „lediglich“ gute endlichdimensionale Approximationen an den Hilbertraum  $H$  finden, d.h. eine Möglichkeit, die Funktionen in  $H$  (hier immer  $H = H^1(\Omega)$  oder  $H = H_0^1(\Omega)$ ) durch endlich viele Ansatzfunktionen möglichst gut zu approximieren.

### Beispiel 3.5

*Wir betrachten die eindimensionale Laplace-Gleichung im Einheitsintervall mit homogenen Dirichletrandwerten*

$$-u''(x) = \sin(\pi x) \quad x \in ]0, 1[, \quad u(0) = 0 = u(1). \quad (3.2)$$

*Ihre Variationsformulierung lautet gemäß Bem. 2.43: Finde  $u \in H_0^1(]0, 1[)$  mit*

$$\int_0^1 u'v' dx =: b(u, v) = l(v) := \int_0^1 \sin(\pi x)v dx \quad \forall v \in H_0^1(]0, 1[). \quad (3.3)$$

*Wir wählen als endlichdimensionale Ansatzräume*

$$V_N := \text{span}(\sin(j\pi x), j = 1, \dots, N)$$

### KAPITEL 3. FINITE-ELEMENTE-VERFAHREN

---

jeweils mit der Basis  $(\sin(j\pi x), j = 1, \dots, N)$ . Für festes  $N \in \mathbb{N}$  erhalten wir gemäß Lemma 3.1)  $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $y \in \mathbb{R}^N$ , wobei

$$B_{ij} = b(\sin(i\pi x), \sin(j\pi x)) = \int_0^1 i\pi \cos(i\pi x) j\pi \cos(j\pi x) dx$$

und

$$y_j = l(\sin(j\pi x)).$$

Durch Lösung des linearen Gleichungssystems

$$B\lambda = y$$

erhalten wir den Koeffizientenvektor  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  der Galerkin-Projektionen

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sin(j\pi x).$$

Um zu beweisen, dass  $\tilde{u}_N$  gegen die wahre Lösung  $u$  der PDGL (3.2) konvergiert, genügt es zu zeigen, dass

- (a) Die Variationsformulierung (3.3) die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram erfüllt. (Damit folgt dann auch die eindeutige Lösbarkeit von (3.2).)
- (b)  $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} V_N$  dicht in  $H^1(]0, 1[)$  liegt, d.h. dass sich  $H^1$ -Funktionen in eine (bzgl. der  $H^1$ -Norm konvergente) Sinusreihe entwickeln lassen.

Tatsächlich folgt (a) aus der Poincaré-Friedrichschen Ungleichung (Übungsaufgabe 4.2) und auch (b) gilt (dies zeigen wir im Rahmen dieser Vorlesung aber nicht für trigonometrische Polynome sondern in den folgenden Abschnitten nur für die in der Praxis üblicherweise verwendeten stückweise linearen Funktionen).

Man rechnet leicht nach, dass in diesem einfachen Beispiel gilt:

$$B_{ij} = \frac{1}{2} j^2 \pi^2 \delta_{ij}, \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_j = 0 \text{ für } j \geq 2.$$

Für alle  $N \in \mathbb{N}$  ist also

$$\tilde{u}_N(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x)$$

und dies löst offenbar (3.2).

### 3.3 Eindimensionale lineare finite Elemente

Wie wir gesehen haben, hängt die Güte der Approximation des Galerkin-Verfahrens nur davon ab, wie gut die Funktionen aus dem (unendlichdimensionalen) Hilbertraum (hier immer  $H^1(\Omega)$  oder  $H_0^1(\Omega)$ ) durch endlichdimensionale Ansatzräume approximiert werden. In [NumMath] und [NumerikDGL] haben wir mit *stückweise polynomiellen* Approximationen an Funktionen sehr gute Erfahrungen gemacht. Den einfachsten Fall der Verwendung stückweise linearer Approximationen im Galerkin-Verfahren (*lineare finite Elemente*) wollen wir im Folgenden genauer untersuchen.

Sei zuerst  $\Omega = ]A, B[$  ein eindimensionales, offenes und beschränktes Intervall. Wir wählen ein Gitter aus aufsteigend angeordneten Knoten

$$\Delta := \{x_0, x_1, \dots, x_N\} \subset [A, B], \quad A = x_0 < x_1 < \dots < x_N = B$$

und betrachten den Raum aller stetigen und (bzgl.  $\Delta$ ) stückweise linearen Funktionen

$$V_N := \{u : [A, B] \rightarrow \mathbb{R} : u \in C([A, B]), u|_{(x_{j-1}, x_j)} \text{ linear } \forall j = 1, \dots, N\}.$$

(Dies sind gerade die in [NumMath] eingeführten *linearen Splines*).

Sei  $\Lambda_i \in V_N$  diejenige stetige, stückweise lineare Funktion mit

$$\Lambda_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, \dots, N$$

(die sogenannten *Hutfunktionen*, vgl. die in der Vorlesung gemalte Skizze).

Offenbar ist  $V_N$  ein  $N + 1$ -dimensionaler Vektorraum mit Basis  $(\Lambda_0, \dots, \Lambda_N)$  und wegen Übungsaufgabe 3.1 gilt  $V_N \subset H^1(]A, B[)$ . Entsprechend ist der durch die Basis  $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{N-1})$  erzeugte Raum  $V_N^{(0)}$  offenbar  $N - 1$ -dimensional und es gilt  $V_N^{(0)} \subset H_0^1(]A, B[)$ .

Die Anwendung des Galerkin-Verfahrens mit diesen Unterräumen stückweise linearer Funktionen heißt auch *Methode der* (eindimensionalen, linearen) *finiten Elemente*. Motiviert durch Anwendungen in der Elastizitätstheorie werden dabei die linearen Abschnitte einer Funktion auf  $[x_{j-1}, x_j]$  als *finite Elemente* bezeichnet, und die gemäß Lemma 3.1 aufgestellte Matrix  $B$  und rechte Seite  $y$  heißen *Steifigkeitsmatrix* (engl.: *stiffness matrix*) und *Ladevektor* (engl.: *load vector*).

Wir untersuchen nun, wie gut sich Funktionen durch solche stückweise linearen Funktionen bzgl. der  $H^1$ -Norm approximieren lassen:

**Satz 3.6**

Sei  $\varphi \in C^\infty([A, B])$ . Definiere  $s \in V_N$  durch

$$s(x) = \sum_{j=0}^N \varphi(x_j) \Lambda_j(x).$$

( $s$  ist also gerade der  $\varphi$ -interpolierende lineare Spline.)

Dann gilt mit  $h_N := \max_{j=1, \dots, N} |x_j - x_{j-1}|$

$$\begin{aligned} \|\varphi - s\|_{L^2([A, B])} &\leq \frac{h_N^2}{2} \|\varphi''\|_{L^2([A, B])}, \\ \|\varphi' - s'\|_{L^2([A, B])} &\leq \frac{h_N}{\sqrt{2}} \|\varphi''\|_{L^2([A, B])}, \end{aligned}$$

also für hinreichend kleine  $h_N$

$$\|\varphi - s\|_{H^1([A, B])} \leq h_N \|\varphi''\|_{L^2([A, B])}.$$

**Beweis:** Der Beweis ist technisch aber straight-forward. Durch Anwendung von  $\varphi(x_{j-1}) = s(x_{j-1})$ ,  $j = 1, \dots, N$  und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\varphi - s\|_{L^2([A, B])}^2 &= \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |\varphi(x) - s(x)|^2 dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left| \int_{x_{j-1}}^x (\varphi'(t) - s'(t)) dt \right|^2 dx \\ &\leq \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left( \int_{x_{j-1}}^x 1^2 dt \right) \left( \int_{x_{j-1}}^x |\varphi'(t) - s'(t)|^2 dt \right) dx \\ &\leq \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x - x_{j-1}) dx \int_{x_{j-1}}^{x_j} |\varphi'(t) - s'(t)|^2 dt \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (x_j - x_{j-1})^2 \left( \int_{x_{j-1}}^{x_j} |\varphi'(t) - s'(t)|^2 dt \right) \\ &\leq \frac{1}{2} h_N^2 \|\varphi' - s'\|_{L^2([A, B])}^2. \end{aligned}$$

Außerdem erhalten wir durch partielle Integration unter Ausnutzung von  $\varphi(x_j) =$

### 3.3. EINDIMENSIONALE LINEARE FINITE ELEMENTE

$s(x_j)$ ,  $j = 0, \dots, N$  und durch Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\varphi' - s'\|_{L^2(\lrcorner A, B \rceil)}^2 &= \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |\varphi'(x) - s'(x)|^2 dx \\ &= \sum_{j=1}^N \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi(x) - s(x)) \varphi''(x) dx \right| \\ &\leq \int_A^B |(\varphi(x) - s(x)) \varphi''(x)| dx \\ &\leq \|\varphi - s\|_{L^2(\lrcorner A, B \rceil)} \|\varphi''\|_{L^2(\lrcorner A, B \rceil)}. \end{aligned}$$

Durch Kombination dieser beiden Ungleichungen erhalten wir

$$\|\varphi' - s'\|_{L^2(\lrcorner A, B \rceil)}^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} h_N \|\varphi' - s'\|_{L^2(\lrcorner A, B \rceil)} \|\varphi''\|_{L^2(\lrcorner A, B \rceil)},$$

womit die zweite Behauptung gezeigt ist. Die erste Behauptung folgt dann durch Einsetzen in die zu Beginn des Beweises gezeigte Ungleichung.  $\square$

Damit können wir zeigen, dass sich jede  $H^1$ -Funktion beliebig genau durch stückweise lineare Funktionen approximieren lässt:

**Folgerung 3.7**

Für jedes  $u \in H^1(\lrcorner A, B \rceil)$  gilt

$$\inf_{v \in V_N} \|u - v\|_{H^1(\lrcorner A, B \rceil)} \rightarrow 0 \quad \text{falls } h_N \rightarrow 0.$$

**Beweis:** Sei  $u \in H^1(\lrcorner A, B \rceil)$  und  $\varepsilon > 0$ . Nach Satz 2.24 existiert ein

$$\varphi \in C^\infty([A, B]) \quad \text{mit} \quad \|\varphi - u\|_{H^1(\lrcorner A, B \rceil)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für hinreichend kleine  $h_N$  folgt dann

$$\begin{aligned} \inf_{v \in V_N} \|u - v\|_{H^1(\lrcorner A, B \rceil)} &\leq \|u - \varphi\|_{H^1(\lrcorner A, B \rceil)} + \|\varphi - s\|_{H^1(\lrcorner A, B \rceil)} \\ &\leq \varepsilon/2 + h_N \|\varphi''\|_{L^2(\lrcorner A, B \rceil)} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei  $s$  der gemäß Satz 3.6 konstruierte  $\varphi$ -interpolierende lineare Spline ist.  $\square$

**Bemerkung 3.8**

Für  $\varphi \in C_0^\infty(\lrcorner A, B \rceil)$  liegt der in Satz 3.6 verwendete  $\varphi$ -interpolierende Spline  $s \in V_N^{(0)}$ . Da  $C_0^\infty(\lrcorner A, B \rceil)$  dicht in  $H_0^1(\lrcorner A, B \rceil)$  liegt, folgt deshalb wie in Folgerung 3.7, dass zu jedem  $u \in H_0^1(\lrcorner A, B \rceil)$

$$\inf_{v \in V_N^{(0)}} \|u - v\|_{H^1(\lrcorner A, B \rceil)} \rightarrow 0 \quad \text{falls } h_N \rightarrow 0.$$

**Bemerkung 3.9**

*Folgerung 3.7 und Bemerkung 3.8 zeigen, dass für die in dieser Vorlesung betrachteten eindimensionalen elliptischen Gleichungen (vgl. Bemerkung 2.43) die Methode der (eindimensionalen, linearen) finite Elemente konvergiert (in der  $H^1$ -Norm). Gilt für die wahre Lösung sogar  $u \in C^\infty$ , so fällt der Fehler der Methode (mindestens) wie  $h_N \|u''\|_{L^2}$ . Man kann zeigen, dass diese Fehlerschranke auch noch für  $u \in H^2$  gilt.*

### 3.4 Zweidimensionale lineare finite Elemente

Auch im Zweidimensionalen können wir stückweise lineare Funktionen verwenden. Dazu zerlegen wir das Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  in Dreiecke, vgl. die in der Vorlesung gemalte Skizze.

**Definition 3.10**

*Eine Familie  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$  von offenen Dreiecken  $T_j$  heißt reguläre Triangulierung eines Gebiets  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , falls*

- (a)  $T_i \cap T_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$ ,
- (b)  $\bigcup_{j=1}^N \overline{T_j} = \overline{\Omega}$ ,
- (c)  $\overline{T_i} \cap \overline{T_j}$  ist (für  $i \neq j$ ) entweder leer oder eine gemeinsame Ecke oder eine gemeinsame Kante von  $T_i$  und  $T_j$ .

*Die Ecken der Dreiecke heißen auch Knoten der Triangulierung.*

Eine Funktion  $h : T \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  heißt linear auf  $T$ , wenn  $a, b, c \in \mathbb{R}$  existieren, so dass

$$h(x) = a + bx^{(1)} + cx^{(2)} \quad \forall x = (x^{(1)}, x^{(2)})^T \in T.$$

Man sieht leicht dass  $h$  durch Vorgabe dreier Werte eindeutig bestimmt ist. Wir fassen ohne Beweis noch einige weitere anschaulich naheliegende Eigenschaften regulärer Triangulierungen zusammen:

**Bemerkung 3.11**

- (a) *Gebiete, die eine reguläre Triangulierung besitzen, sind Lipschitz-Gebiete gemäß Bemerkung 2.45. Für solche Gebiete gilt die im letzten Kapitel entwickelte Lösungstheorie.*



### 3.4. ZWEIDIMENSIONALE LINEARE FINITE ELEMENTE

(b) Man kann zeigen, dass zu jeder regulären Triangulierung eines Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit Knoten  $x_i, i = 1, \dots, m$ , stetige und auf jedem Dreieck lineare Funktionen  $\Lambda_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  existieren mit

$$\Lambda_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, m.$$

$V^{\mathcal{T}} = \text{span}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$  ist der Raum der stetigen und (bzgl. der Triangulierung) stückweise linearen Funktionen auf  $\Omega$ . Wie im Eindimensionalen definieren wir noch

$$V_0^{\mathcal{T}} := \{v \in V^{\mathcal{T}} : v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Es gilt  $V_0^{\mathcal{T}} = \text{span}(\Lambda_j : x_j \notin \partial\Omega)$ .

(c) Man kann zeigen (vgl. Aufgabe 5.1), dass  $\Lambda_j \in H^1(\Omega)$  liegt und der distributionelle Gradient die stückweise konstante Funktion ist, die auf jedem Dreieck mit dem klassischen Gradienten übereinstimmt.

(d) Die Anwendung des Galerkin-Verfahrens mit den Unterräumen  $V^{\mathcal{T}} \subseteq H^1(\Omega)$  bzw.  $V_0^{\mathcal{T}} \subseteq H_0^1(\Omega)$  heißt auch Methode der (zweidimensionalen, linearen) finiten Elemente.

Wir erwarten intuitiv, dass sich auch im Zweidimensionalen Funktionen durch solche stückweise linearen Funktionen approximieren lassen (und damit die Methode der finiten Elemente konvergiert), wenn die Dreiecke beliebig klein werden. Dies erfordert jedoch noch die Zusatzbedingung, dass die Dreiecke nicht beliebig flach werden („entarten“, vgl. die in der Vorlesung gemalte Skizze).

**Satz 3.12**

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  besitze eine reguläre Triangulierung  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$  mit Knoten  $x_i, i = 1, \dots, m$ .  $h$  sei die maximale Kantenlänge aller Dreiecke, außerdem sei

$$\alpha := \max_{T \in \mathcal{T}} \frac{h_T}{H_T}$$

das schlimmstmögliche Verhältnis der längsten Kantenlänge  $h_T$  des Dreiecks  $T$  zur kleinsten Höhe  $H_T$  eines Dreiecks  $T$ .

Zu  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  definieren wir  $v \in V^{\mathcal{T}}$  durch

$$v(x) := \sum_{i=1}^m u(x_i) \Lambda_i(x).$$

( $v$  ist also gerade die  $u$  in den Knoten der Triangulierung interpolierende, stetige, stückweise lineare Funktion.)

Dann gilt

$$\|u - v\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{3|\Omega|}h^2|u|_{C^2(\bar{\Omega})}, \quad (3.4)$$

$$\|\nabla u - \nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} \leq 3\sqrt{|\Omega|}h\alpha|u|_{C^2(\bar{\Omega})}, \quad (3.5)$$

wobei  $|u|_{C^2(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha|=2} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$ .

**Beweis:** (a) Wir zeigen zuerst (3.4): Sei  $T \in \mathcal{T}$  ein Dreieck mit Ecken  $x_1, x_2, x_3$ . Offenbar gilt für alle  $x \in T$

$$v(x) = \sum_{k=1}^3 u(x_k)\Lambda_k(x). \quad (3.6)$$

Für jedes  $k = 1, 2, 3$  liegt die Verbindungslinie zwischen  $x$  und  $x_k$  in  $T$ , also

$$x + td_k \in T, \quad t \in [0, 1], \quad d_k := x_k - x.$$

Für die Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto u(x + td_k)$  gilt

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{i=1}^2 \partial_i u(x + td_k) d_k^{(i)} = \nabla u(x + td_k) \cdot d_k \\ g''(t) &= \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{j=1}^2 \partial_j \partial_i u(x + td_k) d_k^{(j)} \right) d_k^{(i)} = d_k^T u''(x + td_k) d_k, \end{aligned}$$

wobei  $u''(x + td_k) = (\partial_j \partial_i u(x + td_k))_{i,j=1}^2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  die Hesse-Matrix von  $u$  ist. Damit ist

$$\begin{aligned} u(x_k) &= g(1) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 g''(t)(1-t) dt \\ &= u(x) + \nabla u(x) \cdot d_k + \int_0^1 d_k^T u''(x + td_k) d_k (1-t) dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Für alle  $x \in T$  ist also

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{k=1}^3 u(x_k)\Lambda_k(x) \\ &= u(x) \sum_{k=1}^3 \Lambda_k(x) + \nabla u(x) \cdot \sum_{k=1}^3 d_k \Lambda_k(x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 \Lambda_k(x) \int_0^1 d_k^T u''(x + td_k) d_k (1-t) dt. \end{aligned}$$

### 3.4. ZWEIDIMENSIONALE LINEARE FINITE ELEMENTE

$h_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_1(x) := \sum_{k=1}^3 \Lambda_k(x)$  und  $h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_2(x) = \sum_{k=1}^3 x_k \Lambda_k(x)$  sind auf  $T$  (komponentenweise) lineare Funktionen, die in den Ecken die Werte

$$h_1(x) = 1 \quad \text{und} \quad h_2(x) = x \quad \forall x \in \{x_1, x_2, x_3\}$$

annehmen, es folgt also  $h_1(x) = 1$ ,  $h_2(x) = x$  für alle  $x \in T$  und damit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \Lambda_k(x) &= 1 \\ \sum_{k=1}^3 d_k \Lambda_k(x) &= \sum_{k=1}^3 x_k \Lambda_k(x) - x \sum_{k=1}^3 \Lambda_k(x) = x - x = 0. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$v(x) - u(x) = \sum_{k=1}^3 \Lambda_k(x) \int_0^1 d_k^T u''(x + t d_k) d_k (1-t) dt.$$

Aus  $0 \leq \Lambda_k(x) \leq 1$  folgt  $\Lambda_k^2(x) \leq \Lambda_k(x)$  für alle  $x \in T$  und damit

$$\begin{aligned} \|v(x) - u(x)\|^2 &= \left( \sum_{k=1}^3 \Lambda_k(x) \int_0^1 d_k^T u''(x + t d_k) d_k (1-t) dt \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^3 \Lambda_k^2(x) \right) \left( \sum_{k=1}^3 \left( \int_0^1 d_k^T u''(x + t d_k) d_k (1-t) dt \right)^2 \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^3 \left( \int_0^1 d_k^T u''(x + t d_k) d_k (1-t) dt \right)^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Frobenius-Norm ist mit der Euklid-Norm verträglich und für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  gilt

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j,k=1}^2 |a_{jk}|^2 \leq 4 \max_{j,k \in \{1,2\}} |a_{jk}|^2.$$

Es ist also

$$|d_k^T u''(x + t d_k) d_k| \leq \|d_k\|^2 \|u''(x + t d_k)\|_F \leq 2 \|d_k\|^2 |u|_{C^2(\bar{\Omega})}$$

und mit  $\|d_k\| \leq h$  und  $\int_0^1 (1-t) dt = 1/2$  erhalten wir

$$|v(x) - u(x)|^2 \leq 3 |u|_{C^2(\bar{\Omega})}^2 h^4$$

und damit

$$\|u - v\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{3|\Omega|} h^2 |u|_{C^2(\bar{\Omega})}.$$

(b) Um (3.5) zu zeigen, verwenden wir wieder (3.6) und (3.7) und erhalten

$$\begin{aligned}\nabla v(x) &= \sum_{k=1}^3 u(x_k) \nabla \Lambda_k(x) \\ &= u(x) \sum_{k=1}^3 \nabla \Lambda_k(x) + \sum_{k=1}^3 (\nabla u(x) \cdot d_k) \nabla \Lambda_k(x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 \left( \int_0^1 d_k^T u''(x + t d_k) d_k (1-t) dt \right) \nabla \Lambda_k(x).\end{aligned}$$

Dabei ist wie in (a)

$$\sum_{k=1}^3 \nabla \Lambda_k(x) = \nabla \sum_{k=1}^3 \Lambda_k(x) = \nabla 1 = 0$$

und

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^3 (\nabla u(x) \cdot d_k) \nabla \Lambda_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^2 (\partial_i u(x)) d_k^{(i)} \nabla \Lambda_k(x) = \sum_{i=1}^2 (\partial_i u(x)) \sum_{k=1}^3 d_k^{(i)} \nabla \Lambda_k(x) \\ &= \sum_{i=1}^2 (\partial_i u(x)) \sum_{k=1}^3 x_k^{(i)} \nabla \Lambda_k(x) = \sum_{i=1}^2 (\partial_i u(x)) \nabla \sum_{k=1}^3 x_k^{(i)} \Lambda_k(x) \\ &= \sum_{i=1}^2 (\partial_i u(x)) \nabla x^{(i)} = \nabla u(x).\end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$\nabla v(x) - \nabla u(x) = \sum_{k=1}^3 \left( \int_0^1 d_k^T u''(x + t d_k) d_k (1-t) dt \right) \nabla \Lambda_k(x).$$

Offenbar gilt  $\|\nabla \Lambda_k(x)\| \leq \frac{1}{H_T}$  und wir erhalten wie in (a)

$$\begin{aligned}\|\nabla v(x) - \nabla u(x)\|^2 &\leq \left\| \sum_{k=1}^3 \left( \int_0^1 d_k^T u''(x + t d_k) d_k (1-t) dt \right) \nabla \Lambda_k(x) \right\|^2 \\ &\leq 9h_T^4 |u|_{C^2(\bar{\Omega})}^2 \frac{1}{H_T^2} \leq 9h^2 \alpha^2 |u|_{C^2(\bar{\Omega})}^2,\end{aligned}$$

und damit

$$\|\nabla v - \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |\Omega| 9h^2 \alpha^2 |u|_{C^2(\bar{\Omega})}^2,$$

womit (3.5) gezeigt ist. □

**Bemerkung 3.13**

(a) Wie im Eindimensionalen folgt aus der Dichtheit von  $C^\infty(\bar{\Omega})$  in  $H^1(\Omega)$ , dass für jedes  $u \in H^1(\Omega)$

$$\inf_{v \in V_N} \|u - v\| \rightarrow 0$$

falls die maximale Seitenlänge  $h_N$  der zur Konstruktion von  $V_N$  verwendeten Dreiecke gegen Null konvergiert **und** das Verhältnis  $\alpha$  der längsten Kantenlänge zur kleinsten Höhe in den Dreiecken nicht beliebig groß wird. Unter diesen Voraussetzungen an die Triangulierung konvergiert also die Methode der zweidimensionalen linearen finiten Elemente.

Erfüllt die Lösung der betrachteten PDGL  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , so fällt der (in der  $H^1$ -Norm gemessene) Fehler der FE-Methode mit der Geschwindigkeit  $O(h_N)$ .

(b) Äquivalent zu der Beschränkung des Verhältnisses zwischen kleinster Höhe und längster Seite der Dreiecke ist es, den kleinsten Winkel der Dreiecke oder das Verhältnis zwischen Umkreisradius und Innenkreisradius zu beschränken.

(c) Man kann zeigen, dass jedes  $u \in H^2(\Omega)$  stetig ist und damit für jedes  $u \in H^2(\Omega)$  der Interpolant

$$v(x) := \sum_{i=1}^m u(x_i) \Lambda_i(x).$$

wohldefiniert ist. Durch sorgfältigere Abschätzung im Beweis von 3.12 (siehe z.B. [Hanke, Satz 91.6]) folgt die Existenz von Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  mit

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_1 h^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}, \\ \|\nabla u - \nabla v\|_{L^2(\Omega)^2} &\leq C_2 h \|u\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

wobei  $C_2 > 0$  wiederum vom schlimmstmöglichen Verhältnis der kleinsten Höhe zur größten Seitenlänge eines Dreiecks abhängt.

Dies zeigt, dass die FE-Methode sogar für alle  $u \in H^2(\Omega)$  mit der Geschwindigkeit  $O(h_N)$  (gemessen in der  $H^1$ -Norm) konvergiert,

$$\exists C > 0 : \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

(d) Unter geeigneten Glattheitsannahmen (die  $u \in H^2(\Omega)$  für jeden Quellterm  $f \in L^2(\Omega)$  garantieren) kann man zeigen, dass der Fehler der FE-Methode gemessen in der  $L^2$ -Norm sogar mit der Geschwindigkeit  $O(h_N^2)$  fällt:

$$\exists C > 0 : \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

## KAPITEL 3. FINITE-ELEMENTE-VERFAHREN

---

# Kapitel 4

## Ausblick: Parabolische Differentialgleichungen

Wir geben zum Abschluss dieser Vorlesung noch ohne Beweise einen Ausblick auf die Behandlung zeitabhängiger Diffusionsprozessen, die durch *parabolische* Differentialgleichungen beschrieben werden. Dabei beschränken wir uns auf die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x,t) - \nabla \cdot (a(x)\nabla u(x,t)) = f(x,t) \quad \forall x \in \Omega, t \in (0,T), \quad (4.1)$$

wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet sei,  $T > 0$ ,  $a \in L_+^\infty(\Omega)$  und  $f \in L^2((0,T) \times \Omega)$ . Aus der Motivation der Diffusionsprozesse in [NumerikDGL] erwarten wir, dass wir (4.1) um Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

sowie um (Neumann- oder Dirichlet-)Randbedingungen auf  $\partial\Omega$  ergänzen müssen. In dieser Vorlesung beschränken wir uns auf homogene Dirichletrandbedingungen

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Mit den hier vorgestellten Methoden lassen sich auch leicht zusätzliche Absorptionssterme

$$u_t(x,t) - \nabla \cdot (a(x)\nabla u(x,t)) + c(x)u(x,t) = f(x,t) \quad \forall x \in \Omega, t \in (0,T)$$

sowie inhomogene Dirichlet- oder Neumannrandbedingungen behandeln.

## 4.1 Variationsformulierung

Wir interpretieren die Ableitungen in (4.1) wie zuvor im distributionellen Sinne, um die Differentialgleichung in ein äquivalentes Variationsproblem umzuformulieren. Damit die Multiplikation mit dem (möglicherweise unstetigen) Diffusionskoeffizienten  $a(x)$  wohldefiniert ist, können wir nur solche Funktionen in (4.1) zulassen, deren räumliche Ableitung noch eine reguläre Distribution ist. Motiviert durch die Behandlung der elliptischen Differentialgleichungen (und unter Berücksichtigung der homogenen Dirichletrandbedingung) betrachten wir deshalb Funktionen  $u(x, t)$  die zu jedem Zeitpunkt eine  $H_0^1$ -Funktion im Ort sind.

Der kanonische Hilbertraum von Funktionen, in dem die Gleichung (4.1) wohldefiniert (und die Dirichletrandbedingung berücksichtigt) ist, ist dann der Raum aller Funktion

$$u : (0, T) \rightarrow H_0^1(\Omega)$$

die bezüglich der Zeit (als  $H_0^1$ -wertige Funktionen im Sinne des sogenannten *Bochner-Integrals*) quadratintegabel sind, d.h. der Raum

$$L^2(0, T, H_0^1(\Omega)).$$

Man kann zeigen, dass  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))} = \int_0^T (u(t), v(t))_{H^1(\Omega)} dt$$

ein Hilbertraum ist.

Gemäß der Definition der distributionellen Ableitung erfüllt eine Funktion  $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  genau dann die partielle Differentialgleichung (4.1), wenn für alle Testfunktionen  $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}([0, T[ \times \Omega)$  gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (-u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) + a(x) \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t)) dx dt \\ = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) \varphi(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Die Dirichletrandbedingung  $u|_{\partial\Omega} = 0$  ist bereits im Raum  $H_0^1(\Omega)$  berücksichtigt. Die Anfangsbedingung scheint keinen Sinn zu machen, da  $u : (0, T) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  als  $L^2$ -Funktion der Zeit keine wohldefinierte Auswertungen in  $t = 0$  besitzt. Wir werden im Folgenden aber sehen, dass (ähnlich wie die Neumann-Randbedingung bei den elliptischen Gleichungen) die Anfangsbedingung jedoch wohldefiniert ist für alle  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ -Funktionen, *die zusätzlich die PDGL (4.1) lösen*.



**Definition 4.1**

(a)  $H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)'$  bezeichnet den Dualraum von  $H_0^1(\Omega)$ , also den Raum aller stetigen linearen Abbildungen von  $H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ . Wie bei den Distributionen schreiben wir die Anwendung von  $v \in H^{-1}(\Omega)$  auf ein  $w \in H_0^1(\Omega)$  als  $\langle v, w \rangle$ . Mit dem Riesz-Isomorphismus (siehe Bemerkung 2.44)

$$\iota : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$$

lässt sich durch

$$(u, v)_{H^{-1}(\Omega)} := (\iota u, \iota v)_{H_0^1(\Omega)}$$

ein Skalarprodukt auf  $H^{-1}(\Omega)$  definieren, und es lässt sich leicht zeigen, dass  $H^{-1}(\Omega)$  damit ein Hilbertraum ist. Analog zu  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  lässt sich dann auch  $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$  definieren.

(b)  $W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  ist der Raum aller Funktionen  $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ , für die eine Funktion  $v \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$  existiert, so dass

$$\int_0^T v(t) \varphi(t) dt = - \int_0^T u(t) \dot{\varphi}(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[),$$

wobei die rechte Seite entsprechend der Einbettung

$$H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$$

als Element von  $H^{-1}(\Omega)$  aufgefasst wird, d.h.

$$\left\langle \int_0^T v(t) \varphi(t) dt, w \right\rangle = - \int_{\Omega} \int_0^T u(t) \dot{\varphi}(t) dt w dx$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$ ,  $w \in H_0^1(\Omega)$ .

Wir nennen  $v$  die Ableitung von  $u$  im Sinne vektorwertiger Distributionen bzgl. der Einbettung  $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ . und schreiben auch kurz  $\dot{u} = v$ .

**Lemma 4.2**

(a)  $W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))} := (u, v)_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))} + (\dot{u}, \dot{v})_{L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))}.$$

(b)  $W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) \subset C(0, T, L^2(\Omega))$ , d.h. zu jeder Funktion aus dem Raum  $W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  existiert eine stetige Funktion

$$u : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$$

die damit fast überall übereinstimmt.

(c) Für jedes  $t \in [0, T]$  ist die Auswertung

$$W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) \rightarrow L^2(\Omega), \quad u \mapsto u(t)$$

eine stetige lineare Abbildung.

(d) Für  $u, v \in W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  gilt die partielle Integrationsformel

$$\int_0^T \langle \dot{u}(t), v(t) \rangle dt + \int_0^T \langle \dot{v}(t), u(t) \rangle dt = \int_{\Omega} (u(T)v(T) - u(0)v(0)) dx.$$

**Beweis:** (a) kann analog Definition und Satz 2.19 gezeigt werden. Für den Beweis von (b)-(d) verweisen wir auf [DautrayLions5, XVIII, §1, Thms. 1,2].  $\square$

**Bemerkung 4.3**

(a) Man kann zeigen, dass für jede Lösung  $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  der PDGL (4.1) im Sinne von Definition 4.1(b) gilt, dass

$$\dot{u} = \nabla \cdot (a \nabla u) + f \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$$

und daher  $u \in W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  liegt. Nach Lemma 4.2 besitzt jede Lösung  $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  von (4.1) daher wohldefinierte Anfangswerte  $u(0) \in L^2(\Omega)$ .

Es macht daher Sinn, eine Lösung  $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  von (4.1) zu suchen, die zusätzlich  $u(0) = u_0(x)$  mit einer vorgeschriebenen Anfangsfunktion  $u_0 \in L^2(\Omega)$  erfüllt.

(b) Es sei  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Man kann zeigen, dass die folgenden Probleme äquivalent sind

(i)  $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  erfüllt

$$u_t(x, t) - \nabla \cdot (a(x) \nabla u(x, t)) = f(x, t) \quad \forall x \in \Omega, t \in (0, T)$$

und  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

(ii)  $u \in W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  erfüllt  $u(x, 0) = u_0(x)$  und

$$\int_0^T \langle \dot{u}, v \rangle dt + \int_0^T \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f v dx dt$$

für alle  $v \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ .

(iii)  $u \in W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  erfüllt  $u(x, 0) = u_0(x)$  und

$$\langle \dot{u}(t), v \rangle + \int_{\Omega} a \nabla u(t) \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f(t) v dx$$

für alle  $v \in H_0^1(\Omega)$  und  $t \in (0, T)$  f.ü.

(iv)  $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  erfüllt

$$-\int_0^T \langle \dot{v}, u \rangle dt + \int_0^T \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f v dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) v(x, 0) dx$$

für alle  $v \in W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  mit  $v(\cdot, T) = 0$ .

Mit der Variationsformulierung in Bemerkung 4.3 und einer Erweiterung des Satzes von Lax-Milgram lässt sich die eindeutige Lösbarkeit der PDGL (4.1) beweisen, siehe Anhang A.

## 4.2 Die Linienmethode

Grundsätzlich ist es möglich, die Idee des Galerkin-Verfahrens auch auf parabolische Gleichungen anzuwenden, und die variationellen Formulierungen in Bemerkung 4.3 (b) (ii) bzw. (iv) in endlich-dimensionalen Teilräumen des Hilbertraums  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  bzw.  $W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  zu lösen. Dies führt zu sich über Raum und Zeit erstreckenden Finite-Elemente-Verfahren, die sehr flexibel, aber wegen der zusätzlichen Dimension Zeit numerisch oft auch sehr aufwändig sind.

Üblicherweise verwendet man deshalb das Galerkin-Verfahren nur zur Diskretisierung der räumlichen Dimension. Für die zeitliche Diskretisierung können dann die Methoden aus der Vorlesung Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen [NumerikDGL] eingesetzt werden. Dabei kann entweder zuerst nach der Zeit oder zuerst nach dem Ort diskretisiert werden. Der erste Fall führt auf die in Übungsaufgabe 6.3 vorgestellte *horizontale Linienmethode* (auch: Rothe-Methode), bei der die PDGL als gewöhnliche aber vektorwertige (z.B.  $H_0^1$ -wertige) DGL aufgefasst wird. Die (formale) Anwendung des impliziten Euler-Verfahrens auf die vektorwertige gewöhnliche DGL erforderte in Übungsaufgabe 6.3 in jedem Zeitschritt die Lösung einer elliptischen PDGL.

Wir stellen zum Abschluss der Vorlesung noch die *vertikale Linienmethode* vor, bei der zuerst bezüglich des Ortes diskretisiert wird. Mit

$$b : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad b(u, v) := \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v dx$$

lautet die variationelle Formulierungen in Bemerkung 4.3 (b) (iii):  
Finde  $u \in W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ , so dass  $u(x, 0) = u_0(x)$  und

$$\langle \dot{u}(t), v \rangle + b(u(t), v) = \int_{\Omega} f(t) v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), t \in (0, T) \text{ f.ü.}$$

## KAPITEL 4. AUSBLICK: PARABOLISCHE DGL

---

Wir wählen einen endlich dimensionalen Teilraum  $V_N^{(0)} \subset H_0^1(\Omega)$  (etwa den Raum stückweise linearer Funktionen auf einer regulären Triangulierung von  $\Omega$ ) und suchen eine (klassisch differenzierbare) Funktion  $u_N : [0, T] \rightarrow V_N^{(0)}$ , so dass  $u_N(0) \approx u_0$  und

$$\langle \dot{u}_N(t), v \rangle + b(u_N(t), v) = \int_{\Omega} f(t)v \, dx \quad \forall v \in V_N^{(0)},$$

wobei entsprechend der Einbettung  $V_N \subseteq H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega) \subseteq H^{-1}(\Omega)$

$$\langle \dot{u}_N(t), v \rangle = \int_{\Omega} \dot{u}_N(t)v \, dx.$$

Zur numerischen Umsetzung der Linienmethode wählen wir eine Basis

$$(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$$

von  $V_N^{(0)}$  (etwa die schon bei den linearen Finiten Elementen verwendeten Hutfunktionen). Aus Linearitätsgründen löst eine Funktion

$$u_N : [0, T] \rightarrow V_N^{(0)}$$

genau dann das Variationsproblem

$$\int_{\Omega} \dot{u}_N(t)v \, dx + b(u_N(t), v) = \int_{\Omega} f(t)v \, dx \quad \forall v \in V_N^{(0)}$$

wenn es dieses Variationsproblem für alle  $v \in \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_m\}$  löst. Jede Funktion  $u_N : [0, T] \rightarrow V_N^{(0)}$  können wir schreiben als

$$u_N(t) = \sum_{j=1}^m \eta_j(t) \Lambda_j$$

mit Koeffizientenfunktionen  $\eta_j : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ .  $u_N(t)$  löst also genau dann das obige Variationsproblem, wenn die Koeffizientenfunktionen das Differentialgleichungssystem

$$\sum_{j=1}^m \dot{\eta}_j(t) \int_{\Omega} \Lambda_j \Lambda_k \, dx + \sum_{j=1}^m \eta_j(t) b(\Lambda_j, \Lambda_k) = \int_{\Omega} f(t) \Lambda_k \, dx \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (4.2)$$

lösen. Mit

$$\begin{aligned} y(t) &:= (\eta_j(t))_{j=1}^m : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ h(t) &:= \left( \int_{\Omega} f(t) \Lambda_k \, dx \right)_{k=1}^m : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m, \\ G &:= \left( \int_{\Omega} \Lambda_j \Lambda_k \, dx \right)_{j,k=1}^m \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ B &:= (b(\Lambda_j, \Lambda_k))_{j,k=1}^m \in \mathbb{R}^{m \times m} \end{aligned}$$

können wir (4.2) schreiben als

$$\dot{y}(t)^T G e_k + y(t)^T B e_k = h(t)^T e_k,$$

was aufgrund der Symmetrie von  $G$  und  $B$  äquivalent ist zu

$$G \dot{y}(t) = h(t) - B y(t).$$

$G$  heißt auch Gramsche Matrix der Basis  $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$  bezüglich des  $L^2(\Omega)$ -Skalarproduktes. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass die zu einer Basis aufgestellte Gramsche Matrix stets invertierbar ist.

Zur numerischen Anwendung der Linienmethode wählen wir also eine Basis von  $V_N^{(0)}$ , stellen die Matrizen  $G$  und  $B$  auf, und lösen die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = G^{-1}(h(t) - B y(t))$$

mit einem Anfangswert  $y(0) = (\eta_j(0))_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$ , der so gewählt sei, dass die Funktion  $\sum_{j=1}^m \eta_j(0) \Lambda_j(x)$  eine möglichst gute Approximation von  $u_0(x)$  ist.

Diese gewöhnliche DGL kann mit den aus der Vorlesung [NumerikDGL] bekannten Methoden gelöst werden. Typischerweise ist die DGL steif und erfordert die Anwendung impliziter Methoden (siehe [NumerikDGL]).



# Anhang A

## Lösungstheorie parabolischer DGL

Aus der Variationsformulierung in Bemerkung 4.3(b)(iv) erhalten wir zusammen mit der folgenden Erweiterung des Satzes von Lax-Milgram die Lösbarkeit der PDGL (4.1).

### Satz A.1 (Satz von Lions-Lax-Milgram)

Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $V$  ein normierter (nicht notwendigerweise vollständiger) Vektorraum. Außerdem sei

$$b : H \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

eine Bilinearform mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Für jedes  $v \in V$  ist die Linearform  $H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto b(u, v)$  stetig.

(b) Es existiert ein  $\beta > 0$ , so dass

$$\inf_{\|v\|_V=1} \sup_{\|u\|_H \leq 1} |b(u, v)| \geq \beta.$$

Dann existiert für jede stetige Linearform  $l \in V'$  ein  $u \in H$  so dass

$$b(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \quad \text{und} \quad \|u\|_H \leq \frac{1}{\beta} \|l\|_{V'}.$$

**Beweis:** [Showalter, III.2, Thm. 2.1, Cor. 2.1]. □

Durch Anwendung des Satzes von Lions-Lax-Milgram auf die Variationsformulierung (iv) in Bemerkung 4.3 lässt sich zeigen, dass für jede Anfangsbedingung

## ANHANG A. LÖSUNGSTHEORIE PARABOLISCHER DGL

---

$u_0 \in L^2(\Omega)$ , Quellterm  $f \in L^2((0, T) \times \Omega)$  und Koeffizienten  $a \in L_+^\infty(\Omega)$  und  $c \in L_+^\infty(\Omega)$  genau eine Lösung  $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  existiert von

$$u_t(x, t) - \nabla \cdot (a(x) \nabla u(x, t)) = f(x, t) \quad \forall x \in \Omega, t \in (0, T)$$

und  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

### Satz A.2

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet,  $T > 0$ ,  $a \in L_+^\infty(\Omega)$ ,  $u_0 \in L^2(\Omega)$  und  $f \in L^2((0, T) \times \Omega)$ . Dann existiert genau eine Lösung  $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  von

$$u_t(x, t) - \nabla \cdot (a(x) \nabla u(x, t)) = f(x, t) \quad \forall x \in \Omega, t \in (0, T)$$

und  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

**Beweis:** (a) Existenz:

Nach Bemerkung 4.3 ist das Problem äquivalent zur Bestimmung eines  $u \in H := L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  mit

$$b(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V,$$

wobei  $V = \{v \in W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)) : v(\cdot, T) = 0\}$  und

$$b : H \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad l : V \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert sind durch

$$\begin{aligned} b(u, v) &:= - \int_0^T \langle \dot{v}, u \rangle dt + \int_0^T \int_\Omega a \nabla u \cdot \nabla v dx dt \\ l(v) &:= \int_0^T \int_\Omega f v dx dt + \int_\Omega u_0(x) v(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Offenbar ist  $l$  linear und bezüglich der Norm

$$\|v\|_V^2 := \|v\|_{L^2(0, T, H_0^1(\Omega))}^2 + \|v(0)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

stetig.  $b$  ist bilinear und für jedes feste  $v \in V$  ist die Abbildung  $u \mapsto b(u, v)$  stetig. Außerdem folgt für alle  $v \in V$  aus der partiellen Integrationsformel in Lemma 4.2

$$\begin{aligned} b(v, v) &= - \int_0^T \langle \dot{v}, v \rangle dt + \int_0^T \int_\Omega a |\nabla v|^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega |v(0)|^2 dx + \int_0^T \int_\Omega a |\nabla v|^2 dx dt. \end{aligned}$$



Wie bei den elliptischen Differentialgleichung folgt aus der Poincaré-Ungleichung (vgl. Übungsaufgabe 4.2) die Existenz einer Konstante  $\beta > 0$ , so dass

$$b(v, v) \geq \beta \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Aus dem Satz von Lions-Lax-Milgram (Satz A.1) folgt damit die Existenz einer Lösung.

(b) Eindeutigkeit: Sind  $u_1$  und  $u_2$  zwei Lösungen, so erfüllt

$$u := u_1 - u_2 \in W(0, T, H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$$

nach Bemerkung 4.3  $u(x, 0) = 0$  und

$$\int_0^T \langle \dot{u}, v \rangle dt + \int_0^T \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v dx dt = 0$$

für alle  $v \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ . Insbesondere folgt mit der Wahl  $v := u$  und der partiellen Integrationsformel in Lemma 4.2

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \langle \dot{u}, u \rangle dt + \int_0^T \int_{\Omega} a |\nabla u|^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|u(T)|^2 - |u(0)|^2) dx + \int_0^T \int_{\Omega} a |\nabla u|^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(T)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} a |\nabla u|^2 dx dt \end{aligned}$$

und (wiederum mit der Poincaré-Ungleichung) folgt  $u = 0$ . □

Die so erhaltene Lösung liegt oft nicht nur in  $W(0, T, H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  sondern besitzt noch höhere Regularitätseigenschaften. Physikalisch erwarten wir, dass aus zeitlichen Regularitätseigenschaften des Quellterms  $f$  auch zeitliche Regularitätseigenschaften der Lösung  $u$  folgen und dass aus räumlicher Glattheit der Koeffizienten  $a, c$  und des Quellterms  $f$  auch räumliche Regularität der Lösung folgt. Damit die Lösung nicht nur im Inneren des Raum-Zeit-Zylinders  $(0, T) \times \Omega$  glatt ist, sondern auch einschließlich ihrer Werte auf dem Zylinderrand glatt ist, muss außerdem die Anfangsbedingung  $u_0$  glatt und *kompatibel* zu den Randwerten  $u|_{\partial\Omega} = 0$  sein.



# Literaturverzeichnis

- [Adams] R. A. Adams, J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. 2nd edition. Vol. 140 of Pure and Applied Mathematics. Academic Press, Elsevier Science, Amsterdam, 2006.
- [DautrayLions5] R. Dautray, J.-L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology Volume 5: Evolution Problems I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.
- [Evans] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 19. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002.
- [Forster3] O. Forster: *Analysis 3. Integralrechnung im  $\mathbb{R}^n$  mit Anwendungen*. 3. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 1996.
- [Grisvard] P. Grisvard: *Elliptic problems in nonsmooth domains*, SIAM, 2011.
- [Hanke] M. Hanke-Bourgeois: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2009.
- [NumerikDGL] B. Harrach: *Vorlesung Numerik von Differentialgleichungen (SoSe 20)*. <http://numerical.solutions>
- [NumMath] B. Harrach: *Vorlesung Numerische Mathematik (WiSe 19/20)*. <http://numerical.solutions>
- [Rudin] W. Rudin: *Functional analysis. Second edition*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [Showalter] R. E. Showalter: *Monotone Operators in Banach Space and Non-linear Partial Differential Equations*, Math. Surveys Monogr. 49, AMS, Providence, RI, 1997.
- [Walter] W. Walter: *Einführung in die Theorie der Distributionen*. 3. Auflage. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.