Lutz Führer

Wege zum Pythagoras-Satz
– Peter Bender zum 65. Geburtstag –

Im Mathematikunterricht der Höheren Schulen spielte der Pythagoras-Satz bekanntlich seit altersher eine herausragende Rolle: Synthetische Geometrie galt einst als klassisch-ehrwürdiger Beitrag zur Schule des Denkens, und nichts blieb aus diesem Unterricht so in Erinnerung wie „das gehobene ABC der Mathematik", bei dem die Buchstaben – aus welchen Gründen auch immer – mit Quadraten geadelt waren.

Natürlich hat die Gedankenlosigkeit, mit der viele Erwachsene ebenso ehrfürchtig wie abfällig Mathematik mit formalem Aufsagen geheimnisvoller Buchstaben gleichsetzten. Mathematiklehrer und -didaktiker immer wieder geärgert, denn ihnen gilt der Satz – bewusst oder unbewusst – als „Paradigma der Mathematik" (ARTMANN). Statt eines gestelzten Abcs galt es, den – oder besser: einen – „eigentlichen Seinsgrund" und weniger die Formalitäten einzuprägen. Die folgende sehr klare Begriffsanalyse TRENDELENBURGS findet einen solchen „Seinsgrund" in Ähnlichkeitsbeziehungen.

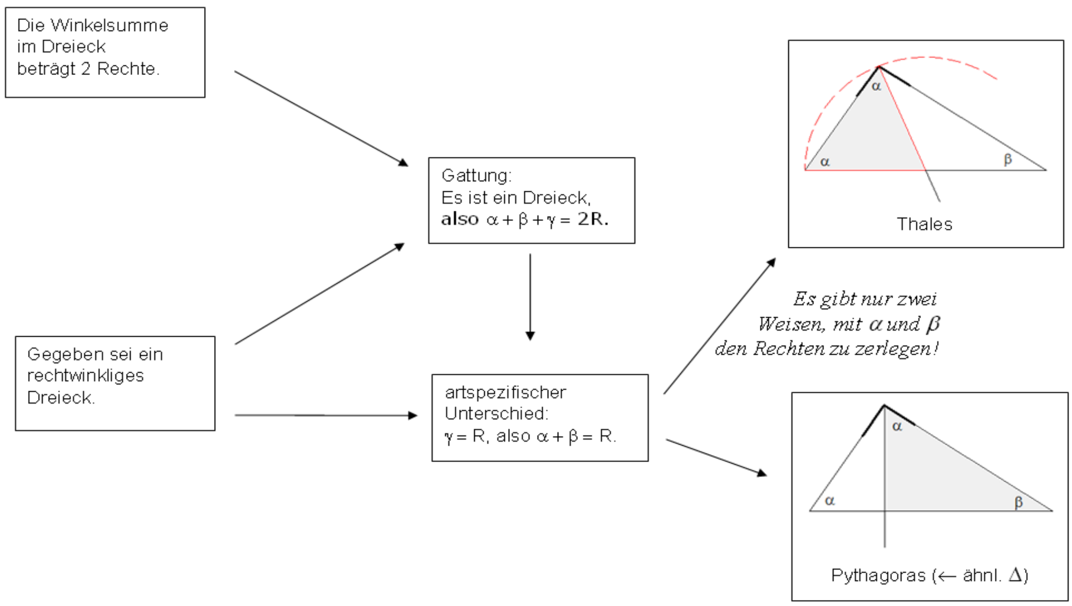


Abb. 1 – Übersichtsskizze nach einem ausführlichen Textzitat aus Band 2, § 175, von FR. TRENDELENBURGS „Allgemeiner Metaphysik" 1879 in FISCHER 1924

Sieht man Ähnlichkeitsbeziehungen als „Seinsgrund" des Pythagoras-Satzes an, dann spricht viel dafür, im Unterricht erst den Themenkreis „Ähnlichkeit" abzuhandeln, bevor es zu diesem Satz (mit Ähnlichkeitsbeweis) geht. Man kann dabei induktiv zum Pythagoras-Satz kommen, indem man ähnliche Figuren übungsweise aus Standarddreiecken und umbeschriebenen Rechtecken aufbauen lässt, wie der Zugang mit den aufgeklappten Teildreiecken im Bild rechts zeigt (frei nach LIETZMANN 1953, S. 41 f.). Dabei gilt die Summeneigenschaft für beliebige (spitzwinklige) Dreiecke, während die Rechtwinkligkeit alle drei Klapp-Dreiecke ähnlich macht, und damit auch ihre umbeschriebenen Rechtecke. Aus jenen Rechtecken folgt dann (notfalls mit einem Stetigkeitsargument) der Quadratesatz.

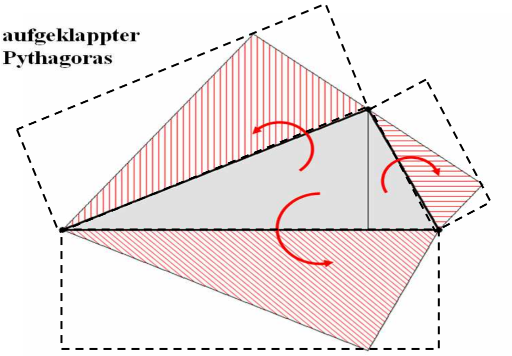
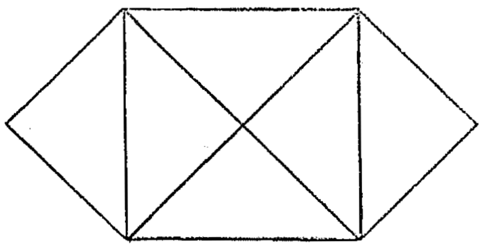


Abb. 2

Über die Ähnlichkeitslehre oder auch schon im Rahmen der Kongruenzgeometrie nach Euklidischem Vorbild (EUKLID 1980, Bücher V-VI bzw. Buch I) ist oft versucht worden, jeweils bevorzugte Seinsgründe Schritt für Schritt und mit langem Atem „vom Leichten zum Schweren“ zu vermitteln. Das entsprach überdies der landläufigen Meinung von Geschichte und Aufbau „der“ Mathematik. Sehr erfolgreich war es offenbar trotzdem nicht, denn die Bemühungen und Klagen um Nachhaltigkeit mathematischer Allgemeinbildung hörten seit Platon nicht auf – und dienten so mancher Reform des Mathematikunterrichts als Rechtfertigung.

„Ebenso lehrt der Pythagoreische Lehrsatz uns eine qualitas occulta des rechtwinkligen Dreiecks kennen; des Eukleides stelzbeiniger, ja hinterlistiger Beweis verlässt uns beim Warum, und beistehende, schon bekannte, einfache Figur gibt auf einen Blick weit mehr, als jener Beweis, Einsicht in die Sache und innere feste Ueberzeugung von jener Notwendigkeit und von der Abhängigkeit jener Eigenschaft vom rechten Winkel:



Auch bei ungleichen Katheten muss es sich zu einer solchen anschaulichen Ueberzeugung bringen lassen, wie überhaupt bei jeder möglichen geometrischen Wahrheit, schon deshalb, weil die Auffindung allemal von einer solchen angeschauten Notwendigkeit ausging und der Beweis erst hinterher hinzu ersonnen ward“ . . .

So urteilt Schopenhauer über den euklidischen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes, den Beweis, den schon Proklus als sehr augenfällig und neuerdings Herr Simon als den anschaulichsten rühmt, den Beweis, der noch heute in unseren Lehrbüchern der verbreitetste ist.

Abb. 3 und Schopenhauer-Zitat in JUNGE 1906;
vgl. z. B. auch BAPTIST 1997, Abschnitt 3.3

Allerdings hat sich im Laufe des 19. Jahrhunderts die Suchrichtung geändert. Mit der „Los von Euklid!“-Bewegung und verstärkt seit Mitte des Jahrhunderts, nach Schopenhauers Protest gegen Euklids Hinterlist und „Mausefallenbeweis“ wurden zunächst mit Veranschaulichungen, Plausibilitätsbetrachtungen, induktiven Herangehensweisen und zurückgenommenen Formalitäten „organische“ oder „genetische“ Beweise gesucht. Solange der Mathematikunterricht überzeitlich und weltweit geteiltes Kulturgut in erster Linie Respekt gebietend vermitteln sollte, galt die Beweissuche im Kern anschaulichen und doch nachhaltig überzeugenden ***Seinsgründe***n. (Eine kleine Übersicht mit Animationen gibt IWAMOTO 2011, Text a.; über 90 Beweise stehen unter http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml.) Erst mit dem gesellschaftlichen Aufstieg des Wirtschaftsbürgertums, mit der prosperierenden Industrialisierung und mit der Liberalisierung des Bildungssystems verwandelte sich in den Jahren vor und nach 1900 die professionelle Zumutung an Lehrer, „vom Schüler aus“ zu denken: von fürsorglicher Zukunftsorientierung (auch) zur „Freisetzung der Willenskräfte“, wie es damals hieß. Für das Lehren des Pythagoras-Satzes bedeutete diese Wendung, nach subjektiv kreativen ***Zugänge****n* zum Pythagoras-Satz zu suchen, um sie Schülern mittels geschickt arrangierter Lernumgebungen mehr oder minder verdeckt anzumuten. Anders als bei den meisten Lehrsätzen der Schulmathematik stieß man dabei auf erhebliche fach- und unterrichtsmethodische Hindernisse. Nimmt man die reformpädagogische Parole „vom Schüler aus!“ als Aufforderung zum forschenden Entdeckungslernen, dann kann der Pythagoras-Satz für den Mathematikunterricht geradezu als das erste wirklich zähe fachmethodische Hindernis – vielleicht sogar das einzige auf der Mittelstufe – bei der Durchsetzung „moderner Unterrichtsmethodik“ angesehen werden.

Von einigen Versuchen, das immer besser zu verstehen und wenigstens vorläufig zu überwinden, möchte ich im Folgenden berichten und dabei jeweils fragen, ob man nicht mit heutigen technischen Mitteln ein Stück weiter kommen könnte. (Man vergleiche dazu auch das mittlere Drittel des umfangreichen Werkes von FRAEDRICH 1995, auf das ich nur gelegentlich eingehen kann.) Dabei ist meine Quellenauswahl eher zufällig. Etwaigen Prioritätsfragen bin ich nicht nachgegangen, zumal vieles wohl hier oder dort schon lange unterrichtet wurde, bevor es jemand unter den strengen Augen der Fachwissenschafter zu veröffentlichen wagte.

1. Ein genetischer Rekonstruktionsversuch

In den Deutschen Blättern für erziehenden Unterricht, dem Zentralorgan ausgerechnet der angeblich so methodisch erstarrten Herbartianer, erschien 1886 vom Lehrerausbilder K. HEINEMANN ein Aufsatz, der unsere Suchrichtung sehr schön erklärt:

Die naturgemässe Einführung in einen geometrischen Lehrsatz, gezeigt am pythagoreischen.

Von Heinemann, Lehrer an der Kgl. Präparandenanstalt zu Quedlinburg.

Wenn ich mich auf die Behandlung irgend eines mathematischen Lehrsatzes vorbereite, so frage ich mich jedesmal zunächst: ‚Wie ist man wohl überhaupt auf diesen Satz gekommen?‘ Könnte ich meine Schüler den Weg führen, auf dem der Entdecker der mathematischen Wahrheit diese fand, dann müſsten sie den denkbar gröſsten Gewinn von der Lektion haben. Niemals freilich wird ihre Arbeit an die des Ideals heranreichen. Sie könnte es ja nur dann, wenn Lehrer (und Lehrbuch) und Mitschüler fehlten. Sie wird um so wertvoller sein, je weniger ich selbst helfe. Deshalb ist es immer mein erstes Bestreben, so viel wie möglich zurückzutreten.

Im vorliegenden Falle darf ich also vor allem den Lehrsatz nicht geben. Er kann ja von den Schülern gefunden werden.

. . .

. . . Der sachgemäſse Weg dürfte folgender sein: die geometrischen Wahrheiten bieten sich zunächst der Anschauung dar. Allerdings kann zuweilen für einen allgemeinen Satz nur ein spezieller Fall veranschaulicht werden, resp. sich ohne weitere künstliche Veranstaltungen von selbst der Anschauung darbieten. Dennoch bleibt diese Anschauung Ausgangspunkt. Das: ‚Ich sehe, daſs dies und jenes so ist‘, kann zuweilen auch durch: ‚Es scheint so!‘ ersetzt sein. — Nunmehr wird (durch Messung u. s. w.) konstatiert: ‚Es ist wirklich so!‘ Weiterhin werden andere spezielle Fälle herangezogen, und es wird gezeigt: ‚Es ist immer so!‘ Manche Schule wird mit dem Beweise für den Lehrsatz hier aufhören müssen, wenigstens bei einer Anzahl von Sätzen. Wer darüber hinausgehen kann, fragt: ‚Warum ist dies und das so?‘ So hat unser Schüler auf naturgemäſse Weise die drei Stufen geometrischer Erkenntnis durchlaufen: ‚Es scheint so! Es ist so! Es muſs so sein!‘

aus: Deutsche Blätter für erziehenden Unterricht, Bd. 13, H. 50 (1886), 399 - 402.

Abb. 4

Der Spezialfall, von dem HEINEMANN wie auch Schopenhauer ausgingen, ist der „Menon-Fall“, d. h. der Pythagoras-Satz für das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck, an dem Platons Sokrates bekanntlich dem Sklaven des Menon die rechte Quadratverdoppelung aus der Nase gezogen hatte. (Vgl. etwa SZABO 1994, S. 193 ff.; WINTER 1989, Kap. 1, und die dort angegebene Literatur; sowie unseren später folgenden Abschnitt 10.) Wie kommt HEINEMANN nun zu allgemeineren Fällen? Er schreibt dazu (S. 400; Abb. von mir ergänzt, L. F.):

Wir sehen im Geiste einem Steinsetzer zu, welcher Mosaikpflaster legt und zeichnen das Wesentliche an die Tafel. Er hat Platten, deren Breitseiten kongruente rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke bilden. An die beiden gleichen Dreiecksseiten legt er neue Dreiecke mit den entsprechenden Seiten, ebenso an die längere. Setzt er dort je zwei Platten an, so erhält er Quadrate, welche eine kürzere Dreiecksseite zur Grundlinie haben. Will er auch auf der dritten Seite ein Quadrat entstehen lassen, so braucht er vier Steine. So haben wir auf anschaulichem Wege nachgewiesen, daſs das Quadrat über der längern Seite des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks gleich ist der Summe derjenigen Quadrate, welche man auf den beiden andern Seiten errichtet.

Abb. 5

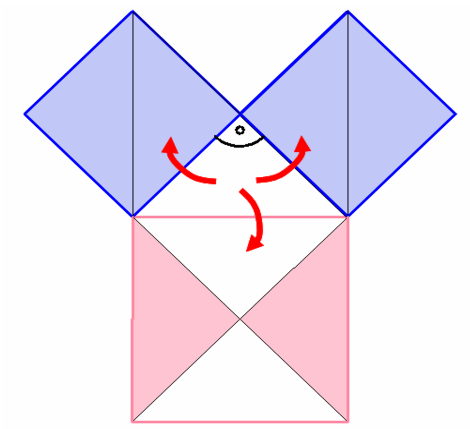


Abb. 6

Heimliches Ziel ist die Plattenkonstellation im nächsten Bild rechts, und das war natürlich auch damals schon keine neue Beweisidee (rechte Abb. bei HEINEMANN, S. 400).

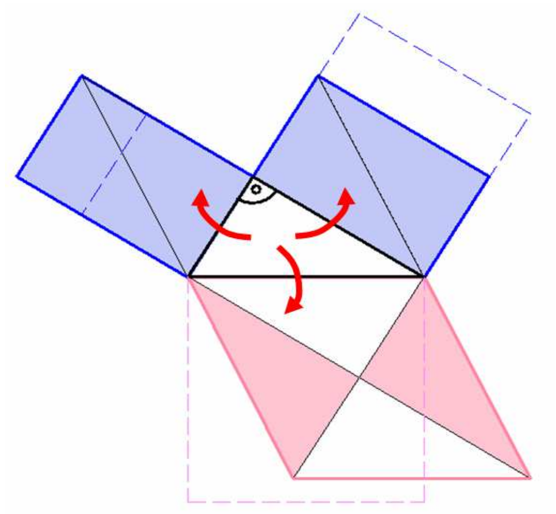


Abb. 7

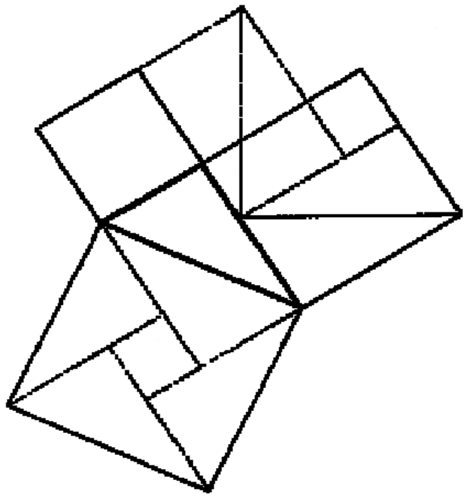


Abb. 8

Viel interessanter als dieses Ziel ist aber HEINEMANNS Weg: Er lässt alle seine Schüler (einer „Präparandenanstalt“, also gute Volksschulabsolventen in der Lehrer-Lehre) eine asymmetrische Pythagoras-Figur zeichnen und ausmessen, aber nicht in cm^2, sondern gemäß der Steinsetzer-Idee: mit zum inneren Dreieck kongruenten „Platten“. Die Fußnote dazu lautet: „Ein das gegebene Dreieck darstellendes Stück Pappe wird gute Dienste leisten.“ Ich denke, er wäre einverstanden, wenn wir mehrere Pappdreiecke, Overlayfolien oder PC-Kopien des Ausgangsdreiecks nähmen …

Geht man HEINEMANNS Steinsetzer-Idee mit den PC-Möglichkeiten nach, so wünscht man sich natürlich ein Programm, das das Zeichnen, Kopieren und trickfreie Bewegen rechtwinkliger Dreiecke umstandslos ermöglicht, z. B. auf einem Touch-Screen. In der Tat sind solche Möglichkeiten inzwischen verfügbar und im Versuchsstadium (DOHRMANN 2011). Mit den herkömmlichen Mitteln kann man sich z. B. so behelfen:

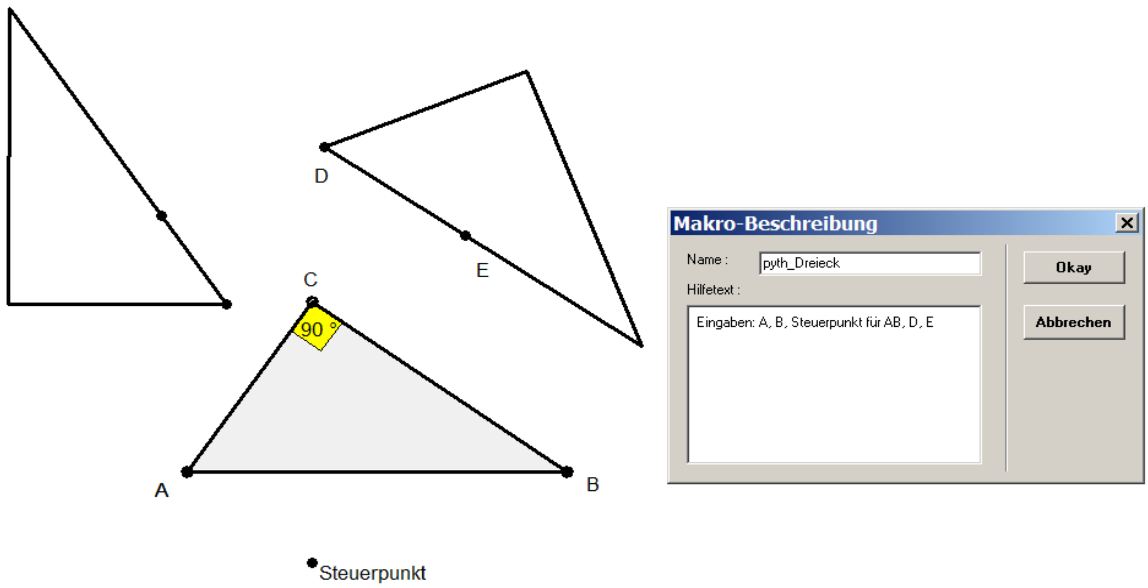


Abb. 9

In Euklid-DynaGeo wird ein rechtwinkliges Dreieck ABC mittels A, B und einem „Steuerpunkt“ S vorgegeben, der C auf einem verborgenen Thaleskreis über AB steuert. Anschließend werden Kopien von ABC mit einem Makro „pyth_Dreieck“ erzeugt, deren Hypothenusen jeweils mit D beginnen und in Richtung E verlaufen. Mittels D und E können die Kopien dann frei bewegt werden.

2. Induktiver Zugang: gedrehte Quadrate

Ein nahe liegender Kritikpunkt an der Fliesenleger-Idee lautet: Ist es nicht erzieherisch bedenklich, wenn Lernende dazu aufgefordert werden, eine einzige gelegentliche Beobachtung (Menon-Fall) sofort zu verallgemeinern? Verallgemeinern tun halt viele Menschen allzu gern, und nachträgliche Begründungen, wie sie HEINEMANN dreifach nachschiebt, werden oft nur als Lehrerhobby abgetan.

Demnach sollte erst die allgemeine Satz-Hypothese aufgestellt werden, nachdem mehrere Beispiele zur selben Beobachtung der Kathetenquadrat-Vereinigung im Hypotenusenquadrat geführt haben. Hier werden gern pythagoreische Dreiecke benutzt (HEINEMANN erwähnt die beiden bekanntesten). Auf deren zwanglose Gewinnung möchte ich erst im nächsten Abschnitt eingehen und erst einmal ihre Funktion auf dem Weg zum Pythagoras-Satz genauer beleuchten.

Ein bemerkenswerter Vorschlag von G. JUNGE 1906 „führt über Dreiecke, deren Katheten rationales Verhältnis haben“:

Ich stelle den Schülern die Aufgabe, Quadrate von gegebener Fläche zu zeichnen, zuerst von 1, 4, 9 usw. qm, dann von der doppelten Fläche. Die Schüler benutzen Papier, das nach ganzen oder halben cm karriert ist. Bei der ersten Reihe von Quadraten fallen die Seiten der Quadrate mit den vorgezeichneten Linien zusammen, bei der zweiten Reihe laufen sie diagonal. Weiterhin fordere ich, einige der fehlenden Quadrate zu zeichnen, etwa das von der Fläche 5 qm. In der Regel verfällt bald ein Schüler auf die Figur 2 angegebene Konstruktion.

Sonst komme ich zu Hilfe durch die Zwischenforderung, ein Kreuz von der Fläche 5 qm zu zeichnen und in ein Quadrat zu verwandeln; s. Figur 3.

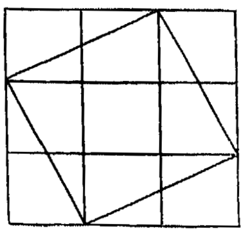


Fig. 2.

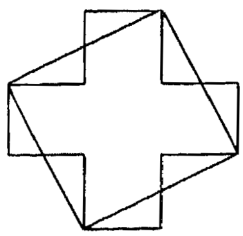


Fig. 3.

Aehnlich lassen sich alle Quadrate zeichnen, deren Fläche in qcm als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar ist, deren Fläche also = 10, 13, 17, 20 usw. qcm.

Die Zeichnung für das Quadrat von der Fläche 25 = 16 + 9 findet sich Cantor I S. 638; sie ist nach den Angaben einer chinesischen Quelle konstruiert; s. Figur 4.

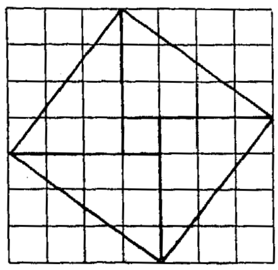


Fig. 4.

Die Schüler berechnen die Fläche der Quadrate durch Zerlegung in ein kleines Quadrat in der Mitte, dessen Seiten mit den Linien des Papiers zusammenfallen, und vier kongruente rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten ebenfalls mit Linien des Papiers zusammenfallen.

Diese Flächenberechnungen sind so anschaulich und einfach wie nur möglich. Nur denkt man noch kaum dabei an den Satz von Pythagoras.

Ich lasse weiterhin Quadrate zeichnen und berechnen über der Hypotenuse von Dreiecken, deren Katheten in cm und mm gegeben sind. Bei der Lösung solcher Aufgaben verfallen dann die Schüler früher oder später auf das Gesetz, das durch den Pythagoras ausgesprochen wird, und dessen Kenntnis eine schnellere Berechnung der Quadratfläche ermöglicht.

Abb. 10 – JUNGE 1906

Die folgenden Bilder aus einem Baumarkt (Kann-Bausysteme.de) bzw. aus LIETZMANN 1953 verallgemeinern JUNGEs Ansatz auf gemischte Quadratmuster. Etwas künstliche Problemfrage: Wie könnten möglichst verpackungsfreundliche (d.h. kleine, handliche und gleich große) quadratische Keramik-Platten für den Versand aussehen, die das gemischte Muster entstehen lassen?

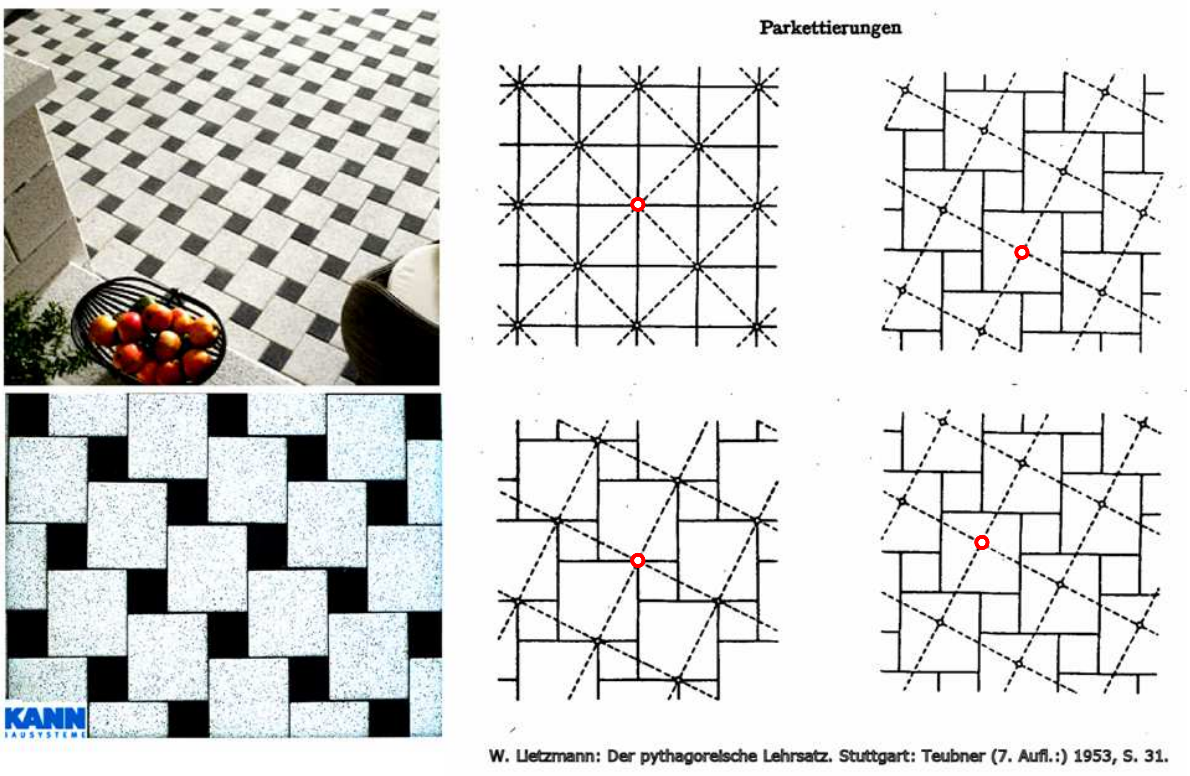


Abb. 11

ALEXIS-CLAUDE CLAIRAUT hatte schon 1741 klargelegt, was man als die kurze Pointe solcher Schülerübungen ansehen könnte:

Des
Herrn Clairaut,
der Königl. Französischen und Königl. Preußischen Akademien der Wissenschaften, der Königl. Gesellschaften zu London, Upsal und Edimburg, und der Akademie des Instituts zu Bologna Mitgliedes,
Anfangsgründe
der
Geometrie.
Aus
dem Französischen übersetzt
von
F. J. Bierling.

Neue Auflage.

Hamburg, bey Christian Herolds Wittwe.
1773.

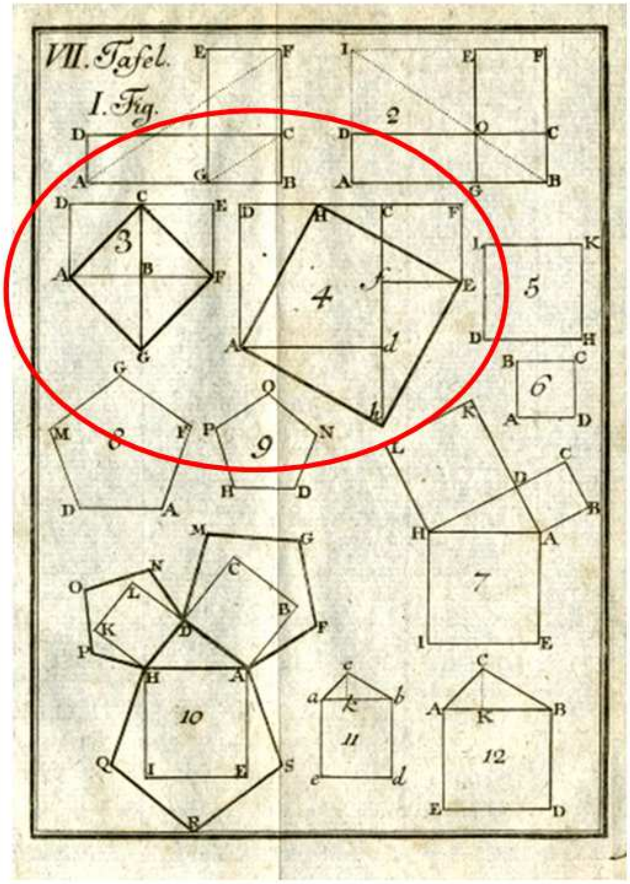


Abb. 12

Das fette Quadrat in der Abb. 3 der CLAIRAUT-Übersetzung kommt zustande, indem man die Dreiecke unter DC bzw. CE mit je einer Vierteldrehung um ihre unteren Ecken aufeinander zu bewegt, bis AD’ = AB bzw. FE’ = FB. Bei den ungleichen Quadraten der folgenden Abbildung erzeugen die Diagonaldreiecke ACD bzw. EFC auf diese Weise leider kein Quadrat. Während C nach rechts wandert, muss stets ein Ausgleich zwischen den Hypothenusenlängen stattfinden: C zerfällt in C und H, so dass die von DH bzw. HF nach unten hängenden Dreiecke „mittlerer“ Hypothenusenlänge aufeinander zu gedreht werden. Dabei muss H zum Ausgleich genau so weit von der Mitte nach links wandern, wie C aus der Mitte nach rechts verlegt wird. Das ist CLAIRAUTS genetische Rekonstruktion des „Stuhls der Braut“. (Ende 9. Jh. n. Chr.; vgl. etwa LIETZMANN 1953, S. 24; WITTMANN 1987, Abschn. 3.5; BAPTIST 1997, Abschn. 3.4.)

Als Übertragung auf den PC bietet sich vielleicht folgende Variante des JUNGEschen Zugangs an: In einem gerasterten Koordinatensystem sind zunächst keine, dann zwei oder mehr Quadrate vorgegeben. Mithilfe eines „Quadrat-Makros“ soll nach schrägen Summenquadraten gefahndet werden, die „exakt“ ganzzahligen Flächeninhalt haben. (Ein Quadrat-Makro mit 3-Punkt-Eingabe hat sich dazu bewährt: A, B und S, wobei die Ecken A und B zwecks Steuerungsmöglichkeit sichtbar bleiben müssen, während S lediglich für die rechte Orientierung sorgt und nicht sichtbar bleibt.) – CLAIRAUTS allgemeine Problemlösung für den „Stuhl der Braut“ eignet sich wohl nur zum Vorführen im Zugmodus.

3. Pythagoreische Dreiecke entdecken?

JUNGES Vorschlag macht von rechtwinkligen Dreiecken mit rationalem Kathetenverhältnis Gebrauch, d. h. außer von pythagoreischen Dreiecken auch von solchen mit irrationaler Hypotenuse, bei denen ungefähre Messwerte genügen müssen. Wie kann die Lehrerin ihren oder der Lehrer seinen Schülern pythagoreische Dreiecke in genügender Zahl zur Verfügung stellen, ohne irgendwelche algebraische Zauberformeln vom Himmel regnen zu lassen?

Die pythagoreischen Zahlentripel berechnen sich nach den Formeln: $a = x^2 - y^2$, $b = 2\,x\,y$, $c = x^2 + y^2$ wo x und y ganze positive Zahlen sind, $x > y$. Werden x und y teilerfremd und eine von ihnen gerade gewählt, so wird ein primitives, d. h. teilerfremdes Zahlentripel erhalten.

x	2	3	4	4	5	5	6	6	7
y	1	2	1	3	2	4	1	5	2
c	5	13	17	25	29	41	37	61	53
a	3	5	15	7	21	9	35	11	45
b	4	12	8	24	20	40	12	60	28

Abgeleitete Tripel erhält man, wenn man jedes Tripel mit einer beliebigen ganzen Zahl multipliziert.

Abb. 13 – aus KNABE 1967, S. 57

In seiner „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ hat FELIX KLEIN (z. B. 1925) eine Überlegung vorgestellt, wie man projektionsgeometrisch auf diese Parametrisierung der pythagoreischen Tripel kommen kann. REIDT (1868, S. 99 f.) bzw. LIETZMANN (1953, Kap. VII) leiten sie als notwendige und hinreichende Bedingung durch elementare Überlegungen zu Parität und Primfaktorzerlegung von a, b und c her. Beide Zugänge sind z. B. in SCHEID/SCHWARZ (2008, S. 65 ff.) ausführlich wiedergegeben. Hier mag eine Skizze des Gedankenganges nach REIDT und LIETZMANN genügen:

Gesucht sind alle pythagoreischen „Grundtripel“, d. h. teilerfremde natürliche Tripel (a, b, c) mit $a^2 + b^2 = c^2$. Wegen der Teilerfremdheit müssen a und b verschiedene Parität haben. Man nehme an, a sei ungerade, b gerade und c folglich ungerade. Nun kann man $b^2 = (c + a)\cdot(c - a) =: 4\cdot m\cdot n$ schreiben, wobei $m := (c + a)/2$, $n := (c - a)/2$ und folglich $c = m + n$ und $a = m - n$. Wegen letzterem sind auch m und n teilerfremd und folglich Quadratzahlen, etwa $m =: x^2$ und $n =: y^2$. Daraus folgen dann $b = 2xy$, $a = x^2 - y^2$ und $c = x^2 + y^2$. So sehen alle gesuchten Grundtripel aus. Und so erhält man auch stets aus zwei teilerfremden Quadratzahlen unterschiedlicher Parität pythagoreische „Grundtripel“. (Laut VAN DER WAERDEN 1966, S. 163, wurde i. w. dieses Konstruktionsverfahren für alle Grundtripel Pythagoras selbst zugeschrieben. Sie sind aber sehr wahrscheinlich schon die Grundlage der berühmten altbabylonischen Tabelle Plimpton 322 gewesen; ebenda S. 125-128.)

In FRAEDRICH (1995, S. 222-233) findet sich auf dieser Grundlage eine sehr einfühlsame und geistreiche Überarbeitung des recht aufwändigen Versuches „vom Seilspanner-Dreieck her“ aus WAGENSCHEIN 1965. FRAEDRICH (ebenda und S. 79 ff.) thematisiert ausnahmsweise auch fast-pythagoreische Dreiecke, d. h. solche deren Kathetenquadratsumme beinahe eine Quadratzahl ist. Lässt man Schüler auf kariertem oder auf Millimeterpapier nach pythagoreischen Dreiecken suchen und nachmessen, so finden sich natürlich eher fast-pythagoreische Dreiecke als exakt pythagoreische (s. u., Abschn. 10). Da diese Zugänge im Schulunterricht teils artifiziell, teils allzu zeitraubend wirken dürften, möchte ich nur den folgenden Weg über den „Satz von Haga“ aus der gegenwärtig rasant aufblühenden Origami-Mathematik vorschlagen:

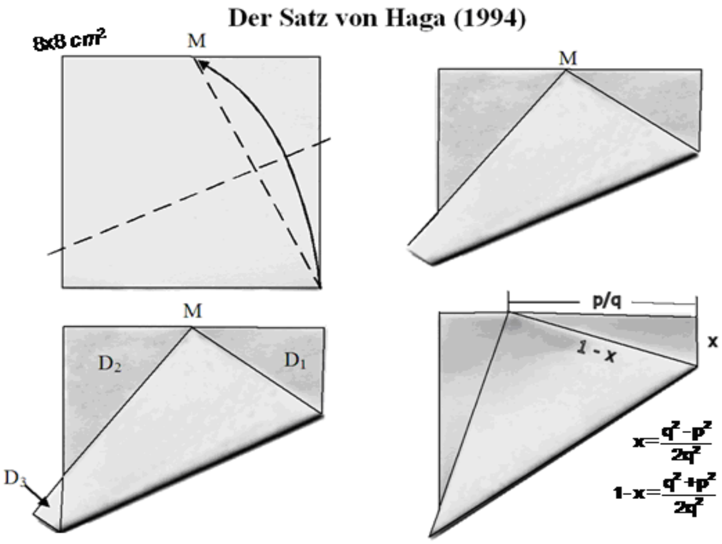


Abb. 14

Als „Satz von Haga“ wird dort gewöhnlich nur die – mit dem Pythagoras-Satz leicht beweisbare – Beobachtung bezeichnet, dass beim Herüberfalten einer Quadratecke auf die Mitte einer Gegenkante drei „ägyptische“ 3-4-5-Dreiecke entstehen. (Nach IWAMOTO 2011, Text b, geht der Origami-Satz auf eine umfangreichere Studie HAGAs zurück, die 1979 in einem japanischen Journal in der Landessprache erschienen war. Oft wird der Satz auf den „Origamics“-Vortrag des Entdeckers auf dem 2. Internationalen Origami Congress 1994 datiert.) Die ägyptischen Dreiecke sind experimentell sehr schön zu sehen, wenn man die Schüler mit 8×8-Quadraten falten und messen lässt (auf den Randhöhen 1 bis 5 „geknicktes Schachbrett“). Die Verallgemeinerung im Bild rechts unten ist aber ebenfalls leicht einzusehen, denn es handelt sich bei gegebenem *p/q* nach dem Pythagoras-Satz um die Lösung der nur scheinbar quadratischen Gleichung $(1 - x)^2 = x^2 + (p/q)^2$. (Nach einer Andeutung in KASAHARA 2000, S. 9; vgl. auch KOSHIRO 2011, FLACHSMEYER 2011). Intuitiv ist klar, dass prinzipiell – bis auf Größenunterschiede – keine anderen pythagoreischen Dreiecke möglich sind als die, die man so falten kann – in Gedanken wenigstens.

Im Unterricht können (arbeitsteilig, und) ohne Kenntnis des Pythagoras-Satzes beliebig viele verschiedene (fast) pythagoreische Dreiecke entdeckt werden, wenn man jeweils „zufällig“ mit $2q^2 \times 2q^2$-Blättern falten und messen oder mit einem DGS experimentieren lässt. Die Nachkonstruktion auf dem PC ist ergiebiger, weil die Maßstabanpassungen mit dem Faktor $2q^2$ weniger Probleme machen. Schön wäre dafür ein DGS, das sich auf gemeine Bruchrechnung umstellen ließe. – Insgesamt könnte aber so manchen Schülern das Suchen nach pythagoreischen Dreiecken eher als Abschieben des Satzes in die Rätselecke erscheinen.

4. Experimenteller Zugang

Die Suche nach Dreiecken, bei denen zwei Seitenquadrate zusammen so groß wie das dritte Seitenquadrat sind, lässt sich bekanntlich mit der Historiker-Hypothese von der „geometrischen Algebra der Griechen“ rechtfertigen – auch wenn diese Hypothese inzwischen recht umstritten ist (CHASLES 1839, S. 460; ZEUTHEN 1896/1965; SZABO 1969, 1994, dort ausführlich in Anhang III; SCHOLZ 1990; BAPTIST 1997, S. 40; unserer Abschnitt 10). Eine ästhetische Motivation (mit leider unerwähnten physikalisch-technischen Anklängen) geben WYSS

U. A. (1978, S. 66), indem sie die Symmetrie des Menon-Beispiels behutsam „brechen“:

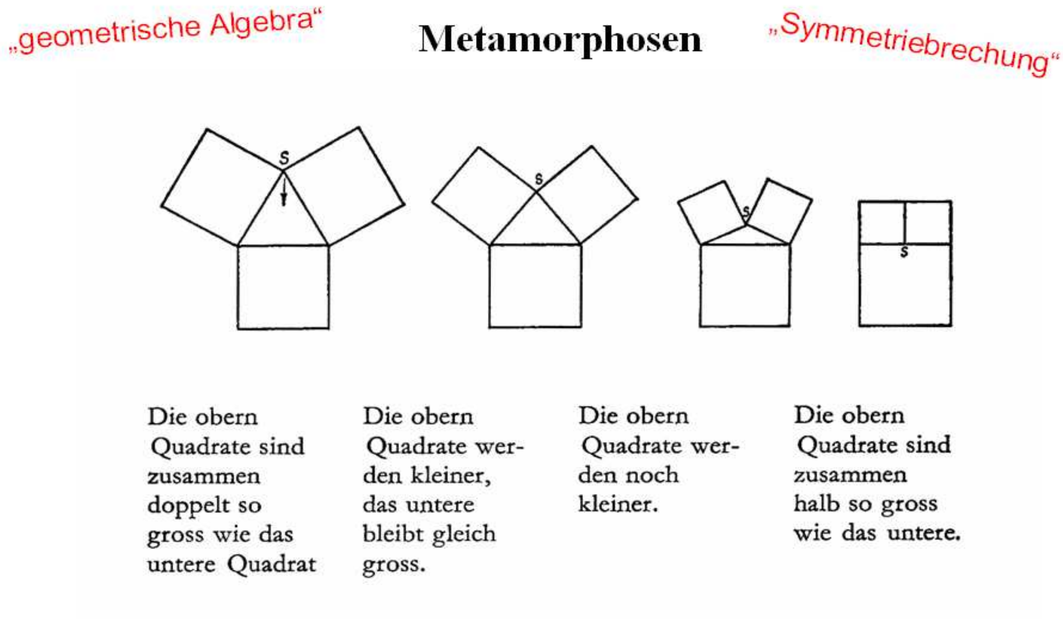


Abb. 15 – Symmetriebrechung in WYSS U. A. 1978;
mit zusätzlichen Kontexten in Überschriften

Die Zielsetzung „Quadratsummen-Dreiecke suchen!“ bietet sich für Einzelarbeit auf dem PC an: Man zeichne ein Dreieck mit beweglichen Eckpunkten und über jeder Seite ein Quadrat nach außen. Dann lasse man die Flächen vom Programm messen und beobachte Dreiecksformen, bei denen „es stimmt“. Was fällt auf? Es entstehen Thaleskreise, also rechte Winkel.

So finden sich natürlich fast nur ungefähr rechtwinklige Dreiecke, aber immerhin wenigstens die Umkehrung des Pythgorassatzes als Hypothese. Allerdings legt dieser Zugang kaum eine Begründungsidee nahe – außer vielleicht die Assoziation „Thales-Satz“. Und schlimmer noch: Es bleibt nach den Experimenten kaum noch Begründungsinteresse. Schade, dass diese reine Schülerbeschäftigung heute von Schulbuch-Verlagen vermarktet wird und auch auf der einen oder anderen Kollegen-Homepage zu finden ist. Etwas geistreicher und zielführender mögen die beiden folgenden Varianten sein, bei denen C bewegt werden soll:

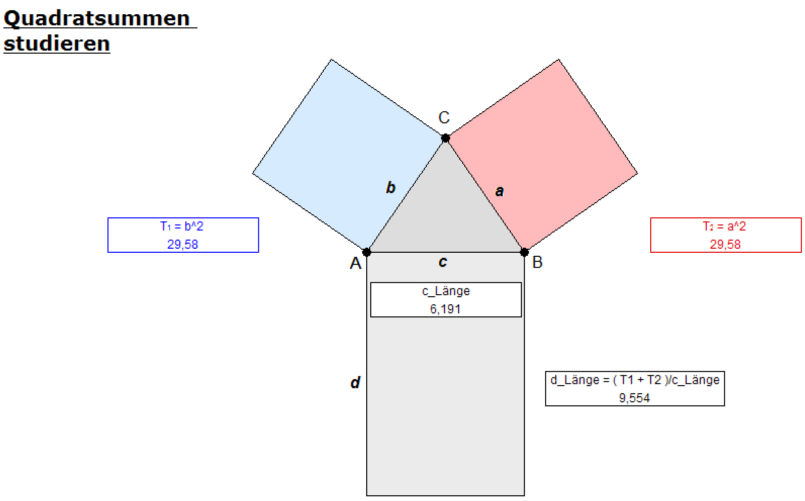


Abb. 16

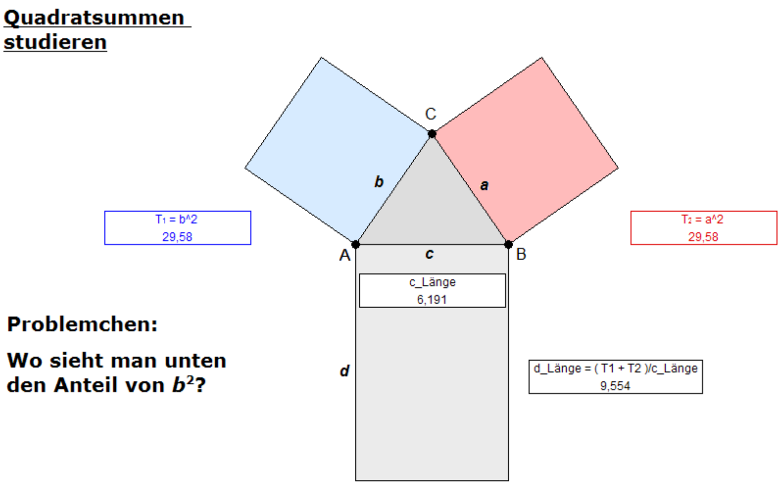


Abb. 17

Hier entsteht eher Schülerinteresse, den Zusammenhängen (Katheten- bzw. Projektionssatz, Kosinussatz) auf den Grund zu gehen, weil die nahe liegende Vermutung, dass die c-Höhe das untere Rechteck passend aufteile, eben nicht immer gilt. Überzeugende Hypothesen mit überraschend begrenzter Reichweite sind immer ein guter Beweismotor …

5. Flächenumwandlungen

JUNGE berichtet in seinem kurzen Aufsatz noch von einem ganz anderen Zugang, der in älteren Schulbüchern gern im Anschluss an den Themenkreis „Flächeninhalt des Parallelogramms und des Trapezes – Flurbereinigungen – Flächenverwandlungen von Polygonen“ gebracht wurde.

Dazu eine Bemerkung vorweg: Leider sind Flächenverwandlungen heute fast völlig verdrängt – sieht man einmal vom angeblich methodisch vorbildlichen japanischen TIMSS-Video ab (vgl. NEUBRAND 1998) –, sei es aus Zeitnot, sei es wegen ungeschickt dogmatischer Stoffhuberei nach Lehrbuch-Vorlage. Dass Flächenverwandlungen durchaus auch kreativ unterrichtet werden konnten, sieht man z. B. an HÖFLERs Bemerkungen zu Einstiegen mit dem „Kopfzerbrecher“ (Tangram) oder in TREUTLEINs Buch zur geometrischen Propädeutik an Puzzles im Anschluss an das Mittenparallelogramm des Vierecks („Satz von Varignon“). Um Flächenverwandlungen wirklich anschaulich zu behandeln, kamen vor hundert Jahren nur bewegliche Drahtmodelle und Kinohefte infrage. Heute ließen sich Scherungs- und Bewegungsargumente leichter mit DGS realisieren, vielleicht sogar auch wieder kreativ…

Hier die angesprochene Idee, wie man aus Flächenverwandlungsproblemen zum Kathetensatz kommen kann (etwas andere Varianten finden sich in FRAEDRICH 1995, S. 153 ff.):

1. Ein Rechteck soll in ein Quadrat verwandelt werden. (Ohne Wurzelberechnung oder –konstruktionsverfahren bleiben die Schülerversuche auch auf dem PC in Näherungen stecken.)
2. Die umgekehrte Aufgabe ist viel einfacher: Ein Quadrat in ein Rechteck verwandeln!
3. Man kann sich sogar eine Seite des Rechtecks aussuchen, z. B. $c := \dots$, und dann das Quadrat erst in ein Parallelogramm mit Seite c und dann in ein passendes Rechteck verscheren.
4. Sollte sich das nicht umkehren lassen?
5. Leider braucht man für Punkt E zwei Bedingungen („geometrische Örter“), und die muss man erst suchen und finden …

Die Skizzenfolge zeigt, wie es geht:

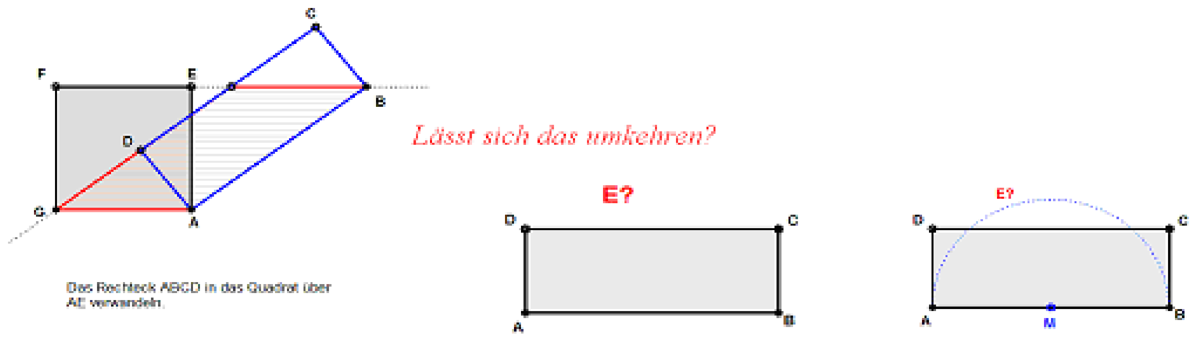


Abb. 18

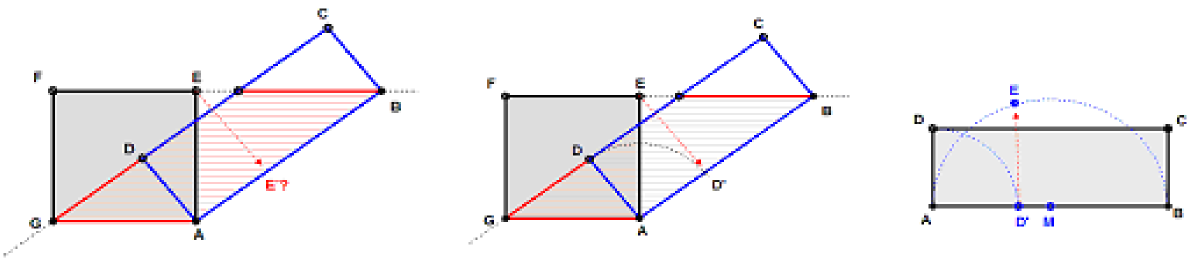


Abb. 19

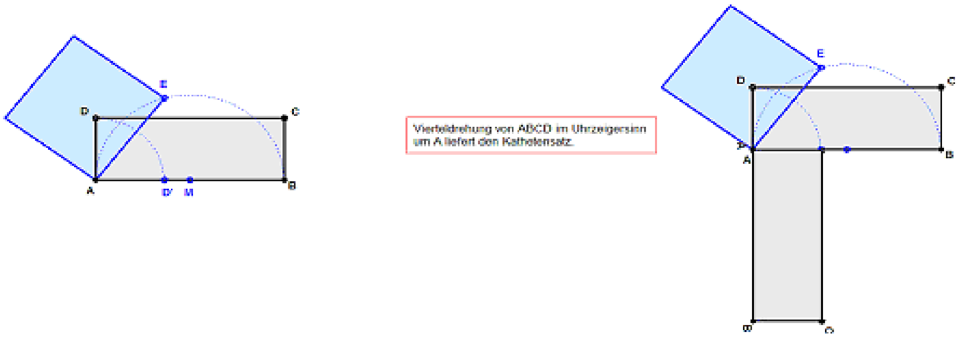
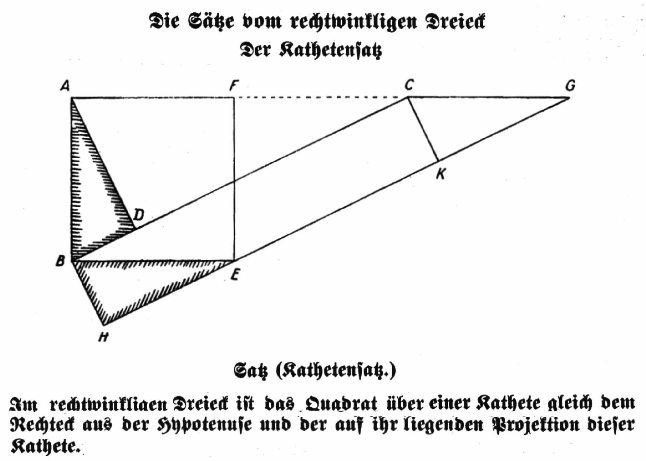


Abb. 20

Das Resultat in den Büchern sah dann recht knapp aus, z. B. so:

Abb. 21, rechts – aus
REIDT-WOLFF-KERST 1926, S. 184


Die Sätze vom rechtwinkligen Dreieck

Der Kathetensatz

Satz (Kathetensatz.)

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der auf ihr liegenden Projektion dieser Kathete.

Das lud natürlich zur „Erarbeitung durch Herausfragen“ ein. So „sparte“ man die Zeit für Schülerexperimente – mit entsprechend abschreckender Wirkung. Immerhin war die Technik der Doppelscherungen und Drehungen weitergehend nutzbar, wie die folgenden Herleitungen des „Projektionssatzes“ (verallgemeinerter Kathetensatz) und des „verallgemeinerten Satzes von Pythagoras“ (Kosinussatz) zeigen.

Zunächst wird der Kathetensatz verallgemeinert, wobei man die nötige Flächenverwandlung und Drehung heute bequem für Parallelogramme wie $LABB_1$ statt der sachferneren Halbdreiecke wie LAB animieren kann:

In einem Dreieck ist das Rechteck aus einer Seite und der Projektion einer zweiten auf sie gleich dem Rechteck aus der zweiten Seite und der Projektion der ersten auf sie.

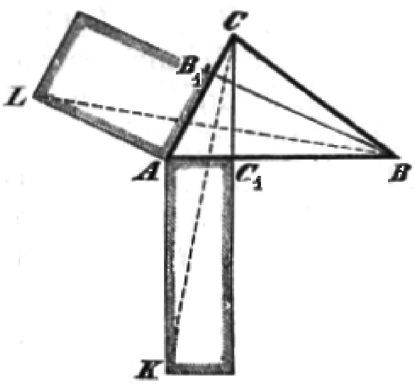


Abb. 22 und Text aus HENRICI/TREUTLEIN 1881, S. 97

Anschließend wird der Projektionssatz auf die beiden oberen Seiten angewandt und mit Quadraten verglichen, wobei die beiden gleichgroßen oberen Rechtecke übrig bleiben (bzw. im stumpfwinkligen Fall, der hier nicht aus dem SCHWAB kopiert ist) fehlen:

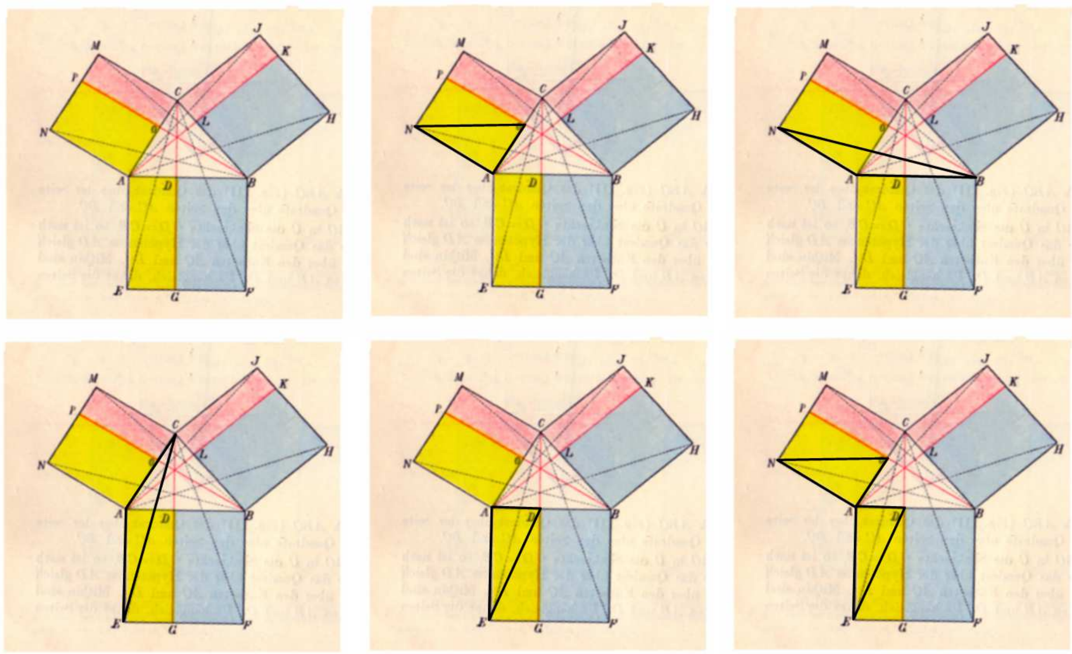


Abb. 23 aus SCHWAB 1910, S. 94; gescherte und gedrehte Dreiecke hinzugefügt

6. Der Gnomon-Satz

In euklidischer Tradition wurde im Themenkreis Flächenverwandlungen regelmäßig auch der sogenannte „Gnomon-Satz“ oder auch „Satz über Ergänzungsparallelogramme“ behandelt:

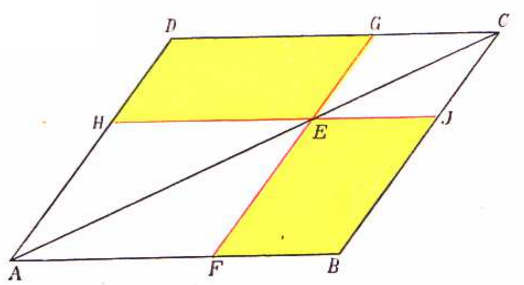
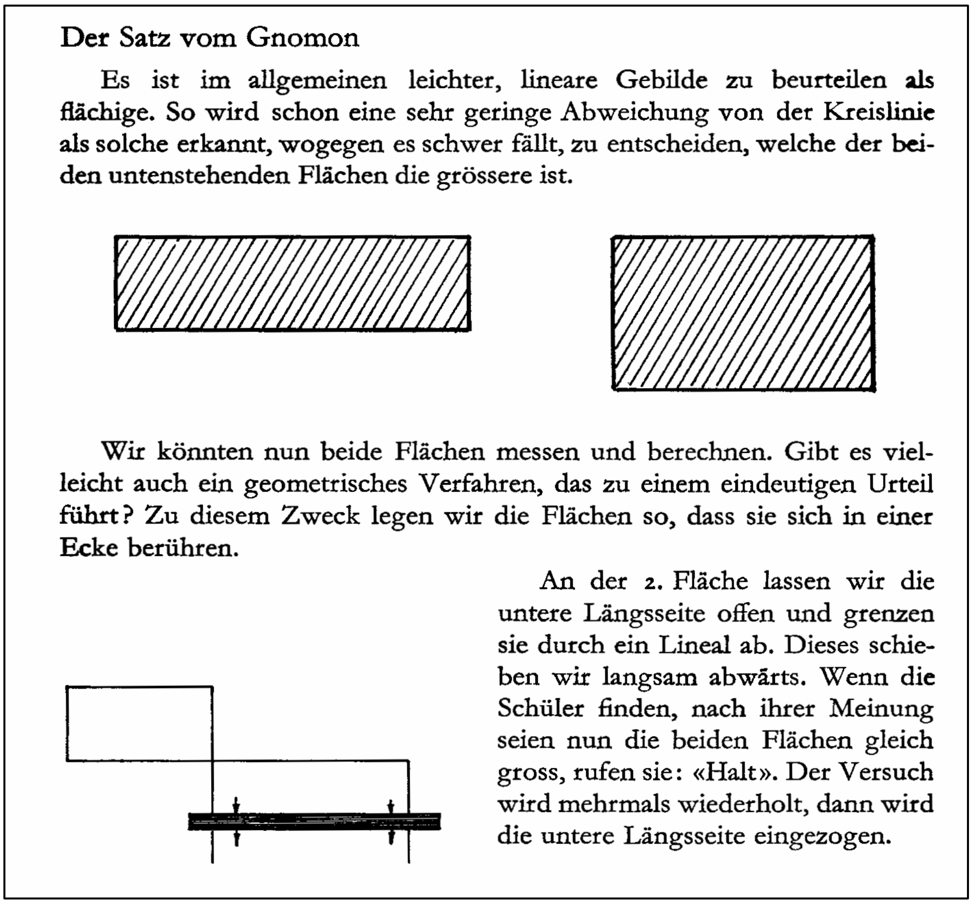


Abb. 24 aus SCHWAB 1910, S. 89;
vgl. auch die zweite Figur in der Bildtafel von CLAIRAUT

Ist ein Parallelogramm durch eine Diagonale halbiert und auf dieser Diagonalen ein Punkt gegeben, so teilen die von ihm ausgehenden Seitenparallelen vier kleinere Parallelogramme ab, von denen die „Flügel“, d. h. die nicht diagonal durchschnittenen, gleich groß sind (und die drei anderen – zwei kleine und das große – ähnlich). (Zum „Gnomon“-Begriff s. Abschnitt 10.)

In WYSS U.A. (1978, S. 63) findet sich ein Motivationsversuch für ein näheres Studium der merkwürdigen Gnomon-Konstellation:



Der Satz vom Gnomon

Es ist im allgemeinen leichter, lineare Gebilde zu beurteilen als flächige. So wird schon eine sehr geringe Abweichung von der Kreislinie als solche erkannt, wogegen es schwer fällt, zu entscheiden, welche der beiden untenstehenden Flächen die grössere ist.

Wir könnten nun beide Flächen messen und berechnen. Gibt es vielleicht auch ein geometrisches Verfahren, das zu einem eindeutigen Urteil führt? Zu diesem Zweck legen wir die Flächen so, dass sie sich in einer Ecke berühren.

An der 2. Fläche lassen wir die untere Längsseite offen und grenzen sie durch ein Lineal ab. Dieses schieben wir langsam abwärts. Wenn die Schüler finden, nach ihrer Meinung seien nun die beiden Flächen gleich gross, rufen sie: «Halt». Der Versuch wird mehrmals wiederholt, dann wird die untere Längsseite eingezogen.

Abb. 25

BEHREND-MORGENSTERN (1932, S. 160) nennen einen tieferen Grund, warum es die Gnomon-Figur in sich hat: Sie charakterisiert homogen-lineare Zusammenhänge flächenhaft-geometrisch und visualisiert damit den fundamentalen Produktsatz für Proportionen:

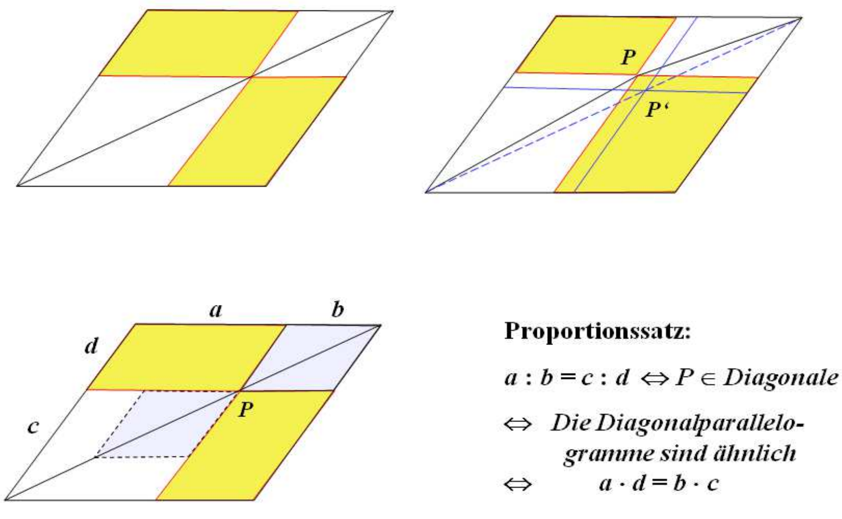


Abb. 26

In der „geometrischen Algebra“ stellte der Gnomon-Satz das geometrische Analogon der Größendivision dar – mit vielerlei Beziehungen zur Proportionslehre. (Vgl. ZEUTHEN 1896/1965, S. 19; sowie unten, Abschnitt 10.) Man konnte damit z. B. die Proportionsgleichung $a : b = c : x$ auflösen und **die mittlere Proportionale finden**, d. h. das Rechteck $a{\cdot}b$ quadrieren, in unserer Sprache $a{\cdot}b = x^2$ lösen.

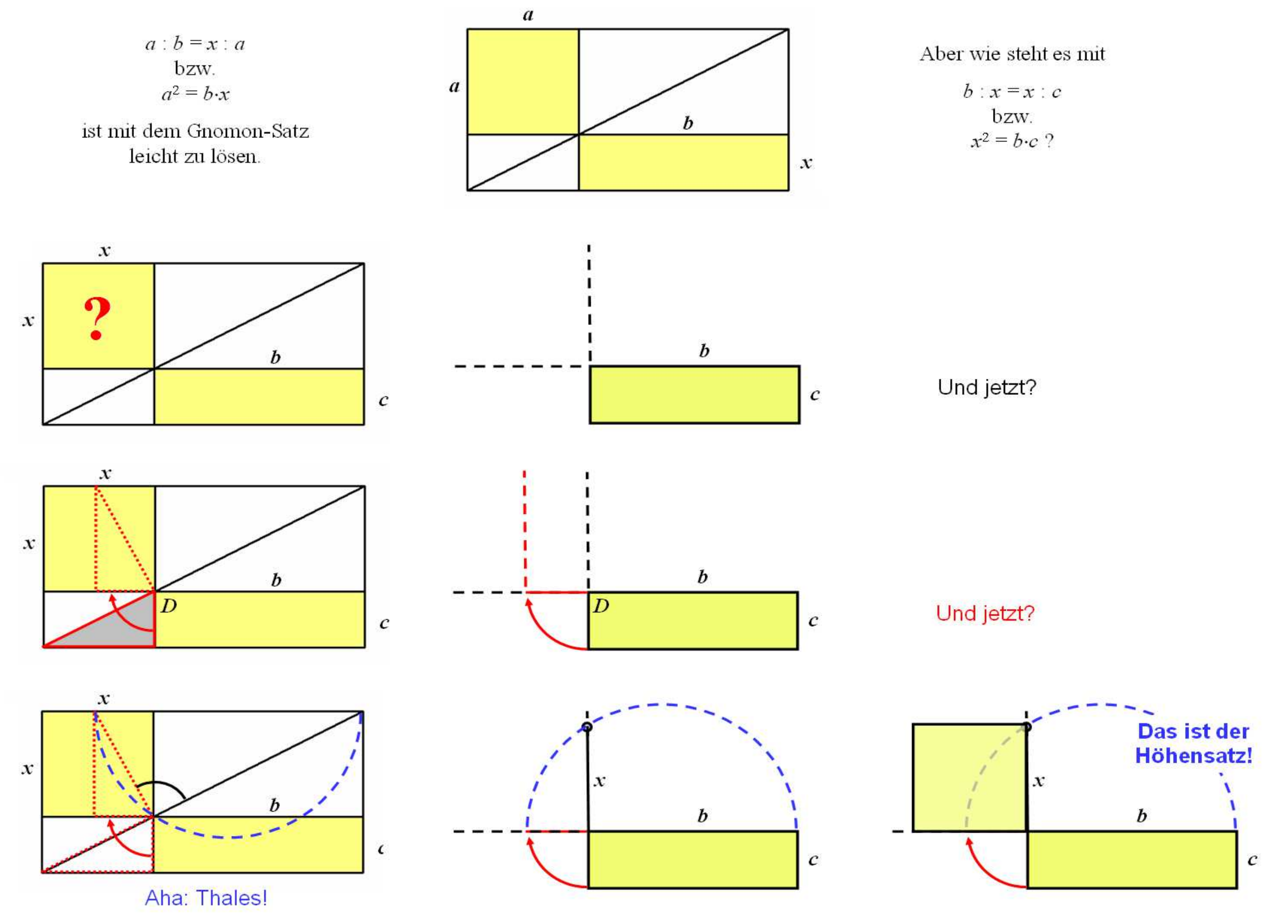


Abb. 27

Merkwürdiger Weise scheint niemand die nahe liegende Frage gestellt zu haben, wo sich in der Gnomon-Figur die Summe der beiden Parallelogrammflächen zeigt, sozusagen die (vektoriell betrachtet:) „mittlere Gestalt“ der Flügelparallelogramme. (Immerhin deutet vielleicht die erste Abbildung in der oben gezeigten CLAIRAUTschen Tafel in diese Richtung.) Dabei ist das ganz leicht zu sehen:

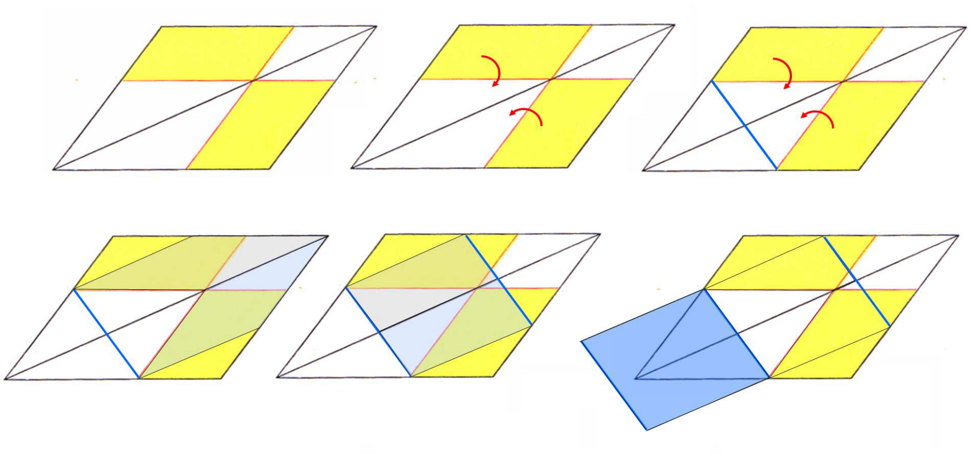
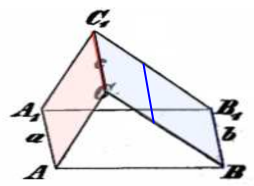


Abb. 28

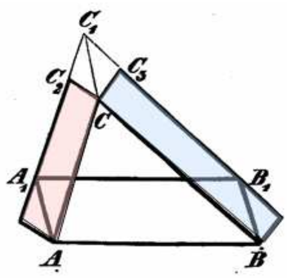
Hier erscheint nun recht zwanglos eine Parallelogramm-Version der Menon-Figur für die Addition zweier flächengleicher, aber nicht notwendig kongruenter Parallelogramme. Der entdeckte Parallelogramm-Satz lässt sich nun viel einfacher verallgemeinern als die Menon-Konfiguration des Pythagoras-Satzes:

Eine Strecke beschreibt bei der Verschiebung längs zweier Seiten eines Dreiecks zwei Parallelogramme, deren Summe gleich dem Parallelogramm ist, das durch Verschiebung der Strecke längs der dritten Seite entsteht.



bzw.:

Ein Parallelogramm über einer Dreiecksseite, deren Gegeneck zwischen zwei Gegenseiten des Parallelogramms fällt, ist gleich der Summe der Parallelogramme über den andern Seiten, deren Gegenseiten durch die Ecken des ersteren Parallelogramms gehen.



Abbn. 29 und 30 beides aus HENRICI-TREUTLEIN
1881, S. 98 f.; Färbungen hinzugefügt>

Und das ist der so genannte Flächensatz von Pappos (um 320 n. Chr.), der den Pythagoras-Satz als Übungsaufgabe umfasst. Zum Beweis braucht man nichts von Scherungen zu wissen, es reichen Kongruenzsätze.

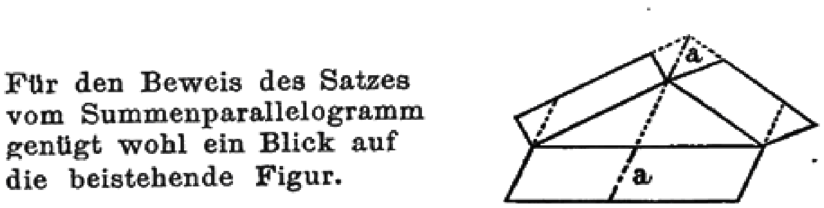

Für den Beweis des Satzes vom Summenparallelogramm genügt wohl ein Blick auf die beistehende Figur.

Abb. 31 – aus WOLF 1870, S. 157

In FISCHER 1869 findet sich eine Auseinandersetzung mit der Wechselbeziehung zwischen dem Flächensatz von Pappos und dem Kosinussatz. Aber eine solche Erörterung würde uns hier von dem gesetzten Ziel ablenken, einen organischen Weg zum Pythagoras-Satz zu finden. Gelingt das vielleicht über den einfacheren Pappos-Satz?

7. Projektionen

In dem originellen Geometrie-Buch von BARTH (1964, S. 109) findet sich die linke Zeichnung im Kontext „affine Abbildungen“:

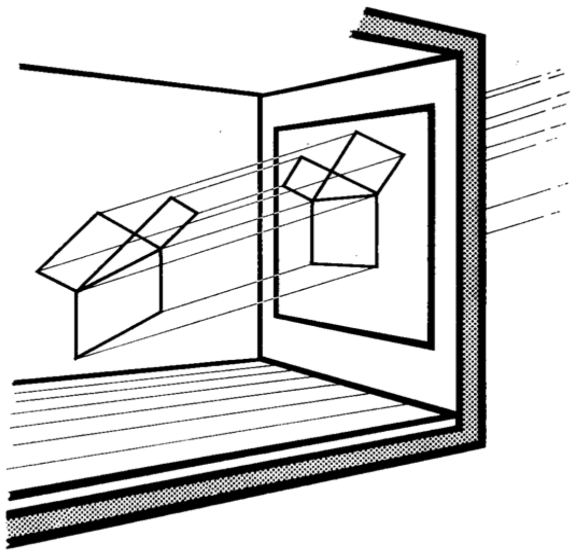


Abb. 32

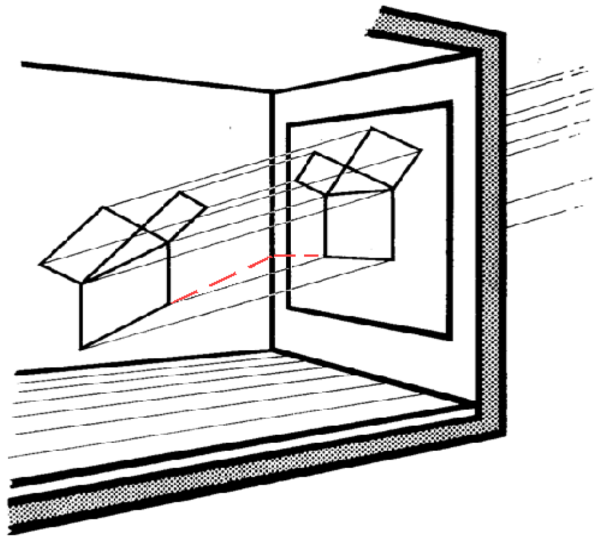


Abb. 33

Dabei wird ein Schattenwurf an der Hinterwand eines Zimmers dargestellt, den paralleles Sonnenlicht von einer Pythagoras-Figur auf dem Fenster erzeugt. (Offenbar wegen der Größensuggestion für das Zimmer ist die Szene – leider – in Zentralperspektive dargestellt, aber das soll uns jetzt nicht stören.) Der gestrichelte Streckenzug, den ich rechts an den Figurenunterkanten eingefügt habe, soll andeuten, dass man sich „Sonnenlichtebenen“ vorstellen mag, die die Seitenwand treffen und auf der Hinterwand die Figurenunterkante (oder auch vertikale Kanten) einrahmen. Solche Lichtebenen zeichnen offenbar parallele Schattenstrecken, wenn sie Parallelstrecken auf dem Fenster einrahmen. Parallelen gehen in Parallelen (oder Punkte) über. Und das reicht auch ohne Einführung in die Abbildungsgeometrie, um von Schülern das Bild in ein parallelprojiziertes Zimmer einzeichnen zu lassen. Der Schattenwurf besteht jedenfalls aus Parallelogrammen, und schon beim Freihand-Zeichnen entstehen genug Fragen, wie man Parallelen und Teilverhältnisse „richtig“ einzeichnet. (Zunächst reichen „fachmännische“ Auskünfte. Auf Fragen nach dem Wieso und Warum kann man getrost warten.)

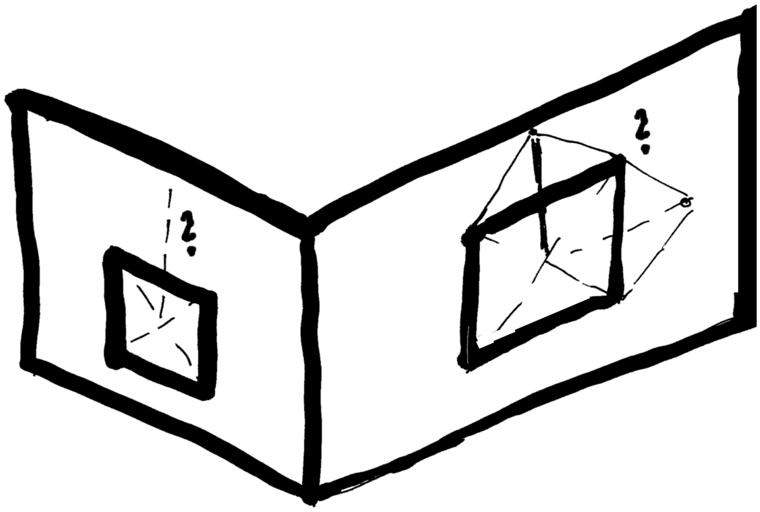


Abb. 34 – Wände mit dem „Haus des Nikolaus“ (Parallelprojektion)

Auch wenn man sich auf dem Fenster statt der allgemeinen Pythagoras-Figur nur die Menon-Konfiguration oder Nikolaus-Häuser vorstellt, ist das Schattenbild eine allgemeinere Parallelogrammkonfiguration. Und die ist ein Spezialfall der Pappos-Konfiguration. Die Vermutung, dass die Summeneigenschaft erhalten bleibt – auch wenn man mit dem PC die Projektionsrichtung und damit den Schattenwurf variiert –, liegt jedenfalls nicht allzu fern. Die Verallgemeinerung auf den allgemeinen Pappos-Satz auch nicht. Durch Spezialisierung folgt aus dem Pappos-Satz dann leicht und ungezwungen der Pythagoras-Satz.

Eine lehrerfreundlich unkomplizierte Software zu Demonstrationszwecken, die maßgerechte, aber dreh- und begrenzt schattierbare Konfigurationen im Stile der Darstellenden bzw. räumlichen Abbildungs-Geometrie ohne einschlägige Vorkenntnisse ermöglicht, ist mir derzeit nicht bekannt. Für einführende Schüleraktivitäten sind wohl ohnehin Freihand- oder auch Linealzeichnungen lehrreicher.

8. Warum soll „man“ sich für die Flächensumme interessieren?

Auch im vorigen Zugang über Schattenwürfe wird wieder die symmetrische Menon-Konfiguration vorausgesetzt. Warum sollte „man“, sollten gar „alle“ Schüler sich ausgerechnet für dieses merkwürdig erweiterte „Haus des Nikolaus“ interessieren? Am Beginn von Abschnitt 4 habe ich schon zwei Rechtfertigungen genannt. Leider ist die erste mit ihrem Bezug auf „die geometrische Algebra der Griechen“ historisch ziemlich wackelig und schülerfern, während die zweite doch vielen eher als künstlich aufgesetzt erscheinen mag, wenn sie der Vereinigung von Quadraten zu Quadraten keine fiktionale oder gar mystische Bedeutung zuschreiben möchten.

FREUDENTHAL (1979, S. 187 f.) empfiehlt folgenden Einstieg:

> Ich habe diese Sokratische Stunde zahllose Male wiederholt. Mit Variationen, und kürzlich ist mir die beste gelungen. Ein Quadrat – ein Taschentuch, auf dem

Tisch ausgebreitet – durch Falten halbieren. Es gelingt, fast ohne Hilfe, mit 7-8jährigen. Das Halbieren ist leichter als das Verdoppeln, da es innerhalb der Figur stattfindet; nachher geht es auch mit dem Verdoppeln einfach. Das Kind faltet natürlich erst seitenparallel. Nein, das ist ein Rechteck. Dann von allen Seiten zugleich einen Streifen, aber das ist ungenau. Und nach einigem Zögern schlägt es die Ecken des Taschentuchs zur Mitte. Das ist das halbe Quadrat. Warum? Man sieht es, ad oculos demonstriert, auch wenn es nur das geistige Auge ist.

In KROLL 1988 und in FÜHRER 2009 sind im Anschluss daran Wege beschrieben, wie man mit Verallgemeinerungen des Halbierens zu den Sätzen der Pythagoras-Gruppe bzw. zur Wurzelberechnung vorstoßen kann. Um ein Dreiviertel-Quadrat zu bekommen, kann z. B. das gefaltete Tuch erweitert werden (Doppelter falscher Ansatz zur Wurzelberechnung) oder das ausgebreitete Taschentuch neu gefaltet, und zwar durch Einklappen der Seiten (Höhensatz) oder durch Einklappen der Ecken ohne Rücksicht auf die Seiten (s. KROLL; „indischer Beweis“ des Pythagoras-Satzes).

halbiertes und Dreiviertel-Taschentuch

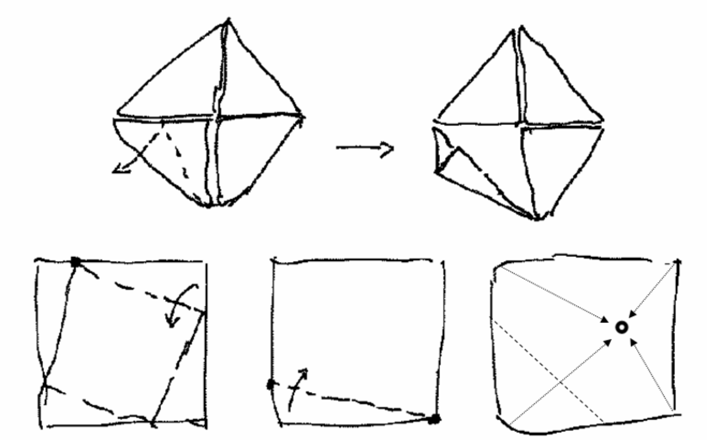
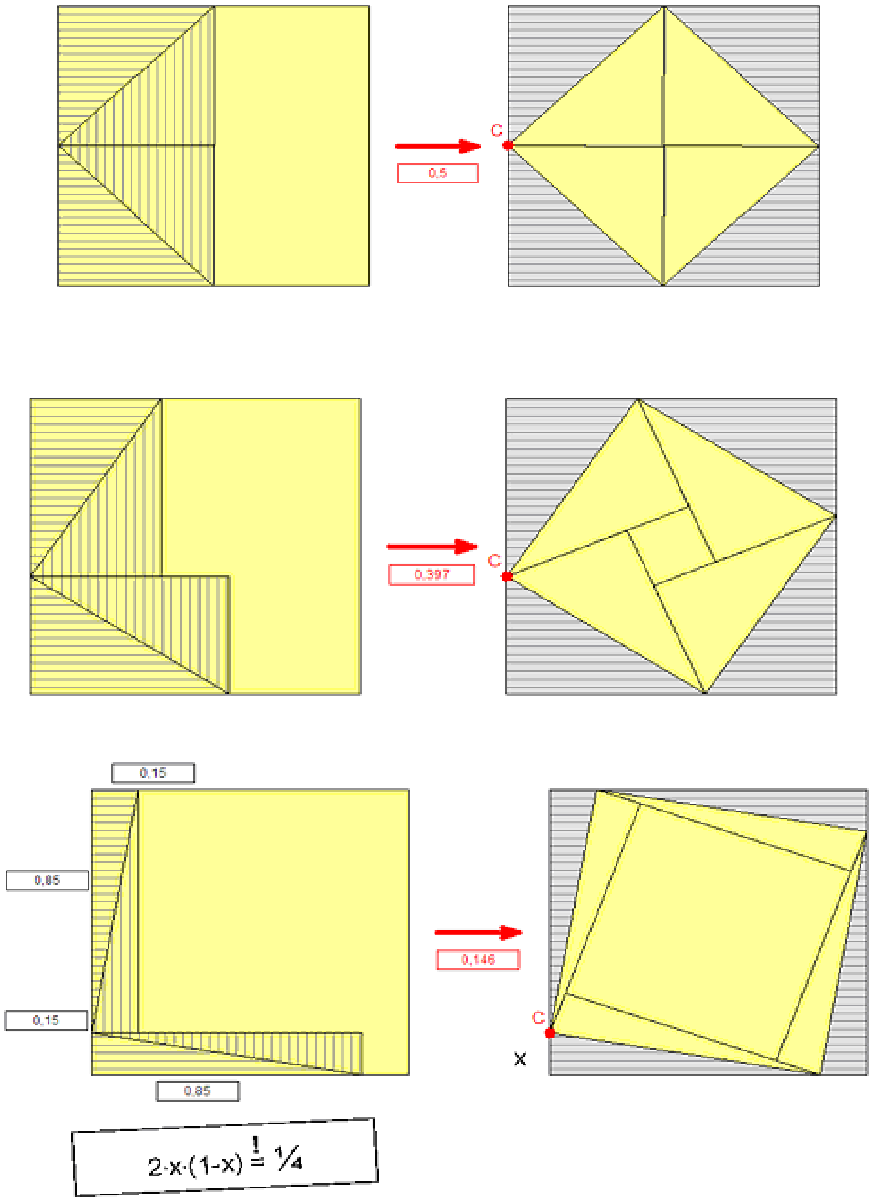


Abb 35

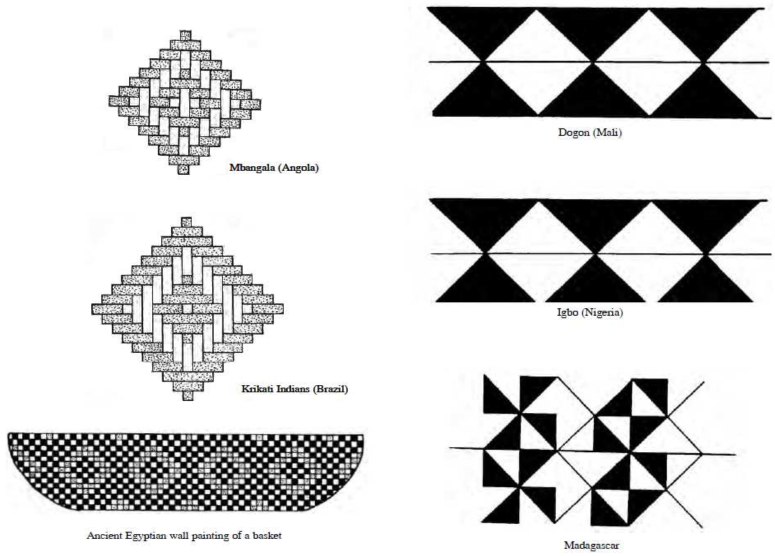
Wählt man wie KROLL das Ecken-Einklapp-Verfahren (links unten) für das Dreiviertel-Taschentuch und experimentiert dann mit einem DGS, so wird man die jeweils weggeklappten „Schwund-Dreiecke“ sammeln und darauf achten, den „Gesamtschwund“ möglichst gut auf 25% zu bringen. In den folgenden Versuchsreihen haben wir den „Schwund“ jeweils im Ausgangsquadrat („Taschentuch“) gesammelt.



<Abbn. 36-38 – Variationen zum Dreiviertel-Taschentuch, wobei im Ausgangsquadrat die jeweiligen Überstandsdreiecke gesammelt sind; frei nach KROLL 1988>

Ich will das hier nicht vertiefen, weil es die Frage nach einem originären Erkenntnisinteresse an der Menon-Figur bzw. der Flächenaddition auch nicht wirklich beantwortet.

Eine zumindest historisch einleuchtende Antwort fand ich in GERDES 1990/2003: Es ist durchaus denkbar, dass die Menon-Konfiguration zunächst unscheinbar als Teil von Ornamenten oder Flechtwerk-Mustern auftauchte und dann zu besonderen Verzierungen oder Wappengestaltungen herausgelesen wurde.



Ornamente und Flechtwerke

Abbn. 39 und 40 aus GERDES 2003, S. 129 und 133 f.

BERNAL (1970, S. 94 f.) macht jedenfalls geltend, dass beim Ursprung der Geometrie eher an Flecht- und Bauwerke oder Kultstätten zu denken ist als an Vermessungen nach Nilüberschwemmungen…

Einen historisch plausiblen Weg, den – sehr viel später – möglicherweise die pythagoreische Schule gegangen ist, besprechen wir in Abschnitt 10. Zunächst soll daran erinnert werden, dass die schulisch erreichbaren Anwendungen und auch die meisten funktionellen Sinngebungen des Pythagoras-Satzes (etwa Abstandsbestimmungen, Kreisberechnung, Stereometrie oder Metrik und inneres Produkt der Vektorgeometrie) weit überwiegend rechnerischer und nicht flächengeometrischer Natur sind:

9. Balken- und Leiteraufgaben

Als Teil der Kongruenzgeometrie, die ja von der Gruppe der Isometrien beherrscht wird, findet der Pythagoras-Satz hauptsächlich Verwendung, um Transversalstrecken aus orthogonalen Koordinaten zu umschreiben oder zu berechnen. Wie schon CLAIRAUT berichtete, erwärmen sich Schüler eher für weltliche Anwendungen als für höhere Einsichten. Aus dieser Sicht wäre der Flächensatz der Suche nach Abstandsbeziehungen im kartesischen Koordinatensystem nachzuordnen. So ganz aus der Luft gegriffen wäre das auch gar nicht: „Wegen der Möglichkeit, ein rechtwinkliges Dreieck aus zwei der Seitenlängen zu konstruieren, ist die Frage nach einem Zusammenhang zwischen den Seitenlängen beim rechtwinkligen Dreieck nahe liegend und daher gut motivierbar …“, schreibt FRAEDRICH (1995, S. 219). Allerdings hält sie jene Fragestellung für „viel zu offen“, weil kein Schüler „von alleine“ auf die Idee zu quadrieren kommen werde. Wäre das denn so schlimm? Und so chancenlos sehe ich schülerzentrierte Zugangsmöglichkeiten über Abstände auch gar nicht, wie ich unten erläutern möchte.

HOLLAND 1996 (S. 144 f.; Abbn. aus 2007, S. 150 f.; vgl. auch FRAEDRICH 1995, S. 257 ff.) beginnt das Thema „schräge Abstände im Koordinatennetz“ so:

Abstand zweier Punkte im Gitternetz, Satz des Pythagoras

1. Wie groß ist der Flächeninhalt der Vielecke? (Gitterabstand 1cm)
2. Wie lang ist die Quadratseite des Quadrates in c)? Benutze den Taschenrechner.

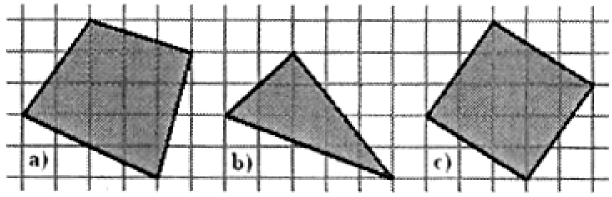


Abb. 41

Natürlich stehen die Beispiele a und b für viele, an denen alle Schüler in Still- oder Gruppenarbeit Strategien zur Flächenzerlegung und/oder -ergänzung erfinden sollen, d. h. im Wesentlichen: mittels Rückgriff auf die rechtwinkligen Koordinaten. Für die Quadratseite in Beispiel c muss natürlich irgendein Berechnungsverfahren für Wurzeln vorausgesetzt oder vorerst als Black Box genutzt werden, um aus der Flächen- eine Abstandsberechnung zu machen. Mit der nächsten Frage wird nun zur eigentlichen Ideenfindung „Umweg über ein Quadrat“ angeregt:

3. Wie lang ist die Strecke AB? (Gitterabstand = 1cm.) Beschreibe ein Verfahren, mit dem man die Länge einer Strecke im Gitternetz bestimmen kann.

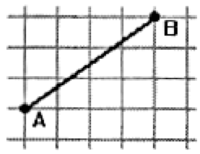
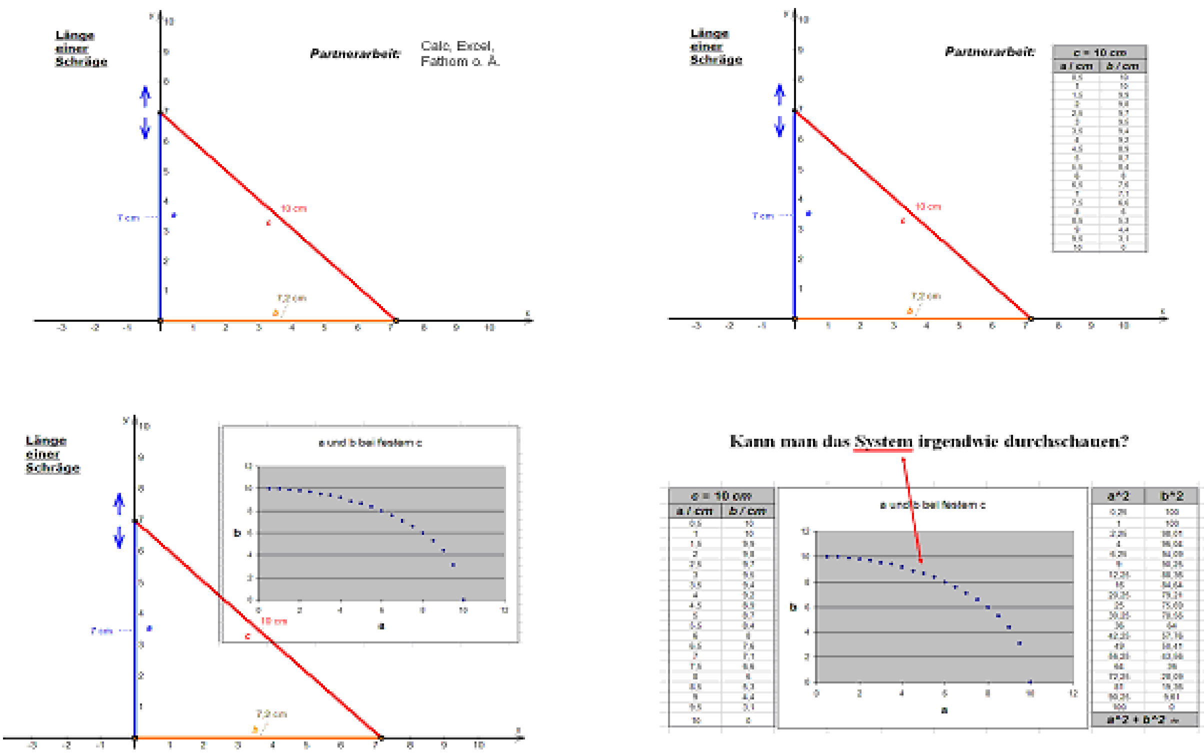


Abb. 42

Erwartet wird, dass „die“ Schüler nicht einfach nachmessen, sondern auf die Vorübung zurückgreifen. Sie sollen also von sich aus ein Quadrat über der Strecke konstruieren, dann mithilfe des bequemsten achsenparallelen Rahmens die Quadratfläche und mithilfe der Wurzeltaste die Streckenlänge berechnen (vgl. die Abbildungen aus JUNGE oben in Abschnitt 2). In weiteren Teilaufgaben wird das dann verbal ausformuliert und zur Pythagoras-Formel verallgemeinert.

Das ist zweifellos ein behutsamer Weg für den Unterricht – wenn man den scheinbaren Umweg über Flächenbestimmungen und die vorgängige Bereitstellung der Wurzelrechnung akzeptieren möchte. Es geht aber auch ohne dieses vergleichsweise schwere Geschütz, nachdem doch im vorangegangenen Normalunterricht gewöhnlich nur lineare Beziehungen vorgekommen waren und eigentlich erst die vielfältigen Anwendungen des Pythagoras-Satzes die Wurzelberechnung motivieren: Ich meine sogenannte Balken- oder Leiteraufgaben. Hier eine der nahe liegenden Varianten (in WINTER 1984 sind es Staßensteigungen, Wendeltreppen, Einparkprobleme und schiefe Brückenpfeiler; bei STAUFF 2011 geht es um eine Garagenauffahrt):

Leiteraufgabe



Abbn. 43 und 44

Was liegt näher als Excel oder Calc ein Diagramm zur Tabelle zeichnen zu lassen, wobei in aller Regel ungleiche Skalierungen auf den beiden Achsen besser zum Bildschirmlayout passen. Verbirgt sich hinter so einer Punktwolke evtl. „eine gekippte Parabel“, eine Wurzelfunktion oder harmloser gedacht: irgendeine Formel? Wer mag kann auch an Skalenstreckungen oder Regressionskurven denken. Erst bei gleichem Maßstab auf den beiden Achsen des Excel-Koordinatensystems verrät sich die Punktwolke als Teil eines Viertelkreises. Und was war dann wohl der zuvor ungleichmäßig gestreckte Graph? Aufmerksame Schüler entdecken das eine oder andere erfahrungsgemäß selbst und machen damit bei ihren Mitschülern Eindruck.

Hier dasselbe noch einmal in der aktuellen Version von GeoGebra, die auch Tabellen und Regressionskurven bietet:

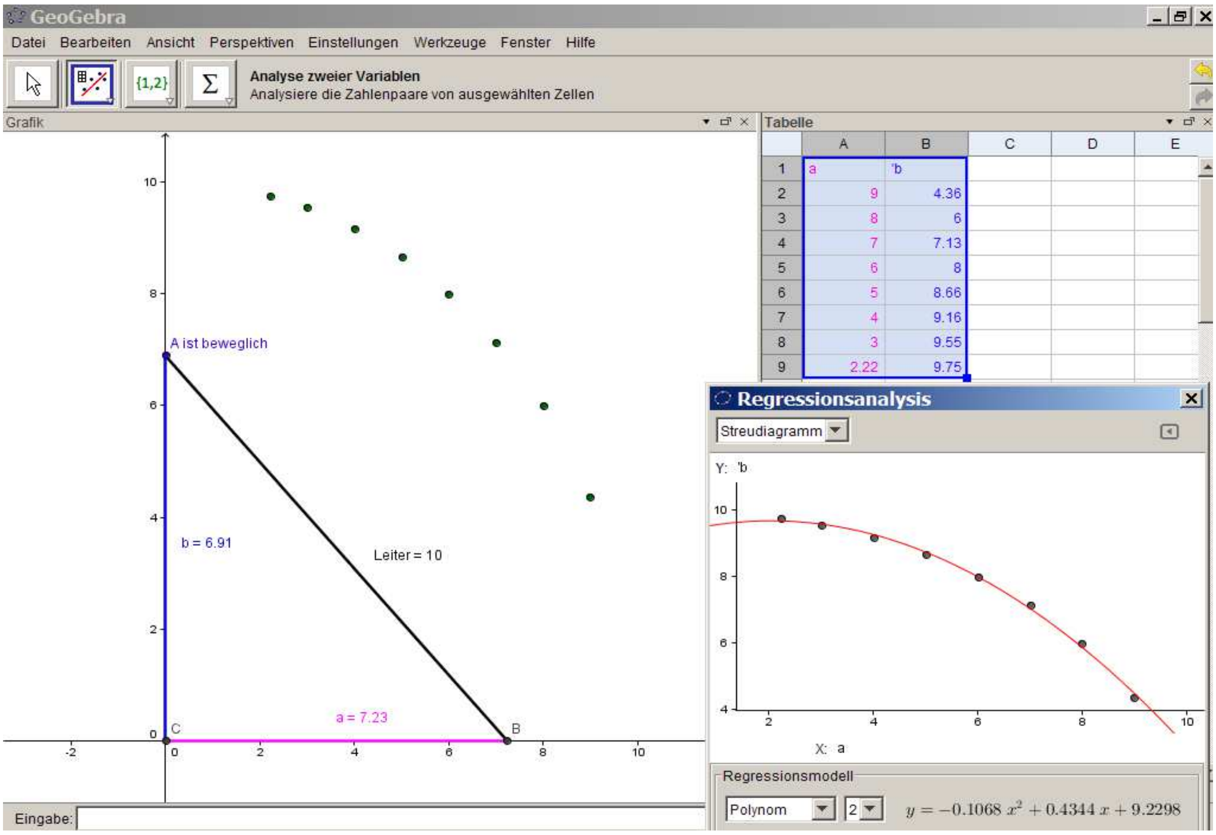


Abb. 45

Dass die Leiteraufgabe besonders viele Anwendungskontexte charakterisiert, zeigt auch die folgende Überlegung zur Einführung von Sinus und Kosinus:

Man denke sich am Fuß der Leiter den Winkel α und an der Spitze den Winkel β eingezeichnet. Oft möchte man nicht mit dem jeweils gemessenen oder bestimmten Winkel oder Bogen herumrechnen, sondern mit einer „irgendwie äquivalenten“ Strecke. Das leistet die „Sehstrecke zu α im Leiterdreieck“, d. h. die Projektion des Winkels auf die Gegenkathete des Leiterdreiecks. Damit die Leiterlänge keine wesentliche Rolle spielt, misst man die „Sehstrecke an der Gegenwand“ in Leiter-Einheiten. Da man in rechtwinkligen Koordinaten- oder Leiterdreiecken arbeitet, braucht man den Gegenwinkel β oft gar nicht. In den Tabellen- oder Berechnungswerken notiert man daher gleich beide Werte als sin α := *Gegenwand/Leiter* und cos α := *Nebenboden/Leiter*. (Hier zahlt sich die Leiterlänge 10 aus, weil sie lediglich eine Kommaverschiebung bewirkt.) Und den Leiteranstieg charakterisiert man durch die „Steigung“ tan α := *Gegenwand* : *Nebenboden*. (Es bietet sich an, einige der typischen Übungsaufgaben an (Hintergrund-) Figuren mithilfe eines „Leitermakros“ bearbeiten zu lassen. Dabei wird die „Leiter“ durch A und B vorgegeben, und die „Zimmerwand“ so durch C auf dem Thaleskreis über AB, dass der „Sehwinkel“ α passt.)

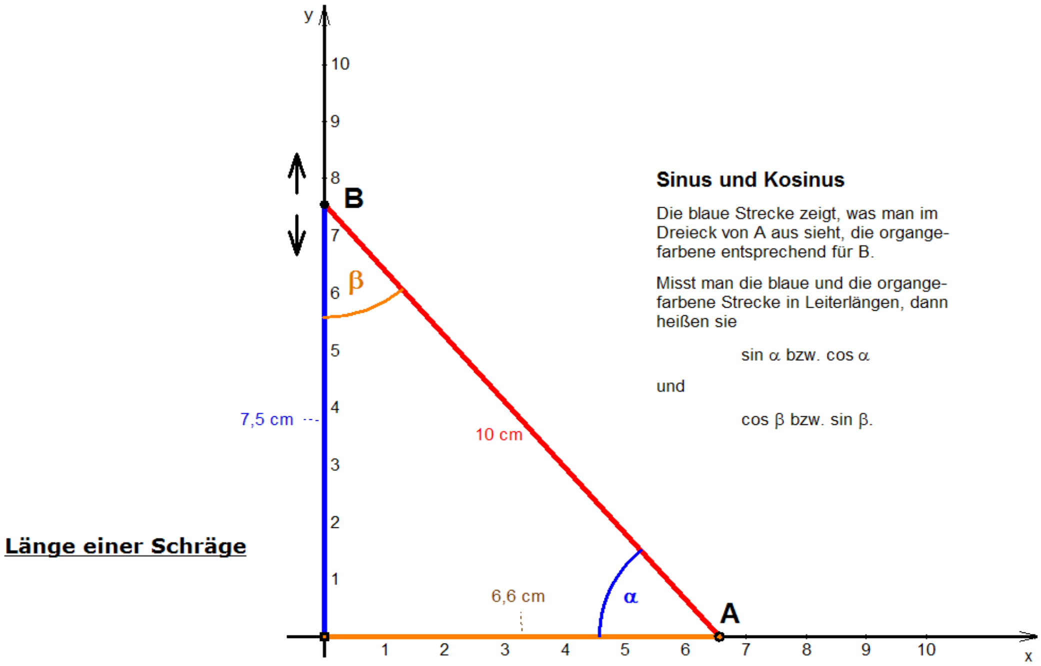


Abb. 46

In FRAEDRICH (1995, S. 182 ff. und 206 ff.) finden sich numerische Anläufe zum Kathetenbzw. Höhensatz. Auch die „Funktionsbetrachtungen“ in LIETZMANN (1953, Kap. VI), bei denen im Nachhinein alle Seiten des rechtwinkligen Dreiecks als Funktionen einer oder beider anderen Seiten gedeutet werden, können mit heutigen PC-Mitteln durchaus konstruktiv in empirische Entdeckungswege zur Pythagoras-Satzgruppe umgemünzt werden…

Ich gebe zu, dass anwendungsorientiert-experimentelle Zugänge, etwa über eine Leiteraufgabe, nicht den ganzheitlich-ästhetischen Reiz vieler Einstiege über Flächensummen haben. Aber Leiter- und Balkenaufgaben lösen Probleme, die mancher beim Tapezieren oder Dachausbau hautnah erleben kann. Und dieser Zugang ist – wie der nach ihm benannte Satz – ebenfalls sehr viel älter als der historische Pythagoras:

Balkenaufgaben

Berühmt ist die – auch in späteren Kulturen (ägyptisch-demotisch, chinesisch, europäische Renaissance) – sinngemäß wiederkehrende Aufgabe vom Balken, der an einer senkrechten Wand lehnt und dessen oberes Ende um ein Stück heruntergerutscht ist, Wie weit hat sich das untere Ende von der Wand entfernt? Im altbabylonischen Text BM 85 196 heißt es:

> *„Ein Balken (?) von der Länge 0; 30 (der gegen eine Mauer oder ähnliches steht) ist um 0;6 mit der Spitze herabgerutscht. Wie weit hat sich das untere Ende von der Wand entfernt?“*
> [Neugebauer 1935, Teil II, S. 47]

Die Lösung erfolgt mit Hilfe des Satzes von Pythagoras. Auch die andere Variante tritt in der seleukidischen Zeit auf: Gegeben sind die Rutschhöhe und die Entfernung von der Wand. Gesucht ist die Balkenlänge.

Abb. 47 – Zitat aus WUßING 2008, S. 135, unter Berufung auf NEUGEBAUER 1935

10. Der Menon-Fall bei den Pythagoreern

Beim soeben behandelten Thema Abstandsmessungen kommt dem Menon-Fall nicht die sonst favorisierte Rolle als Ausgangspunkt der Untersuchungen zu. Er erscheint von Anfang an als ein Fall unter vielen, der wegen seiner Symmetrie halt mit einem Näherungswert auskommt statt mit zwei. Erlaubt etwa die numerische Suche nach einem Weg zum Pythagoras-Satz auch eine plausible Entdeckungsgeschichte für den Menon-Fall? Der folgende Antwort-Versuch frei nach den (nicht unumstrittenen) Untersuchungen von SZABO 1969/1994 gibt wenigstens eine Zwei-Drittel-Antwort: Es lassen sich ernsthafte Gründe für ein besonderes Interesse an der Menon-Konfiguration angeben. Sie muss also nicht als Spielerei wie vermutlich das Haus des Nikolaus entstanden sein. Und ihre Deutung als Lösung des Verdopplungs- oder Halbierungsproblems für Quadrate ist ja offensichtlich. Aber die flächenhafte Menon-Konfiguration selbst ist schon aus altbabylonischer Zeit bekannt. Sie ist damit mehr als ein Jahrtausend älter als der historische Pythagoras und erst recht als Platons Menon. Die ursprünglichen Erkenntnisinteressen, die schon so früh zu ihrer Verewigung geführt haben mögen, bleiben uns deshalb wohl unzugänglich.

Bekanntlich greifen EUKLIDs „Elemente“ (ab dem V. Buch) sehr stark auf die Proportionslehre der pythagoreischen Schule zurück, und gewöhnlich schreiben die Historiker dieser Schule die ersten großen Bemühungen um eine systematische Wissenschaft zu. Zwar steht der berühmte Scherungsbeweis des Pythagoras-Satzes schon am Ende des ersten Buches der „Elemente“, also im Kontext der Kongruenzgeometrie, aber im Kontext der Proportions- und Ähnlichkeitslehre werden die drei ähnlichen Dreiecke hervorgehoben, die die einzige nichttriviale Höhe im rechtwinkligen Dreieck liefert (EUKLID I. § 47 bzw. VI. § 8). Es ist sehr gut möglich, dass EUKLIDs Anordnung systematische und keine historischen Gründe hatte. Proportionsstudien sind nachweislich sehr alt, und der Verhältnis-Beweis am geteilten rechtwinkligen Dreieck erscheint – jedenfalls vor diesem Hintergrund – weniger gekünstelt als der Kongruenzbeweis.

Nimmt man nun an, dass die systematische Untersuchung des Pythagoras-Satzes (in Europa) mit den bekannten Mitteln der pythagoreischen Schule anfing – und warum hieße der Satz sonst so –, dann ließen sich möglicherweise Zusammenhänge mit der pythagoreischen Musiktheorie, mit dem Studium figurierter Zahlen oder auch mit astronomischen Spekulationen finden. (Zur Einführung sehr empfehlenswert: LORENZEN 1960, §§ 8-10, S. 57 ff.) Zusammenhänge mit der Astronomie mag es sehr wohl gegeben haben. Immerhin dienten ja Gnomone in der Form von Schattenzeigern als früheste Winkelmesser für astronomische Beobachtungen (wie heute noch bei Sonnenuhren). Aber das verweist eher auf approximative und handwerkliche Kontexte, wie sie im vorigen Abschnitt besprochen wurden. Beides entsprach nicht dem aristokratischen Blick aufs Ganze, mit dem die Pythagoreer nach einer universellen Welterklärung suchten. Zudem ist die Geschichte der vorklassischen Beziehungen zwischen griechischer, ägyptischer und insbesondere sumerisch-babylonischer Mathematik sehr verwickelt und im Hinblick auf den Pythagoras-Satz bzw. -Beweis sehr undurchsichtig. Im folgenden konzentrieren wir uns deshalb auf mögliche Zusammenhänge zwischen den Anfängen der Musiktheorie, den figurierten Zahlen und der Menon-Konfiguration.

1. Nach SZABO tauchte zuerst in der Musiktheorie das „Problem des mittleren Tons“ auf. In der Proportionssprache und in heutiger Ausdrucksweise meinte das, eine Grundsaite der beliebigen Länge $2a$ nach einem Abschnitt x so abzuklemmen, dass der x-Abschnitt ebenso harmonisch mit der Grundsaite zusammenklingt wie mit ihrer Oktave, d. h. mit der halben Saite *a*, kurz: $2a : x = x : a$. Algebraisch betrachtet ist das die Gleichung für das Menon-Problem, und nach geometrischer Ausdrucksweise ist das geometrische Mittel zwischen $2a$ und a gesucht. Aber so kann man es nur sehen, wenn man einige sinnstiftende Kontexte missachtet: klingende Saiten, natürliche Zahlenverhältnisse statt Flächen und „Harmonie".

Zwischenbemerkung: In Proportionsgleichungen ausdrückbare Verhältnismäßigkeit wurde in antiker Tradition geradezu als *die* wissenschaftliche Übersetzung ästhetischer „Gerechtigkeit" aufgefasst, so z. B. in Aristoteles' Nikomachischer Ethik bei der „distributiven Gerechtigkeit", wo es um Rechtsbegriffe der Güter-, Waren- und Geldverteilung geht. Während man heute „*wohlproportioniert*" allenfalls noch ironisch gebraucht, hatte Proportioniertheit sehr lange einen noch stärkeren Konnotationsreichtum als heute etwa das englische Wort „*fairness*". Von Vitruv über Matthäus Roriczer's *Büchlein von der fialen Gerechtigkeit* (1486), einem der wenigen zeitgenössischen Fachbücher der spätgotischen Baukunst, bis zu da Vincis und Dürers Proportionsstudien ging es um ästhetische, anatomie-, werk- oder auch funktions„gerechte" Gestaltung. (Le Corbusier hat das Thema Mitte des 20. Jahrhunderts mit seinem „*Modulor*" wieder aufgegriffen.) In Rousseaus *Contract social* (1762), immerhin eines der grundlegenden Werke des modernen Demokratieverständnisses, wird am Beispiel $10\,000 : x = x : 1$ erläutert, wie groß eine angemessene Staatsregierung für ein Gemeinwesen mit 10 tsd. Bürgern zu wählen wäre. Und in der Gründerzeit der modernen Wirtschaftstheorie löste Johann Heinrich von Thünen im zweiten Teil seines *Isolierten Staates* (1850) einige Diskussionen in Fachkreisen aus, indem er den „*natürlichen Arbeitslohn*" l als geometrisches Mittel zwischen dem notwendigen Lebensunterhalt a des Arbeiters und dem Wert p seiner Erzeugnisse definierte, d. h. $p : l = l : a$.

„Harmonie" war zweifellos die stärkste der Konnotationen der Idee des „mittleren Tons", denn die frühe Musiktheorie hatte – mit bis heute anhaltendem Erfolg – angenehme Zusammenklänge als Längenverhältnisse $a : b$ an gezupften Saiten qualifizieren können, die nur harmonisch klangen, wenn sie sich in ganzzahligen Verhältnissen beschreiben ließen, und umso angenehmer je kleiner die benötigten Zahlen waren. Experimente mit Verhältnissen von kleinen natürlichen Zahlen werden sehr rasch gezeigt haben, dass der „Mittelton" ein überraschend schwieriges Problem darstellt.

2. Die eindruckvolle Musiktheorie legte natürlich das Studium ganzer Zahlenverhältnisse nahe, und damit Anfänge der Zahlentheorie. Das ursprünglich ästhetische Erkenntnisinteresse dieser Forschungen führte dabei zwanglos auf Zahlenmuster, „figurierte Zahlen", in denen die jeweils beteiligten Zahlen als Ansammlung von Einheits-Steinchen oder -Marken ausgelegt werden konnten.

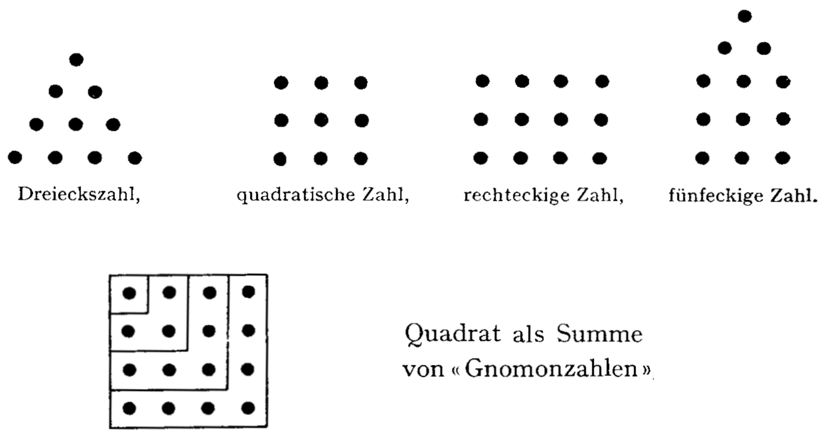


Abb. 48 aus VAN DER WAERDEN 1966, S. 162 f;
die Figur ganz rechts könnte man als „Haus des Nikolaus" sehen.

Damit war ein anschauliches Entdeckungswerkzeug für diverse Zahl- und Verhältnisstrukturen gewonnen, und zugleich ein logisch zwingender Argumentationsstandard (vgl. etwa BECKER 1964/1975, PICHOT 1995, SZABO 1969, VAN DER WAERDEN 1966/1979). Sobald sich diese Untersuchungen über die Bedingung „möglichst kleine Proportionsglieder" hinwegsetzten (s. z. B. LORENZEN 1960, § 9, S. 62 ff.; VAN DER WAERDEN 1966, S. 158), und damit akustisch auch über alle Schwebungsprobleme, konnte versucht werden, Proportionsgleichungen vom Typ $a : b = x : c$ und so auch das kritische Proportionsproblem $2a : x = x : a$ mithilfe immer größerer a lösbar zu machen. Dabei konnte leicht der Gnomon-Satz für figurierte Rechtecke entdeckt werden (s. o., Abschn. 6), und damit die Äquivalenz des kritischen Problems mit der Quadratur des 2:1-Rechtecks $2a^2$. Aber dessen Auflösung gelang leider nur teilweise:

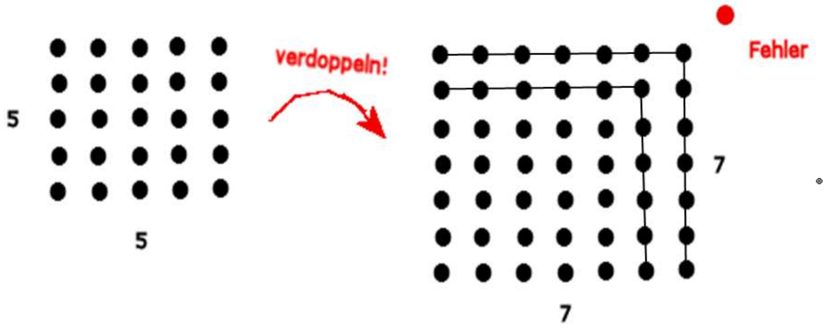


Abb. 49

Auf der Suche nach ganzzahligen Lösungen (a, d) von $2a^2 = d^2$ wird man wohl erst einmal eine Tabelle von Quadratzahlen i^2 ($i = 1, …., n$) durchmustert haben. (Mit den Variablennamen a und d bin ich SZABO gefolgt, um den Literaturvergleich zu erleichtern. Man beachte aber, dass natürliche Zahlen gemeint sind und dass von Quadratdiagonalen vorerst gar nicht die Rede ist – s. u., Punkt 4.) War dabei z. B. n so bemessen, dass gerade alle Kandidaten für a bis 30 erfasst wurden, d. h. dass mit $2a^2$ gerade noch $2{\cdot}30^2 = 1800$ überschritten wurde ($n = 43$), dann fand sich in der Tabelle – zunächst wohl höchst enttäuschend – gar kein Lösungspaar (a, d). Wie lang man auch die Tabelle machte, es tauchten bestenfalls ***Fast-Lösungen*** auf, bei denen wenigstens d^2 ***neben*** $2a^2$ lag ($d^2 = 2a^2 \pm 1$). Und auch das nur ab und zu. In der Tabelle bis $n = 43$ Quadratzahlen fanden sich nur die Fast-Lösungen (5; 7), (12; 17) und (29, 41) sowie – etwas bürokratisch gesehen – die trivialen Fälle (1; 1) und (2; 3). Was nun?

Noch größere Tabellen anzulegen dürfte damals wenig Vergnügen gemacht haben. Konnte man vielleicht raten, wie die nächste Fast-Lösung aussah? Nun, $5 + 7 = 12$, $12 + 17 = 29$, $1 + 1 = 2$, und nicht nur das: $7 + 2{\cdot}5 = 17$, $17 + 2{\cdot}12 = 41$ und auch $1 + 2{\cdot}1 = 3$. In heutiger Ausdrucksweise schien die Weitersuche mit dem Algorithmus

$$a_{neu} := a + d\,, \quad d_{neu} := d + 2a$$

empfehlenswert. (Nach PICHOT 1995, S. 348 ff., wurde dieser Algorithmus von Theon von Smyrna im 2. Jh. n. Chr. überliefert; nach SZABO 1994, S. 202 bzw. 205 findet er sich beim Platon-Nachfolger Proklos im 5. Jh. n. Chr. SZABO gibt auch eine Tabelle mit den ersten acht Fast-Lösungen nach diesem Algorithmus. In den Anmerkungen zu EUKLID, S. 426, erkennt C. THAER das Verfahren in Euklid II.10. Zur möglichen historischen Herkunft und Analyse finden sich bei ihm jedoch kompliziertere Überlegungen anhand schwacher Quellen, auf die ich hier nicht eingehen möchte.)

Mithilfe figurierter Zahl-Verwandlungen hat man sich vielleicht sogar davon überzeugt, dass der Algorithmus aus (a; d) mit $d^2 = 2a^2 \pm 1$ immer wieder eine Fast-Lösung macht. Die folgende Abbildung skizziert eine nahe liegende Idee (man stelle sich mehrmals irgendwelche Quadrat- bzw. Rechteckszahlen aus konkreten Fast-Lösungen (a, d) vor).

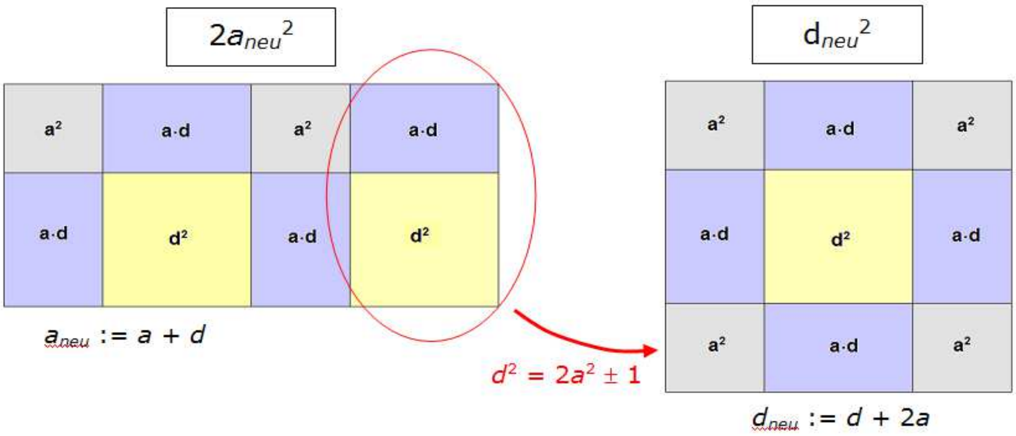


Abb. 50

Da man den Algorithmus auch rückwärts ausführen kann, d. h. (a_{neu}, d_{neu}) $\rightarrow$ (a, d), konnte es auch gar keine anderen Fast-Lösungen geben.

3. Das mag den gewiss vorher schon oft geäußerten Verdacht zur Vermutung erhärtet haben, es könne gänzlich unmöglich sein, das Harmonieproblem $2a : x = x : a$ zu lösen. Vielleicht konnte man gar die Unlösbarkeit des Ausgangsproblems einsehen! Erst als dieser ungeheuerlich anmaßende Gedanke ernst genommen wurde, drängte sich im Kontext der figurierten Zahlenverhältnisse der aus EUKLID bekannte Beweis mit Teilbarkeitsüberlegungen geradezu auf (vgl. dazu auch JAHNKE 1983). – Dass die hartnäckig vergebliche Lösungssuche zu scheinbar anschaulichen Problemen keineswegs direkt zum Gedanken an einen Unmöglichkeitsbeweis führt, hat der Problemkreis „Klassische Konstruktionsprobleme – Gleichung dritten Grades – komplexe Zahlen – Transzendenz von π“ geradezu dramatisch zeigt. Ein weiteres Beispiel gibt die Geschichte des Parallelenproblems. Dort waren Paradigmenwechsel zur „modernen Algebra“ bzw. zur nichteuklidischen und Grundlagen-Geometrie nötig. Durchaus ähnlich, wenn auch zunächst noch in kleinerem Maßstab, könnte es bei den Quadrat- und Rechtecksfiguren gewesen sein. Schließlich sollte das zur Entdeckung irrationaler Streckenverhältnisse führen (s. u., Punkt 5).

4. Man beachte nun, dass damit das Harmonieproblem im Kontext Musiktheorie-Zahlenfiguren vollständig gelöst war – wenn auch negativ. Auf die Idee zu kommen, das ganze nicht nur unter dem „Anzahl-Figuren-Aspekt“, sondern auch einmal unter dem „Maßzahl-Aspekt“ anzuschauen, erforderte eine völlige Änderung des Problemverständnisses, d. h. einen „Paradigmenwechsel“. (Vgl. z. B. SZABO 1994, S. 196.) Es nützt ja gar nichts, in den beiden Steinchenmustern, mit denen ich oben die Näherungslösung für das 2×5-Problem illustriert habe, statt der Seiten die Quadratdiagonalen hervorzuheben, denn beide enthalten gleich viele Steinchen. Dass die Diagonale von anderer Natur sein könnte, ist an Steinchen-Mustern nicht zu erkennen. Dazu bedurfte es einer erheblichen Umstrukturierung der Problemsicht. Wie schwierig das war, kann vielleicht die folgende Proklos-Stelle ahnen lassen: „Es seien nun gegeben zwei Einheiten, die eine als Seite-Einheit, die andere als Diagonale-Einheit... In diesem Fall ist (das Quadrat der sagbaren Diagonale) um die Einheit kleiner als das doppelte (Quadrat der Seite).“ (Aus SZABOs Zitat 1994, S. 201. – Es gibt übrigens Vermutungen, dass beim Pyramidenbau Schrägen mit einer anderen Elle gemessen wurden als Horizontale und Vertikale.)

Man bedenke zudem, dass der Maßzahl-Kontext vielleicht erst seit der Industrialisierung des 19. Jahrhunderts samt Übernahme des metrischen Systems so dominant und allgegenwärtig wurde, wie wir es heute gewohnt sind. (SZABO erklärt den Paradigmenwechsel nicht.)

5. Schaut man die Illustration der Näherungslösung für das 2×5-Problem unter dem Maßzahl-Aspekt an, dann ergibt sich etwa folgendes Bild:

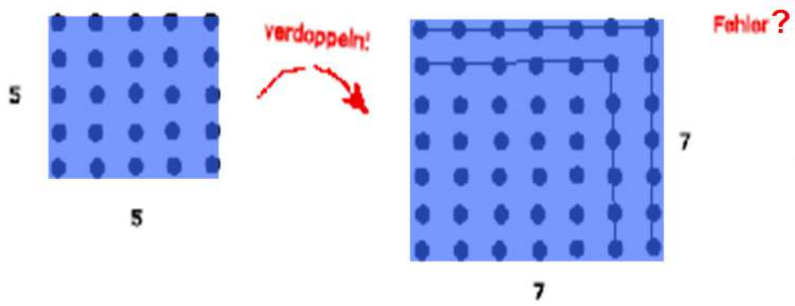


Abb. 51

Die Punkte sind verschwindend klein zu denken, und der dem 7×7-Quadrat fehlende 50. Punkt ist als sehr dünner Winkelhaken (Gnomon) z. B. rechts und oben an dieses Quadrat zu denken (was dann zum sog. Heron-Verfahren einladen mag, s.u.). Blendet man das Punktmuster ganz aus, dann haben wir das Problem der Flächenverdopplung oder – rückwärts gelesen – der Flächenhalbierung. Dessen Lösung ist, wenn es denn erst einmal erkannt und ernst genommen wird, kinderleicht – wie wir in Abschnitt 8 gesehen haben.

„Die [Strecken- und Flächen-] Geometrie hat sozusagen Wunder gewirkt. Man wusste aus der Arithmetik, dass es zwischen zwei nicht-ähnlichen Flächenzahlen keine mittlere proportionale Zahl gibt; und dennoch konnte man mit einer Art Flächengeometrie eine Strecke finden, die so aussah, als wäre sie die mittlere Proportionale – auch zwischen zwei nicht-ähnlichen Flächenzahlen, d. h. also, als ob diese nicht-ähnlichen Zahlen [geometrisch-] ähnlich geworden wären." (SZABO 1994, S. 251) Indem so Verhältnisüberlegungen in die Figuren-*Geometrie* getragen waren, war es jetzt auch gar nicht mehr weit zum klassischen Irrationalitätsnachweis für die Quadratdiagonale mittels Wechselwegnahme. Und das hat ja nun in der Tat zu einem großen Pradigmenwechsel geführt. – Wegen der Ähnlichkeit aller Quadrate konnte man die oben erwähnte Tabelle der ersten 8 Näherungen nach dem Theon-Proklos-Algorithmus aus der neuen Maßzahl-Sicht (und mit z. B. babylonischer Sexagesimalbruchrechnung) ganz anders interpretieren, nämlich als Verfahren zur schrittweisen Näherung an $\sqrt{2}$ mittels $d : a$. Aber so etwas kam wohl erst später, in hellenistischer Zeit infrage. (In Dezimalbruchdarstellung würde die 8. Approximation den Fehler von ${}^{577}/_{408} - \sqrt{2} \approx 2 \cdot 10^{-6}$ liefern. Vgl. PICHOT 1995, S. 348 ff., SZABO 1994, S. 203.)

6. Gewiss noch aus dem verblassenden Kontext der Musiktheorie stammten Versuche, mit Mittelwerten weiter zu kommen. In der Proportion $a : x = x : b$ ist x (nach heutiger Sprechweise) das geometrische Mittel (weil es das Quadratur-Problem für das Rechteck löst). Aber dieses „Mittel" entzog sich ja zu oft allen Berechnungen. Andere „Mittelwerte" wie

$$\overline{ar} := \frac{a+b}{2} \text{ und } \overline{har} := \frac{\overline{geo}^2}{\overline{ar}} = \frac{2ab}{a+b}$$

waren dagegen ganz leicht berechenbar. Gab es nicht irgendeinen überschaubaren Zusammenhang? Der Pythagoreer Archytas entdeckte einen: Die beiden leichten Mittelwerte approximieren den schweren, d. h.

> Die Proportionsgleichung $a : x = x : b$ bzw. $a \cdot b = x^2$ kann schrittweise immer besser gelöst werden, wenn man
>
> $x^2 = \overline{ar} \cdot \overline{har} =: y \cdot z$ setzt und mithilfe
>
> $\overline{ar_{neu}} := \overline{ar(y,z)}$ bzw. $\overline{har_{neu}} := \overline{har(y,z)}$
>
> solange verbessert wie man will.

(Vgl. etwa PICHOT 1995, S. 345 und 348.)

> **„Heron"-Algorithmus:**
>
> Gegeben sei das Rechteck *ab*. Um es wenigstens annähernd in ein Quadrat x^2 zu verwandeln, nehme man ein flächengleiches Rechteck mit einer Seite $\overline{ar}$ zu Hilfe. Die andere muss dann $y := \overline{har}$ sein. Und das kann man wiederholen.

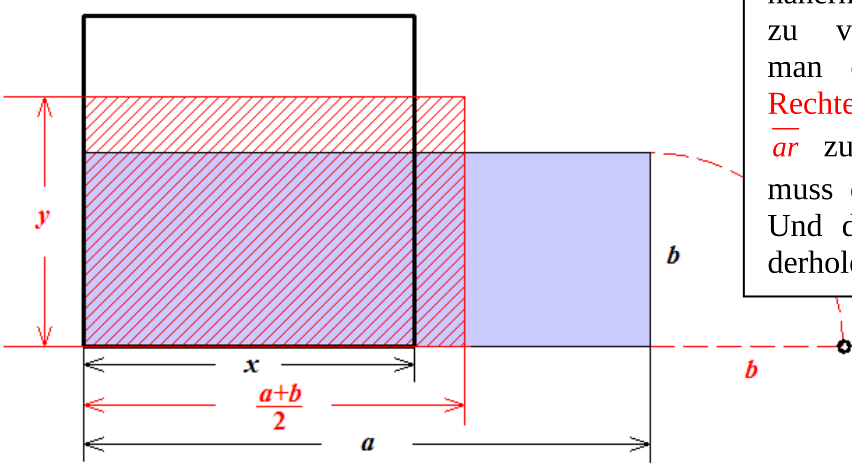
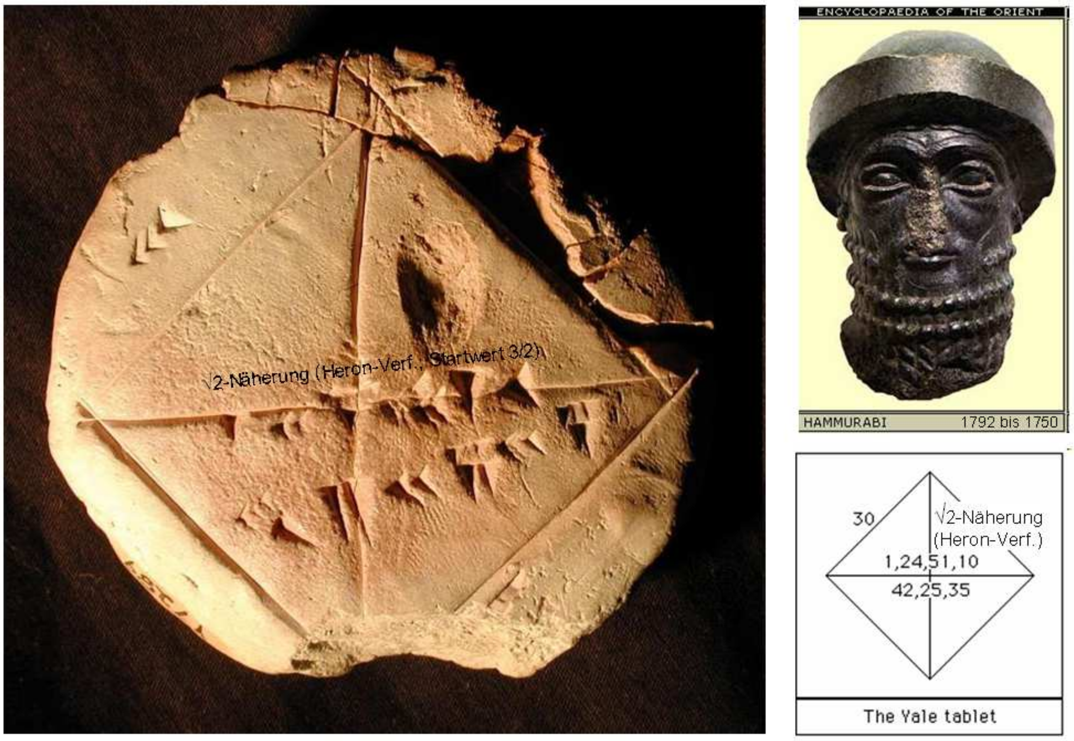


Abb. 52

Für $a := 2$, $b := 1$ und folglich 2 als Quadrat des geometrischen Mittels ergibt das zunächst das Näherungspaar ($^3/_2$; $^4/_3$) und im zweiten Schritt schon ($^{17}/_{12}$; $^{24}/_{17}$) ≈ (1, 417; 1,412) statt 1,414. Nutzt man den Bezug zwischen geometrischem und harmonischem Mittel aus, so haben wir vor uns den sog. „Heron"-Algorithmus. Nur dass Heron im 1. Jh. vor oder nach Chr. lebte und Archytas im 4. Jh. vor Chr. Nach NEUGEBAUER/SACHS 1945 enthält freilich die altbabylonische Tafel YBC 7289 in der Menon-Figur eine Näherungsangabe für √2, die ebenfalls nach dem Heron-Algorithmus berechnet worden sein dürfte, der also noch einmal mindestens eintausend Jahre älter war.



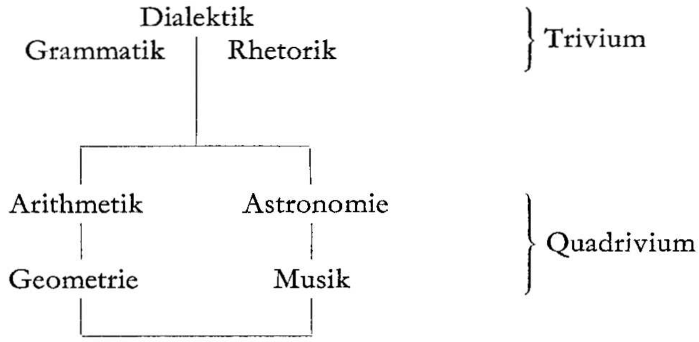
http://www.egyptorigins.org/ybc7289-1-medium.jpg http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Diagrams/Yale.gif
Vgl. van der Waerden 1966, S. 71-74

Abb. 53

7. Der Maßzahlaspekt entlarvte wunderbare oder auch erschreckende Zusammenhangsdetails, das aber um den Preis einer flächenhaften Sichtweise, die von den eher linearen oder gar numerischen Anwendungzwecken und von hässlichen Schwebungsproblemen ablenkte, also von den ursprünglichen Erkenntnismotiven. So erscheint es als geradezu tröstliche Pointe dieser historisch-genetischen Rekonstruktionsgeschichte, dass die flächengeometrische Sichtweise zwar Seinsgründe für die besonderen Beziehungen des rechtwinkligen Dreiecks zum musikalisch-geometrischen Mittel und damit zur Proportions- und zur Ähnlichkeitslehre geliefert hat, dass aber der Nutzen des Pythagoras-Satzes nach wie vor im arithmetisch-numerischen Umgang mit Längen und Abständen verblieb – und im Wohltemperierten Klavier.

Für uns ist die ganze Problematik des Tonsystems fast nur noch eine ästhetische Angelegenheit, sie hat nichts mehr mit dem Wahrheitsanspruch exakter Wissenschaft zu tun. Dieser Wandel ist vor allem darauf zurückzuführen, daß die pythagoräische „Religion“ (mit ihrer Lehre der Erkennbarkeit des Göttlichen durch Zahlverhältnisse) sich in einer christlich gewordenen Kultur nicht halten konnte. Der jüdisch-christliche Gott kann nicht erkannt werden, er offenbart sich — und er ist nicht Prinzip der Rationalität, der Vernunft, sondern Person, Wille.

Obwohl das Mittelalter getreulich alles, was es aus der Antike gerettet hatte, bewahrt hat, kam es doch immer mehr dazu, daß in dem System der sieben freien Künste, allegorisch dargestellt als dreispänniger „Wagen der Weisheit“



die Musik von den zahlbezogenen Fächern des Quadriviums zu den wortbezogenen Fächern des Triviums überwechselte. Wir haben so in der Geschichte der Musiktheorie ein besonders deutliches Beispiel dafür, wie auch das, was jeweilig Gegenstand exakter Wissenschaft ist, abhängig von der gesamten geistigen Situation der Zeit ist.

Abbn. 54-57 aus LORENZEN 1960, S. 68 f.

Die sehr nahe liegenden Möglichkeiten, auf einem PC mit Touch-Screen oder auf größeren Geo-Boards den skizzierten Weg über Monochord-Studien und figurierte Zahlen gewissermaßen „spielerisch“ nachentdecken zu lassen, brauche ich hier nicht zu erläutern. Auch nicht die Nachentdeckung von Wurzel-Algorithmen und ihren Konvergenzgeschwindigkeiten. Dass man gute Gründe hätte, Schülern diese Zeit zu gönnen, ist wohl offensichtlich geworden. Es hieße freilich, Wege zu Zielen machen und mit dem Cash Value warten. Das klingt heute wohl etwas nostalgisch, ist vielleicht aber auch Zukunftsmusik. Denn es kommt erfahrungsgemäß wieder, mit dem nächsten Paradigmenwechsel der Bildungspolitik, samt der ihr dann (zuge-) hörigen Mathematikdidaktik…

Literatur:

ARTMANN, BENNO: Der Satz von Pythagoras als Paradigma für Mathematik. Mathematik in der Schule 32.6 (1994), S. 343–358.

BARTH, CONRAD: Geometrie – vom Beruf her (für Berufsaufbauschulen). Hannover: Schroedel 1964.

BAPTIST, PETEr: Pythagoras und kein Ende. Stuttgart: Klett 1997.

BECKER, OSKAR: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Freiburg/München: Alber 1964 (zit. n. der seitengleichen Suhrkamp TB-Ausgabe 1975).

BEHREND, FELIX; MORGENSTERN: Elemente der Mathematik – Form und Abbildung. Breslau: Hirt 1932.

BERNAL, JOHN DESMOND: Wissenschaft – Science in History, Band 1. Reinbeck: Rowohlt 1970.

CHASLES, MICHEL: Geschichte der Geometrie. Übers. Sohnke 1839 (Frz. Orig. 1837). Online am 13.06.2011 unter: M. Chasles - 1839 - books.google.com

CLAIRAUT, ALEXIS-CLAUDE: Elements de Geometrie. 1741. (Die deutsche Übersetzung von F. I. Bierling aus dem Jahre 1773 konnte am 27.05.2011 online eingesehen werden unter http://libcoll.mpiwg-berlin.mpg.de/elib/all_documents?searchSimple=Clairaut)

DOHRMANN, CHRISTIAN: Touch2learn. Vortrag im Oberseminar Südwest. Landau 29.03.2011.

EUKLID: Die Elemente. (Ausg. Thaer) Darmstadt: Wiss. Buchges. 1980.

FISCHER (Vorname unbek.): Beiträge zum geometrischen Unterrichte. In: Einladung zur öffentlichen Prüfung der Schüler des Gymnasiums, der Realklasse und der Vorschule zu Guben. 1869.

FISCHER, ALOIS: Ziel, Methoden und Prinzipien im mathematischen Unterricht. In: ZfmnU 55 (1924), S. 1-11.

FLACHSMEYER, JÜRGEN: Pythagoreische Zahlentripel und Origami. (Online am 9.06.2011 unter:) http://www.math-inf.uni-greifswald.de/pythori_b.pdf

FRAEDRICH, ANNA M.: Die Satzgruppe des Pythagoras. Mannheim: BI 1995.

FREUDENTHAL, HANS: Konstruieren, Reflektieren, Beweisen in phänomenologischer Sicht. In: Dörfler, W.; Fischer, R. (Hg.): Beweisen im Mathematikunterricht. Wien/Stuttgart: hpt/Teubner 1979, S. 183-200.

FÜHRER, LUTZ: Vom Begründensollen zum Vermutenwollen. In: Ludwig, M.; Oldenburg, R.; Roth, J. (Hg.): Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht. Hildesheim: Franzbecker 2009, S. 167-188.

GERDES, PAULOS: Ethnogeometrie. Kulturanthropologische Beiträge zur Genese und Didaktik der Geometrie. Bad Salzdetfurth: Franzbecker 1990.

GERDES, PAULOS: Awakening of Geometrical Thought in Early Culture. Minneapolis: MEP Publications 2003. (Überarbeitete Übersetzung von Gerdes 1990. Online unter: http://homepages.spa.umn.edu/~marquit/gerdes.pdf .)

GERICKE, HELMUT: Mathematik in Antike und Orient. Wiesbaden: Fourier 1992.

HEINEMANN, K.: Die naturgemäße Einführung in einen geometrischen Lehrsatz, gezeigt am pythagoreischen. In: Deutsche Blätter für erziehenden Unterricht. Band 13, Heft 15 (1896), S. 399-402.

HENRICI, JULIUS; TREUTLEIN, PETER: Lehrbuch der Elementar-Geometrie, 1. Teil. Leipzig: Teubner 1881.

HÖFLER, ALOIS: Didaktik des mathematischen Unterrichts. Leipzig/Berlin: Teubner 1910.

HOLLAND, GERHARD: Geometrie in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum (2. Aufl.:) 1996; Hildesheim: Franzbecker (3. Aufl.:) 2007.

IWAMOTO, TAKAYA: Many Proofs of Pythagorean Theorem (Text a; Online am 9.06.2011:) http://www.takayaiwamoto.com/Pythagorean_Theorem/Pythagorean_Theorem.html

IWAMOTO, TAKAYA: Origami Solution of the Delian Problem. (Text b; Online am 9.06.2011:) http://takayaiwamoto.com/Greek_Math/Delian/Haga_Delian.html

JAHNKE, THOMAS: Wir suchen eine Quadratzahl, deren Doppeltes wieder eine Quadratzahl ist. In JMD 4 (1983), S. 163-170.

JUNGE, G.: Zur Einführung in den Satz von Pythagoras. In: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft 12 (1906), S. 30-32.

KASAHARA, KUNIHIKO: Origami – figürlich und geometrisch. München: Augustus-Verlag 2000. (Vgl. z. B. auch http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=710 oder http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf .)

KLEIN, FELIX: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. II. Band: Geometrie. Berlin: Springer 1925.

KNABE, PAUL: Die Satzgruppe des Pythagoras. In: Wolff, G. (Hg.): Handbuch der Schulmathematik, Band 3: Geometrie der Unter- und Mittelstufe, Teil I, Abschnitt B 4.8.3. Hannover/Paderborn:

Schroedel/Schöningh (2. Aufl.:) 1967, S. 54-58.

KOSHIRO, HATORI: How to Devide the Side of Square Paper. Online am 13.06.2011 unter: http://origami.gr.jp/Archives/People/CAGE_/divide/02-e.html

KROLL, WOLFGANG: Das gefaltete Taschentuch. In: Mathematik lehren 28 (1988), S. 28-29.

LIETZMANN, WALTHER: Der pythagoreische Lehrsatz. Leipzig: Teubner 1917. (7. Aufl. 1953)

LORENZEN, PAUL: Die Entstehung der exakten Wissenschaften. Berlin u. a.: Springer 1960.

VON MAJEWSKI, HARALD: Ein problemorientierter Weg zum Höhensatz. In: PM 1983, H. 11. (Dort auch am Ende weitere Aufsätze zum Thema in früheren PM-Heften.)

NEUBRAND, JOHANNA: Japanischer Unterricht aus mathematikdidaktischer Sicht. In: Mathematik lehren 90 (1998), S. 52-55.

NEUGEBAUER, OTTO: Mathematische Keilschrifttexte, Band 1. Berlin: Springer 1935.

NEUGEBAUER, OTTO; Sachs, Abraham: Mathematical Cuneiform Texts. New Haven, Conn.: Amer. Oriental Soc. 1945.

PICHOT, ANDRÉ: Die Geburt der Wissenschaft. Frankfurt a. M.: Campus 1995.

REIDT, FRIEDRICH: Die Elemente der Mathematik, Band 2 - Planimetrie. Berlin: Grote 1868. (Online unter Google-Books)

REIDT, FRIEDRICH;WOLFF, GEORG; KERST, BRUNO: Elemente der Mathematik, Band 2: Geometrie. Berlin: Grote 1926.

SCHEID, HARALD; SCHWARZ, WOLFGANG: Elemente der Arithmetik und Algebra. Heidelbg.: Spektrum (5. Aufl.:) 2008.

SCHOLZ, ERHARD (HG.): Geschichte der Algebra. Mannheim: BI 1990.

SCHUBRING, GERT: Das genetische Prinzip in der Mathematikdidaktik. Stuttgart: Klett-Cotta 1978.

SCHWAB, KARL: Lehr- und Übungsbuch der Geometrie, Teil 1, Ausg. A: für mittlere Klassen der Realanstalten. Wien/Leipzig: Tempsky/Freytag 1910.

STAUFF, HEINER: Die Garagenauffahrt. (Am 26.05.2011:) Online unter http://www.stauff.de/matgesch/dateien/auffahrt.htm.

SZABO, ARPAD.: Anfänge der griechischen Mathematik. München: Oldenbourg 1969.

SZABO, ARPAD: Entfaltung der griechischen Mathematik. Mannheim: BI 1994.

TREUTLEIN, PETER: Der geometrische Anschauungsunterricht… Leipzig: Teubner 1911.

VAN DER WAERDEN, BARTEL LEENDERT: Erwachende Wissenschaft. Basel: Birkhäuser (2. Aufl.:) 1966.

VAN DER WAERDEN, BARTEL LEENDERT: Die Pythagoreer. Zürich: Artemis 1979

VAN DER WAERDEN, BARTEL LEENDERT: Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. New York: Springer 1983.

WAGENSCHEIN, MARTIN: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken. Stuttgart: Klett 1965.

WALSER, HANS: Pythagoras und kein Ende. (Am 26. 05. 2011:) Online unter: http://www.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/M45_Pythagoras_und_kein_Ende/Pythagoras_und_kein_Ende.pdf

WINTER, HEINRICH: Satzgruppe des Pythagoras – Üben durch Anwenden. In: ml 2 (1984), S. 42-48.

WINTER, HEINRICH: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1989.

WITTMANN, ERICH CHRISTIAN: Elementargeometrie und Wirklichkeit. Braunschweig/Wiesbaden:

Vieweg 1987.

WOLF, RUDOLF: Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie, Band 1. Zürich: Schulthess 1870. (Am 27.05.2011 online unter http://books.google.de/)

WUßING, HANS: 6000 Jahre Mathematik. Berlin/Heidelberg: Springer 2008.

WYSS, ARNOLD; BÜHLER, ERNST; LIECHTI, FRITZ; PERRIN, RENÉ: Lebendiges Denken durch Geometrie. Bern/Stuttgart: Paul Haupt/Freies Geistesleben (2. Aufl.:) 1978.

ZEUTHEN, HIERONYMUS GEORG: Die geometrische Algebra. In: Ders.: Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. Kopenhagen: Hoest & Soens 1896, Abschnitt 4, S. 44-53. Wiederabdruck in O. Becker (Hg.): Zur Geschichte der griechischen Mathematik. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1965, S. 18-27.