Kleine Revue sozialer Aspekte der Schulgeometrie

von Lutz Führer (für Der Mathematikunterricht, Jg. 51, Heft 2/3 (Juni 2005), S. 70-85)

In meiner Referendarzeit, die jetzt dreißig Jahre zurückliegt, galt es als fundamentale Erkenntnis der Curriculumforschung, dass sich Unterrichtsinhalte nicht aus allgemeinen Lernzielen deduzieren lassen, weil – so hieß es damals sehr überzeugend – nichttriviale Bildungsziele nicht operationalisierbar seien, insbesondere wenn sie über Wissen und Können hinaus Haltungen meinen. Dies gelte nicht nur für die ganz oberen Globalziele überhaupt, sondern auch für allgemeine Lehr-Lernziele einzelner Fächer.

Alle Verstandestätigkeit: Induzieren, Deduzieren, also auch Abstrahieren (Didos Gattungsbegriffe: Vierfüßler und Zweifüßler), Analysieren unbekannter Gegenstände (schon das Zerbrechen einer Nuß ist Anfang der Analyse) und als Vereinigung beider Experimentieren (bei neuen Hindernissen und in fremden Lagen) haben wir mit dem Tier gemeinsam. Der Art nach sind diese sämtlichen Methoden – also alle Mittel der wissenschaftlichen Forschung, die die ordinäre Logik anerkennt – vollkommen gleich beim Menschen und den höheren Tieren. Nur dem Grade (der Entwicklung der jedesmaligen Methode) nach sind sie verschieden.	Bild s. nächste Seite
Abb.1: Verstandestätigkeiten nach Friedrich Engels' „Dialektik der Natur" (aus dem Nachlass 1925; hier mit Einschüben zit. n. Wygotski 1974, S. 97 f.)	Abb 2: Allgemeine Lernziele in Mathematik nach Heinrich Winter (1975; zit. N. E. Wittmann: Grundfragen des MU. Braunschweig: Vieweg, 6. Aufl. 1981, S. 47))

Inzwischen ist alles anders: Allgemeine Lehr-Lernziele heißen jetzt Kompetenzen. Eine KMK-Auswahl heißt Standards, und wenigstens die lassen sich abprüfen. Und was sich abprüfen lässt, so haben wir von TIMSS und PISA gelernt, taugt weltweit als Unterrichtsinhalt. Bildung ist endlich klar definierbar: Es ist das, was am Dienstag um 11 Uhr nachprüfbar vom Schulunterricht hinten rauskommt.

Sind wir oder unsere Oberen oder deren anonyme Experten inzwischen viel klüger geworden? Haben wir oder sie das Unterrichten neu erfunden? Verstehen wir oder sie endlich wie man mathematisch denken lehrt? Weiß irgendwer jetzt besser als in den letzten Jahrzehnten oder Jahrtausenden, wie man Ver- und Anstand lehrt? Standards statt Volksbildung? Qualitätssicherung jetzt bei allen?

> *Zum Ziele der Erziehungskunst, das uns vorher klar und groß vorstehen muss, ehe wir die bestimmten Wege dazu messen, gehört die Erhebung über den Zeitgeist. Nicht für die Gegenwart ist das Kind zu erziehen denn diese tut es ohnehin unaufhörlich und gewaltsam -, sondern für die Zukunft, ja oft noch wider die nächste.*

Jean Paul, Levana § 32

Abb. 3: Zeitgeist und Erziehungskunst nach Jean Paul

Mensch	Mathematik	allgemeines Lernziel der Schule	allgemeines Lernziel des Mathematikunterrichts
als schöpferisches, erfindendes, spielendes Wesen	als schöpferische Wissenschaft	Entfaltung schöpferischer Kräfte	heuristische Strategien lernen
als nachdenkendes, nach Gründen, Einsicht suchendes Wesen	als beweisende, deduzierende Wissenschaft	Förderung des rationalen Denkens	Beweisen lernen
als gestaltendes, wirtschaftendes, Technik nutzendes Wesen	als anwendbare Wissenschaft	Förderung des Verständnisses für Wirklichkeit und ihre Nutzung	Mathematisieren lernen
als sprechendes Wesen	als formale Wissenschaft	Förderung der Sprachfähigkeit	Formalisieren lernen, Fertigkeiten lernen

Die vier daraus resultierenden Lernziele werden von *Winter* folgendermaßen gefaßt

(L1) *Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, schöpferisch tätig zu sein*

(L2) *Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, rationale Argumentation zu üben*

(L3) *Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren*

(L4) *Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, formale Fertigkeiten zu erwerben*

Abb 2: Allgemeine Lernziele in Mathematik nach Heinrich Winter (1975;
zit. N. E. Wittmann: Grundfragen des MU. Braunschweig: Vieweg, 6. Aufl. 1981, S. 47))

Hinter den großen Worten jeder Jetztzeit steckt Zeitgeist – wie in den Werbefilmchen vergangener Jahrzehnte. Angesichts der unterrichtsmethodischen Effizienzbegeisterung des aktuellen Bildungsdesigns ist es vielleicht ganz lehrreich, einmal zu schauen, was gelehrt wurde, um zu ahnen, was wir in wessen Interesse lehren sollen und was wir unvermeidlich lehren werden. Um welche Qualitäten ging es, um welche kann es gehen?

Ich nehme das Beispiel Geometrie, weil es lange zum Geistreichsten zählte, das man allgemeiner Volksbildung zutrauen wollte. Für dieses Feld möchte ich zeigen, dass objektivierte Qualitätssicherungsmaßnahmen die unterschwellige Tendenz haben, das Soziale aus einer wünschenswerten mathematischen Allgemeinbildung ins Private und Unverbindliche lokaler Unterrichtsmethodik abzuschieben, etwa mit dem Euphemismus „Unterrichtskultur". Dass ich unterwegs immer wieder auf historische Beispiele und Überlegungen zurückgreife, hat nichts mit biogenetischen Sichtweisen zu tun, sondern mit der Überzeugung, dass Mathematik nicht nur eine internationale, sondern eine der ganz wenigen intertemporalen Wissenschaften ist – und Historiographie ein hervorragendes Mittel anregender Verfremdung. Analoges gilt für den Mathematikunterricht, insbesondere für den in Geometrie: Unterricht ist nur in gesellschaftlichen Prozessen möglich. Diese Prozesse nur hier und jetzt für wahr zu nehmen, ist naiv – und auf Dauer gefährlich. Geometrieunterricht bedient nämlich – mit Mitteln begrifflicher Abstraktion – unvermeidlich sozialhistorische Funktionen. Glücklicherweise sind die Probleme des mathematischen Schulwissens und -wesens hinter allen modischen Euphemismen nur selten wirklich neu, so dass aus Früherem gelernt werden kann (könnte).

Numeracy: „Zeit mal wieder ein Fass zu öffnen!“

Kürzlich schlug ich zwei älteren Studenten des Lehramts an Haupt- und Realschulen vor, sie mögen ihr Seminarthema „CAS als Werkzeug“ am Beispiel der Keplerschen Fassregel aufziehen. Ich hatte ihnen zum Einstieg das zweite Aufgabenbeispiel aus den KMK-„Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss nach Klasse 9“ kopiert. Danach sollten sie die Fassregel mit einem beidseitig konisch abgeschrägten Zylinder plausibel machen und schließlich die numerische Qualität der Faustregel mit diversen Rotationskörpern am PC experimentell austesten. Schon beim Einstiegsbeispiel schaute mich einer der beiden Aspiranten entgeistert an: „Wie soll das denn gehen? Anner Hauptschule!“ Ich las den Aufgabentext unter deutlicher Betonung des Wörtchens „ungefähr“ abermals vor.

Wie viel Liter Flüssigkeit passen ungefähr in dieses Fass? Begründe deine Antwort.

Abb. 4 aus: KMK-Standards Hauptschule 2004

Nach kurzem Zögern bekam ich zur Antwort: „Diese Aufgabe lehne ich ab. Sie erzieht Schüler zur Ungenauigkeit und Schlamperei, und das ist genau das Gegenteil von dem, was sie in Mathematik vor allem Anderen lernen sollen.“

Ich wollte noch nicht aufgeben und ließ mich auf ein fragend-entwickelndes Dreigespräch ein, das zufällig recht genau einer „Beschreibung der Aufgabe und ihrer Zielsetzung“ folgte, die die KMK-Experten entworfen hatten (Hauptschulstandards, S. 17 f.):

„Die Schülerinnen und Schüler sollen mathematisch relevante Gesichtspunkte herausfiltern wie:

- Welcher geometrische Körper entspricht dieser Fassform?
- Wie breit bzw. wie hoch ist dieses Fass?
- Entscheidend für die Lösung ist die Idee, geeignete Vergleichsgrößen und Körpermodelle zu finden, die der Realität nahe kommen.
- Es gibt keine eindeutige Lösung, aber mehrere Wege zu begründeten Antworten,
- die im Unterricht reflektiert werden sollten.

Bei der Bearbeitung der Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler nachweisen, inwieweit sie insbesondere die **allgemeine mathematische Kompetenz ‚**mathematisch Modellieren (K 3)’ im Rahmen der **Leitidee ‚**Messen (L 2)’ erworben haben...“

In der beigefügten Lösungsskizze der KMK finden sich gleich anschließend die folgenden Gesichtspunkte:

- „Wahl eines geeigneten geometrischen Körpers, z. B. Zylinder
- Ermitteln von Näherungswerten für Durchmesser und Höhe des Zylinders durch den Vergleich einer Person mit dem Fass zur Berechnung des Volumens
- Unter der Annahme (Durchmesser ca. 3 m und Höhe ca. 3 m) passen ungefähr 21 000 Liter Flüssigkeit in das Fass.
- Lösungsweg beschreiben und begründen“

Das Seminargespräch endete nach längerem Hin und Her mit der spontanen Erkenntnis des besagten Studenten: „Die Schüler sollen also nur den Radius und die Höhe für die Zylinderformel raten! Warum sagt man ihnen das nicht gleich?“ Ich wusste nicht weiter.

Wie soll man diese, durchaus auch bei Mathematikausbildern verbreitete, „numerical illiteracy“ in endlicher Zeit reparieren? Es geht doch beim mathematischen Modellieren nicht um irgendeinen genauen Zahlenwert, sondern um eine vernünftige Herangehensweise, um den „realistic approach“, den die PISA-Konstrukteure des Utrechter Freudenthal-Instituts mit Recht hochhalten.

Kein Zweifel, die Fass-Aufgabe hat was. „Problemhaltig“ ist sie schon dadurch, dass ihr die Daten fehlen. Kein Wunder also, dass sie in der Entwurfsfassung der KMK im April 2004 nicht die mathematische Fertigkeits-Kompetenz K3, sondern die – Psychologen zweifellos höchst verblüffende – Kreativ-Kompetenz K2 illustrieren sollte. Hier sind die beiden amtlichen Kompetenzbeschreibungen:

„(K 2) Probleme mathematisch lösen Dazu gehört: ▪ vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten, ▪ geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden, ▪ die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren.“	**„(K 3) Mathematisch modellieren** Dazu gehört: ▪ Bereiche oder Situationen, die modelliert werden sollen, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen, ▪ in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten, ▪ Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.“

Wäre es der KMK an dieser Stelle ernst mit der numerischen Modellierungskompetenz – auf Neudeutsch „numeracy“ –, dann dürften die Problemlöseaspekte nicht fehlen. Nichttriviale Modellierung müsste ja geeignete Modelle erst suchen, und das ist umso anspruchvoller je mehr Werkzeuge und Modellalternativen man kennt. Wie steht es damit bei Hauptschulabsolventen, denen die Fassaufgabe ins Stammbuch geschrieben werden soll? Sie kennen heute vermutlich nur noch Zylindermodelle, die irgendwie passen könnten, insofern ist der Passus „z. B. Zylinder“ in der Lösungsskizze Etikettenschwindel. Ähnliches kann man dem Rest der Lösungsskizze vorwerfen: Der Vergleich von Radius und Fassbreite mit einer durchschnittlichen Mannshöhe wäre zweifellos eine geistreiche Leistung, wenn Derartiges im Unterricht nicht an Fässern geübt wäre, aber genau das wird zuvor in der Beschreibung der Aufgabe nahe gelegt, zumal von „mehreren Wegen zu begründeten Antworten“ keine Rede mehr ist. Woher die „Annahme“ gleicher Fasshöhe und –breite samt Näherungswert 3*m* kommen soll, wird nicht gesagt. An perspektivische Verdeckungen und Verzerrungen ist sicher gar nicht gedacht. Das Problem, um das es mir geht, liegt aber in der kommentarlosen Angabe von 21 000 *Litern*. Man erkennt das besser, wenn man die Aufgabe einmal selbst löst:

Auf meinem pdf-Ausdruck des KMK-Textes messe ich für den rechten vertikalen Durchmesser innen rund 5,0*cm*, außen 5,4*cm*, für die Fassbreite rund 5*cm* und für die „Fassdicke“ den maximalen Außendurchmesser 5,8*cm*. (Um den oberen Radius im Bild halbwegs genau zu messen, kann man – unter Symmetrieannahmen – den Raum zwischen den anscheinend horizontalen Querbalken mit Diagonalen mitteln.) Der zweite Mann von rechts ist bei mir ohne Hut rund 3,8*cm* hoch. Er steht im Bild wegen der Fasswölbung perspektivisch tiefer als der gemessene Durchmesser, aber sein Kopf reicht etwa bis zur Oberkante eines der Querbalken. Nimmt man an, dass letztere in Wahrheit horizontal verlaufen, dann wäre dieser Mann im Bild neben der rechten Fassmitte etwa 3,7*cm* hoch. Nimmt man als Mannhöhe den Bevölkerungsdurchschnitt 1,80*m*, dann bekäme man mit der letzten Messung aus Mannhöhe : Fassdicke ≈ 3,7*cm* : 5,8*cm* = 1,8*m* : *d* die Näherungswerte $d \approx 2{,}8m$, rechter Innenradius $r \approx 1{,}2m$ sowie $h \approx 2r \approx 2{,}4m$ und $V \approx 11\,000$ *Liter*. Wegen der Wölbung ist das sicher recht pessimistisch geschätzt, aber auch der viel zu große Außenzylinder mit Durchmesser *d* und Breite *h* enthielte nur knapp 15 000 *Liter* statt der 21 000 *Liter* der KMK-Lösungsskizze. Es kommt eben darauf an, wo und wie man misst, und wann man zum Zylindermodell übergeht. Natürlich könnte auch mit kleineren oder größeren Mannhöhen sowie mit mehr oder weniger perspektivischen Rücksichten argumentiert werden, um ganz andere numerische Ergebnisse zu rechtfertigen. Auf die numerischen Ergebnisse kommt es eben nicht wesentlich an, wenn es um Modellierungskompetenz geht, sondern auf die Herangehensweise, auf taktvollen Umgang mit unsicheren Messwerten und auf die Bereitschaft, eigene Rechenergebnisse sach- und selbstkritisch zu relativieren.

Sind Schätzungen, bei denen auch die Hälfte noch als richtig gewertet werden muss, sinnvoll? Sie sind es, nach meiner Überzeugung, genau dann, wenn es nicht um irgendwelche numerischen Ergebnisse, sondern um (selbst-) kritisches Relativieren von Ergebniszahlen, um Redlichkeit im numerischen Ausdruck geht, um verantwortungsvolles Anwenden von Mathematik. Und genau das entzieht sich als intellektuell gesellschaftsfähige und verantwortungsbereite Haltung den allseits beliebten Vergleichtests. Als wertvoll und bildsam erscheint mir die Fassaufgabe nur insofern und insoweit, wie sie eine sinnvolle Herangehensweise *und* eine seriös relativierte Antwort verlangt. Demgegenüber ist die Zahlenwertbeschaffung im geübten Kontext „Zylinderberechnung mit geschätzten Daten“ geradezu belanglos. Maßvolles Mathematisierungsverständnis testet die Aufgabe nur in dem Maße, wie sie für die Probanden neu ist. Das ist nicht testbar, weil „von außen“ nicht abschätzbar. Aber nur dann gibt es „mehrere Wege zu begründeten Antworten, die im Unterricht reflektiert werden sollten“. Werden Fassaufgaben jedoch zu Trainingsgeräten für eine Unterrichtsreihe „optimales Schätzen mittels Bildausmessung“, die anschließend in landesweiten oder gar internationalen Tests evaluiert werden soll, dann wird zwangsläufig Erziehung zum Selberdenken und zu vernünftiger Rede gegen belangslose, aber vergleich- und auswertbare Zahlenwerte eingetauscht. Dass diese Gefahr besteht, lässt sich an der unrelativierten KMK-Zahlenangabe 21 000 *Liter* ahnen und mit allerlei Schulbuchadaptionen von PISA-Pizzen, Rennbahngraphen und Terrassenpflasterungen belegen.

Mittelbare Sehgewohnheiten

Insofern „numeracy“ dazu erzieht, numerische Ergebnisse zu echten Sachfragen bezüglich ihrer Kontextuierung und bezüglich der Unsicherheiten der Datengewinnung und Modellkonstruktion zu relativieren, liefert sie zweifellos wertvolle Beiträge zur Gewöhnung an Sachlichkeit, vernünftiges Reden, Empathie und zur (früher so genannten) kommunikativen Kompetenz. Aber ein Mathematikunterricht „more geometrico“ hätte noch mehr zu bieten: bildliche und vorbildliche Formen wissenschaftlicher Weltauffassung, Formen in gegenständlicher „Hin-Sicht“ und Formbeziehungen als Wasserträger der einst so genannten Formalbildung (Persönlichkeitsformung durch Bildung), die Haltungen, Sichtweisen, Verstand und Argumentationen (mit-) prägen wollte.

Als junger Lehrer hatte ich mit einer aufgeweckten Gymnasialklasse Trapeze studiert. Ich hatte damals ein ausgesprochenes Faible für Ähnlichkeitsbeziehungen in Trapezkonfigurationen, und da die Schüler gut mitspielten, fand sich immer noch eine originelle Aufgabe, und noch eine. An einem schönen Vormittag meldete sich Karin: „Darf ich mal was fragen?“ Klar doch. „Also, wir haben da die letzte Zeit dauernd so mit Trapezen rumgemacht, und das war ja auch ganz spannend. Aber gestern war ich mit Charlotte spazieren, und da kamen wir drauf: Wo gibt’s überhaupt Trapeze? Und da haben wir gesucht und gesucht. Nirgends gabs Trapeze. Gibt’s draußen überhaupt welche, oder ist das nur sone Mathesache? Ist ja ganz nett, aber…“ Rundum beifälliges Gemurmel, gespannte Blicke auf mich, ich zögerte. Mir war das schrecklich peinlich: Die Schüler hatten ja Recht, meine Begeisterung für Trapezeigenschaften mussten sie ja nicht mitbringen. Ich hatte versäumt, das Thema an ihre Lebens- und Gedankenwelt anzubinden und den Schülern einen Weg vom Anschauen zum Durchschauen zu zeigen. Mein Zögern aus Betroffenheit erschien den Schülern natürlich als Ratlosigkeit, die Spannung nahm zu. Jetzt nichts falsch machen! „Perspektive“, schoss es mir durch den Kopf. Mit gespielter Gelassenheit bat ich die ganze Klasse an die Fenster. „Was siehst du dort unten, Kai?“ – „Den Schulhof.“ – „Und rechts daneben?“ – „Das Haus vom Hausmeister.“ – „Welche Form hat das Dach.“ – „N ziemlich langweiliges Rechteck, aber ganz schön groß.“ Allgemeines Gekicher. „Bist du sicher?“ – „Ganz sicher!“ – „Jetzt kneife mal ein Auge zu, und zeichne die Dachkontur auf der (verstaubten) Scheibe genau nach.“ Kai tat es theatralisch großartig, und alle staunten, kniffen Augen zu, malten perspektivische Rechtecke auf die Scheiben, schwätzten durcheinander. Nur Karrin war unzufrieden: „Immer nur schiefe Rechtecke, gibt’s denn…“ Sie kam nicht zu Ende, weil ihr Freundin Charlotte ins Wort gefallen war: „Guck mal dahinten, der Telegrafenmast, da sind lauter Trapeze drin.“ – „Stimmt, und der

Caravan vom Herrn Möller, den könnt man auch, irgendwie, als Trapez…“ – Charlotte und Karin hatten die Trapeze schlagartig, aber endgültig in ihren „aktiven Sehschatz“ aufgenommen, nachdem er schon länger zu ihrem „aktiven Wortschatz“ gehört hatte. Seitdem sind zumindest bei Charlotte, Karin und mir selbst Trapeze mit einem bestimmten Vormittag, mit einer Hausmeisterwohnung und mit einem Telegrafenmast konnotiert – bewusst wird mir das selten, und nur, wenn ich das Formensehenlernen erläutern möchte.

„Realistic approaches“ und „numeracy“ sind nicht alles. Zwar hat Herodot bekanntlich behauptet, die Geometrie käme aus Ägypten und habe ursprünglich dazu gedient, die Ländereien nach Nilüberschwemmungen neu zu vermessen, zahllose Artefakte aus viel früherer Zeit sprechen aber dafür, dass es (auch) mancherlei andere Anlässe zum Geometrietreiben gab. Die Verstädterung in den frühen Kulturen des Orients hat allerorten zum Ziegelbau geführt, offenbar aus Schutz vor Feuersbrünsten bei wachsender Raumnot (Bernal, Band 1, S. 117). Ohne eine bescheidene Standardisierung von Winkeln, Flächeninhalten, Volumina und maßstäblichen Zeichnungen ist serienmäßiger Ziegelbau kaum denkbar, und davon mögen in viel späterer Zeit die großen Tempel- und Pyramidenbaupläne profitiert haben. Bernal und Gerdes wiesen auch wiederholt darauf hin, dass Flechtwerke geometrische Regelmäßigkeiten geradezu automatisch entstehen und ins Auge springen lassen (Bernal, Band 1, S. 95). „Schöne“ Gebrauchs-, Kunst- und Kultgegenstände zeigten natürlich in allen uns bekannten Hochkulturen geometrisches Form„bewusstsein“, zumindest deutlichen Form„respekt“. Die „Geographie des Himmels“, an die auf wunderbare Weise meine geografische Position auf Erden gekettet ist, diente schon in sumerischen Zeiten der Astrologie – Ptolemaios konnte schon Beobachtungsdaten aus tausend Jahren verarbeiten. (Vgl. etwa Pedersen, Szabó oder die Interpretation des Gilgamesch-Epos bei Papke.)

Ich habe diese recht bekannten Tatsachen hier nur wiederholt, um den folgenden Überlegungen Gewicht zu verleihen: Es kann, wie mir kürzlich gesagt wurde, durchaus behauptet werden, dass originäre Künstler noch so komplexe und noch so filigran gegliederte Formen ohne zielstrebige Bewusstheit hervorbringen können und dass handwerkliche, wissenschaftliche oder sakrale Überlieferung oft esoterisch war, man denke nur an die Pythagoreer oder an mittelalterliche Bauhütten. Aber für die Überlieferung von Kunstfertigkeit in noch so kleinen Fachgemeinschaften sind Nachahmung und Intuition auf Dauer nicht effektiv genug. Irgendwann wird nachvollziehbare, konstruktive Kritik als Beschleunigungsmittel eingesetzt, und dabei ist Verallgemeinerung der künstlerischen und handwerklichen Praxis auf die begriffliche Ebene geradezu unvermeidlich. Diese „theoretische Widerspiegelung der Praxis“ tradiert aber nicht nur Kunstfertigkeiten, sie verändert auch Sehgewohnheiten, indem sie Aufmerksamkeit steuert. Sie tut das vielleicht einige Zeit nur im Kreis gewisser „Insider“, aber sie definiert zumindest dort sprachliche Zeichen, die sich bei erfolgreichem Gebrauch mit Bedeutungen und Wechselbezügen anreichern – man denke nur an die bekannten historischen Entwicklungen zum relationalen (Rechen-) Zahlbegriff hin, bei dem nicht mehr Mengeneigenschaften, Zählergebisse oder Tauschwerte die wesenhafte Bedeutung ausmachen, sondern Querbezüge. Die Abstraktion zum Begriff (Gedanken-)„Kreis“ ist viel mehr als die Verabredung, ein gegebenes Ding oder eine Serie „ähnlicher“ Dinge mit der Bezeichnung „Kreise“ zu versehen. Das Beziehungsdenken, das recht eigentlich zur Geometrie als Wissenschaft führt, beginnt vermutlich genau an der Stelle, wo aus einer Bezeichnung ein Gattungsbegriff wird, denn der Gattungsbegriff verbindet das hier und jetzt Vorgefundene mit Anderem, auch mit nicht Vorgefundenem und vielleicht mit noch Ungedachtem.

Denn ehe man besondere Bauschulen und höhere Lehranstalten für das Baufach errichtete, lernte der Jünger bei dem Meister, wie dies bei Handwerkern noch jetzt der Fall ist. Da ward denn der Schüler gleich ins Leben geführt; er lernte messen, auftragen, berechnen usw., ohne die Gründe und Regeln zu erfahren. Späterhin unterrichtete ihn wohl der Meister etwas darin, oder gab ihm Bücher in die Hände. An Schikk und Blikk fehlte es solchen durch das Leben gebildeten Leuten nicht, und die größten Stubengelehrten mussten oft vor ihnen die Segel streichen, wenn es sich um Ausführungen handelte, während sie in der hohen Weisheit stekkten.

Wilhelm Harnisch: Raumlehre oder Meßkunst... (Breslau 1821, S. IX)

Abb 5: Meisterlehre nach Harnisch (1821)

In Abb. 5 spüren Meister und Lehrling, dass guter Praxis Theorie immanent ist. Von schlechter Praxis „Gründe und Regeln zu erfahren“ mag auch helfen, aber das heilt nur vorgefundene Mängel und transzendiert das Vorgedachte nicht. In der Regel werden gute Begriffe außerhalb der Mathematik nicht definiert, sondern durch ihren Gebrauch geklärt. Dem Mangel an Schärfe, steht dann ein großer Vorzug gegenüber: Tradierte Arbeitsbegriffe sind von vornherein mit Bedeutungen aufgeladen, und zwar nicht nur mit lokalen gegenstandsbezogenen oder technischen, sondern oft auch mit halb- und unterbewussten Tradierungen. (vgl. etwa Jung, Frutiger oder Gerdes) Propädeutischer Geometrieunterricht, der beim Handwerklichen ansetzt, orientiert sich gern an dieser Lehrweise und verspricht sich von den unterschwellig vermittelten Tradierungen besondere emotionale Wärme – allerdings, und das wird in der gegenwärtig tonangebenden primarstufenzentrierten Methodik gern verdrängt: Emotionale Wärme und funktionale Bedeutungen in ernsthaften Arbeitsprozessen sind mitnichten direkt proportional.

Das Folgende stellt den Zusammenhang an einem besonders bemerkenswerten Beispiel dar:

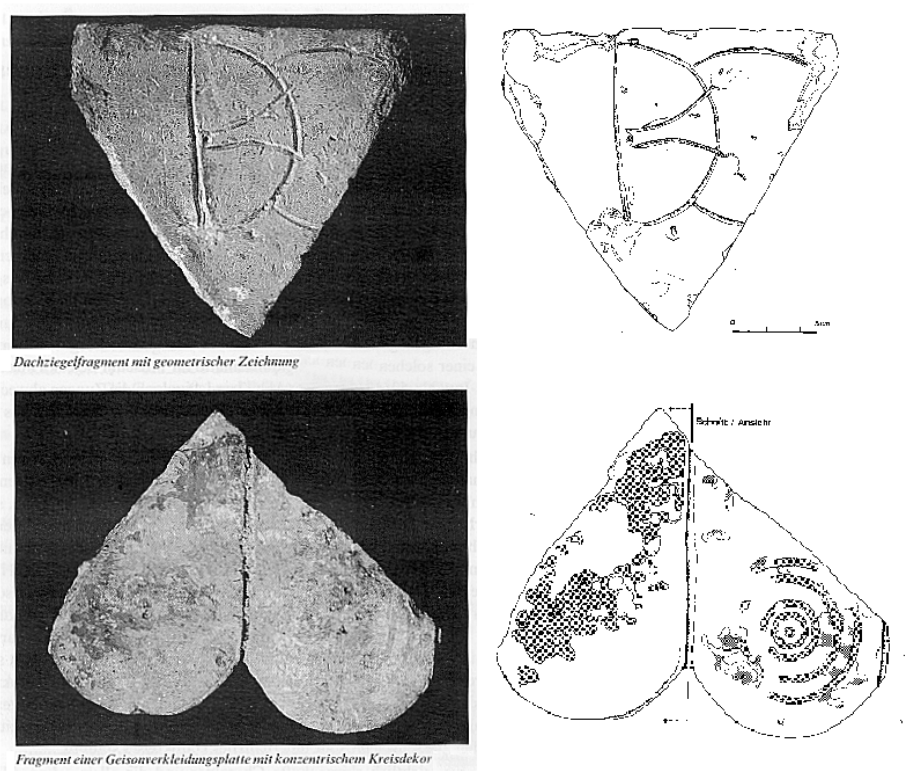
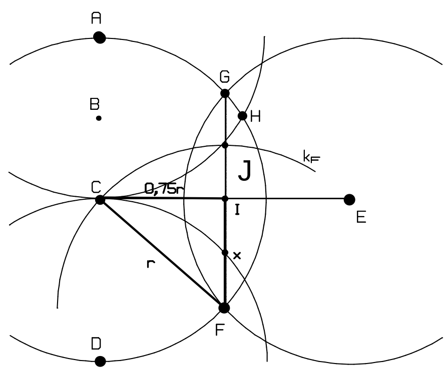


Abb. 6 Meisterlehre in Ephesos (nach Schädler)

In Abb. 6 sind links zwei Tonziegelfragmente abgebildet, die bei österreichischen Grabungen 1994 nahe dem Artemision von Ephesos gefunden wurden – immerhin einem der Sieben Weltwunder. Nach einer gut begründeten Vermutung des Archäologen U. Schädler hängen die beiden Fragmente zusammen, und zwar in der Weise, dass die offensichtlich rohe Skizze links oben das Prinzip andeutet, nach dem die feinere und ursprünglich prächtig bemalte Kreisverzierung auf dem Dachziegelblatt unten ausgeführt wurde. Nach Schädler war mit der Skizze Folgendes gemeint: Mit festem Radius AC ≈ 5,2*cm* (vielleicht damals ein Zehntel der ortsüblichen Elle) wird zunächst die zu AC senkrechte Strecke CE = BD mit anderthalbfachem Radius konstruiert, um dann auf der Linsen-Mittellinie FG eine Vierteilung und auf FJ eine Dreiteilung des Radius zu erhalten. Die erwähnten Teilstücke kehren dann als Radien der ausgemalten



Zierkreise auf dem Dachziegelbruchstück wieder.

Das Ganze ist „nur" eine Näherungskonstruktion, und es ist nicht klar, warum der Entwurf mit fester „Zirkel"öffnung, die Ausführung aber mit beweglicher durchgeführt wurden. Aber der Konstruktionsfehler hätte auch bei ideal sorgfältiger Ausführung unter 1% gelegen und war bei handtellergroßen Objekten natürlich unmerklich (wenn vielleicht auch – wer weiß – in religiöser Sicht „theoretisch bedenklich"). Für unsere Überlegungen sind aber zwei andere Aspekte der Angelegenheit wertvoller:

- Warum sollte jemand die rohe Skizze links oben auf weichem Ton angefertigt haben, wenn er sie nicht sich selbst oder einem Zuschauer ein Konstruktionsverfahren vergegenwärtigen wollte? Ohne metaphorische und/oder ästhetische Sinngebung für den Zweck der Konstruktion, ohne einschlägige Vorkenntnisse und ohne gesprochene oder dazu gedachte Erläuterungen wäre die Skizze wahrscheinlich bedeutungsleer. Solche Erläuterungen enthielten aber mindestens für einige lokale Zusammenhänge Gattungsbegriffe und verbindende Kausalsätze, also Theorieelemente, und jede (unvermeidlich metaphorische) Sinngebung würde sie von vornherein mehr oder minder weitläufig funktional konnotieren und damit wieder kausal binden.
- Mit stratigrafischen Untersuchungen wurde gesichert, dass die beiden Ziegelbruchstücke spätestens ein halbes Jahrhundert vor Thales entstanden sind, also vor dem offiziellen Beginn der argumentierenden Geometrie in Großgriechenland. Ob im Zusammenhang mit der Ziegelskizze begrifflich argumentiert wurde, wissen wir nicht. Die Qualität der anscheinend gemeinten Näherungskonstruktion ist aber so gut, dass möglicherweise mehr als Überlieferung empirischer Tatsachenbeobachtung dahinter steckte.

Zwar blieben Meister- und Schreiberlehren gewöhnlich engen Insidergemeinschaften vorbehalten, aber „erfolgreiche" Arbeitsleistungen waren und sind auf breitere gesellschaftliche Wertschätzung angewiesen. Die geistreiche Konstruktion hinter den Zierkreisen auf dem zweiten Bruchstück kann rein intuitiv goutiert worden sein, eine tiefere Bedeutung für Mythos oder Glauben setzt aber begrifflich-funktionales Denken voraus. Solche „gehobene" ideelle oder auch materielle Wertschätzung kann langfristig nur in größerem Maße erreicht und gefördert werden, wenn Bestandteile von Insiderauffassungen und –wissen in die Alltagskultur immer breiterer Schichten einsickern, um dort bewusstseinsbildend zu wirken. Lehre – in noch so engen Gemeinschaften – zwang und zwingt zu klarer Begriffsbildung – man denke nur an Cauchys und Weierstraß' Grundlegungen der Analysis oder an die „Moderne Algebra" von Artin und van der Waerden. Verbale Tradierung schafft tatsächliche oder symbolische Kausalbeziehungen, und damit – gewollt oder ungewollt – notwendige Voraussetzungen für die Entdeckung theoretischer Zusammenhänge, weil sie den langen Weg kultureller Infiltration über vorgreifende Bewusstmachung abkürzen will. Damit stiftet sie unvermeidlich Gattungsbegriffe und Denkformen, mit denen früher oder später verallgemeinernd, metaphorisch und vielleicht am Ende auch symbolisch umgegangen wurde/wird. Schon aus Prosperitätsgründen ist begriffliches Denken ansteckend. Dazu bedarf es keiner Verräter wie Hippasos.

„Wissenschaft ist geregelte Arbeit. Ihre Geschichte ist von gleicher Dauer wie die der Zivilisation. Sie erscheint, sobald die Handwerkerkunde den Boden der mündlichen Überlieferung verlässt, um einen bleibenden Bericht von sich selber zu geben. Sie breitet sich aus und wird einem stetig wachsenden Kreise zugänglich, indem sie die Früchte neuer Handwerke sammelt und ordnet. Sie wird matt, wenn der soziale Antrieb zu neuer fruchtbarer Erfüllung fehlt und deren Hüter den Willen, sie anderen mitzuteilen, verlieren. Ihre Geschichte, welche die Geschichte der schöpferischen Taten der Menschheit behandelt, ist auch die Geschichte der Demokratisierung der positiven Kenntnisse." (L. Hogben, S. 15)

Zur Nutzung von Superzeichen

Wo städteähnliche Agglomerationen, sei es aus Schutzbedürfnis oder aus wirtschaftlichen Erwägungen, entstanden, war Arbeitsteilung geradezu unvermeidlich. Dies setzte voraus oder erzeugte Herrschaftsmittel, Handel, Verständigungsmittel und Verwaltungsformen. Handwerk, Verkehrswesen, Kunst, Musik, Astrologie, Astronomie, Ordnungs- und Orientierungswissen konnten sich in diesem Rahmen umso besser entfalten, je mehr Produktivkräfte von der unmittelbaren Beschaffung von Lebensnotwendigkeiten freigestellt waren. Bis ins 19. Jahrhundert konnten auch in den wirtschaftlich führenden Ländern nur sehr kleine Minderheiten vom „Mehrwert“ leben, den die warenproduzierenden und -beschaffenden Mehrheiten – oft unfreiwillig – schufen.

Für unser Thema sind diese altbekannten Tatsachen insofern wichtig, weil sie deutlich machen, dass auch die systematische Untersuchung und Nutzung von (geometrischen) Formbegriffen und -beziehungen, auf Seiten oder im Interesse derjenigen erfolgte, die von der unmittelbaren Sorge ums eigene Überleben freigestellt waren. Wer wirklich Hunger hat, und das waren bis ins 19. Jahrhundert Tag für Tag auch in unseren Breiten die weitaus meisten Menschen, der treibt in der Regel keine geometrischen Studien. Aber er bleibt für geometrische Zeichen empfänglich, weil sehr vieles von dem, was geometrische Dinge ausmachen, eng mit Superzeichenbildung zu tun hat, sowohl mit unwillkürlicher Superzeichenbildung – man denke nur an Sternbilder –, als auch mit willkürlicher und metaphorischer. Wer Regeln der Superzeichenbildung „beherrscht“, kann Zeichen setzen, wie Verkehrszeichen: Von den Erbauern früherer Kolossalbauten bis zu den Großverdienern der heutigen Werbebranchen haben viele sich das zunutze gemacht.

Wir können den Standardzeichen unserer Kultur nicht entrinnen. Sie sind allgegenwärtig und üben ihre Macht im Gebrauch aus. *„Auch ein äußerst sorgfältig definiertes philosophisches oder mathematisches Konzept, das unserer Ansicht nach nicht mehr enthält, als wir hineingelegt haben, ist trotzdem wesentlich inhaltsreicher, als wir annehmen. Es ist ein psychisches Ereignis und als solches teilweise undurchschaubar. Selbst einfache Zahlen sind mehr, als man gewöhnlich weiß. Sie sind gleichzeitig mythologische Elemente (den Pythagoräern waren sie sogar heilig); aber daran denkt man sicher nicht, wenn man sie für einen praktischen Zweck verwendet.“* (C. G. Jung, S. 40) Dies gilt natürlich umso mehr für geometrische Zeichen, deren Aufmerksamkeitssteuerung wir gewohnheitsmäßig hinnehmen. (Vgl. etwa Braunfels u.a., Frutiger oder Hoffman)

Bei Pestalozzi und bei Herbart war diese Steuerungsfunktion für maßvolle geometrische Formwahrnehmung noch erzieherische, ausführlich gerechtfertigte Absicht. (Vgl. Treutlein und Führer)

Argumentationsbedürfnisse

„*μηδειζ αγεωμετρητοζ εισιτω*“, „kein der Geometrie Unkundiger trete ein“, soll über Platons Akademie gestanden haben, weil Geometrie den jungen Philosophen in Begriffs- und Theoriebildung als vorbildlich gelten sollte. Diese Auffassung hat sich bekanntlich über das Quadrivium und nach einigem Hin und Her auch einige Zeit über das Gymnasium des 19. Jahrhunderts hinaus gehalten. Obwohl die Floskel „Und das müssen wir jetzt natürlich noch beweisen!“ aus den öffentlichen Schulen weitgehend verschwunden ist und viele Mathematiker außerhalb der Hochschulen ihr Geld meistens anders verdienen, gilt vielen Mathematik heute noch als „die“ Wissenschaft der klaren Begriffe und zwingenden Beweise. Der mittelbare Einfluss dieses Vorurteils auf den szientistischen Teil unserer Kultur kann gar nicht überschätzt werden – man denke nur an die beliebte Mathematisierung vieler Wissenschaften auf Teufel komm ’raus, an die grassierende bürokratische Evaluitis oder auch an die derzeitigen Heilserwartungen der Forschungsfinanziers gegenüber allem irgendwie Empirischen.
Zu Keplers, Newtons oder Huygens Zeiten, als der Löwenanteil der heutigen Schulmathematik entwickelt wurde, galt in dieser platonisch-formalistischen Weise nur die Geometrie als vorbildlich, und diese Leitfunktion der synthetischen Geometrie wurde tatsächlich im Rahmen öffentlicher Allgemeinbildung bis heute nicht überwunden. Zwar haben die Neubegründungen der Analysis seit Cauchy, der Geometrie seit Grassmann und Hilbert, der Algebra seit Boole, Artin und van der Waerden oder der Strukturmathematik seit Bourbaki in der Lehrerausbildung großen Einfluss gewonnen (auch über Piagets Adaptation Bourbakis für die Psychologie der kindlichen Intelligenzentwicklung), explizite Auftritte im öffentlichen Schulwesen fanden aber immer nur als Gastspiele ohne prägenden Nachwirkungen statt. (Für mich ist das ein wichtiges Indiz dafür, dass sich universitäre Lehrerausbildung und Schule im 20. Jahrhundert trotz aller Reformversuche seit Meran eher auseinander als aufeinander zu entwickelt haben.)

Meine Behauptung, die synthetische Geometrie habe ihre szientistische Leitfunktion im Wesentlichen behalten, umfasst keine Aussage über den heutigen Geometrienanteil am öffentlichen Unterricht. Tatsächlich ist die hundertjährige Klage über „den Rückgang der Schulgeometrie“ vor allem in Bezug auf szientistisch vorbildliche, nämlich problemlösende und beweisende Elementargeometrie berechtigt, während geometrischer Anschauungsunterricht, „Linearzeichnen“ und Konstruktionsversuche (jetzt auf dem PC) sowie planimetrisches, stereometrisches und linear-analytisches Berechnungswesen eher zunehmen. Zusammenhänge werden wie in Volksschulzeiten jetzt überall vorzugsweise vermittelt, beobachtet, erkundet, ausprobiert, bezeichnet und wohl auch hier und da bezweifelt, aber dem Zweifel folgen nur neue Experimente, keine begrifflichen Analysen, die Beweise erst ermöglichen würden. Das Zweifeln und kritikfähige Skepsis gelten nicht mehr als mathematische Tugenden, sondern als methodische Hürden, als willkommene, aber zu widerlegende Retardierungen des allseits gepushten positiven Denkens. Statt Widerspruchsgeist werden Standards und Zielvereinbarungen gepflegt.

Inwiefern ist strenges Beweisen unzeitgemäß? Eine mögliche Antwort ergibt sich, wenn man ein wenig den historischen Wurzeln des Beweisens nachgeht:

„Man darf mit Recht vermuten, dass in einer [vorplatonischen] Zeit die Methode des Überzeugens von den mathematischen Zusammenhängen das konkrete Zeigen, das Sich-Berufen auf die vornehmste Sinneswahrnehmung (das Sichtbarmachen) war. Man hielt für richtig, für wahr, wovon man sich mit Sehen überzeugen konnte, und dies hat man auch den anderen gezeigt, daraus bestand einst der Beweis… Nach einem Bericht des Jamblichos hieß jenes alte Handbuch der Geometrie, aufgrund dessen einst ein Mitglied der pythagoreischen Gemeinschaft ausnahmsweise unterrichten und damit Geld verdienen durfte, historia: ‚… die Geometrie des Pythagoras hieß aber historie.’… Allerdings muss jene Geometrie, die den Namen historie – und nicht mathema – führte, noch vorwiegend empirischer und anschaulicher Art gewesen sein. Denn so viel heißt das Wort. In der homerischen Sprache heißt histor der Augenzeuge, der Schiedsrichter, und in der etwas späteren Sprache ist historie ein empirisches Wissen, das entweder unmittelbar aus eigener Anschauung stammt oder mindestens das Ergebnis solcher Nachforschungen zusammenfasst, die man bei denen anstellte, die ihrerseits aus eigener Anschauung Bescheid wussten.“ (Szabó 1994, S. 322)

Wenn Euklids „*deixai*“ (=Beweisen) also, wie Szabó mit vielen weiteren Argumenten darlegt, ursprünglich „zeigen“ hieß, dann war es stillschweigend mit einer sozialen Funktion verbunden: Zusammenhängendes Zeigen macht nur Sinn, wenn etwas Jemandem gezeigt wird, im Grenzfall dem eigenen Bewusstsein als innerem Gegenüber. Dieser Jemand muss auch gar nicht zweifeln, es kann durchaus „nur“ um reine Tradierung oder Belehrung gehen, wie etwa das Dachziegel-Beispiel oben und das bekannte Menon-Beispiel illustrieren. Im Kern dieser ersten, ursprünglicheren und didaktischen Funktion des Beweisens geht es darum, jemanden zu überzeugen, genauer: erst sich selbst und dann andere. Alles spielt sich noch im Rahmen des Argumentierens ab, des Ringens mit Anderen um Ein-Sicht.

Zum „mathema“, zur eigentlichen klassischen Geometrie, wie wir sie von Euklid kennen und dieser vielleicht von Hippokrates, fehlt das Streben nach Durch-Sicht, das zwanghafte Erkundenwollen eines möglichst durchgängig systematisch geordneten Zusammenhangs. Erst ein solcher Zusammenhang „von Grund auf“ erlaubt zwingende Schlüsse (fast) unabhängig von menschlicher Einsicht. Dies kann bekanntlich Entdecker oder Erfinder solcher Zusammenhänge tief beglücken, und es kann auch noch Adepten in Vorlesungen und Übungen Genuss bereiten, aber es setzt immer einen mentalen Glaubensakt voraus, nämlich unerschütterliches Vertrauen auf Sinn und Folgerichtigkeit auch der verwickeltsten Konstellationen. Ein solcher Glaubensakt widerspricht freilich manch alltäglicher Erfahrung, und so muss offen oder heimlich der beweisenden Mathematik der Status einer unbefleckten Eigenwelt eingeräumt werden – zu verschiedenen Zeiten war diesbzgl. vom „Reich der Ideen“, von „Gottes Buch der Natur“ oder von „theoretischen Modellen“ die Rede. Erst in einer statischen von Zufällen, Unsinn, Widersprüchen, Wachsen und Vergehen gereinigten Gegenwelt machen strenge Widerspruchsbeweise, All- und sogar Existenzaussagen Sinn.

„Fragt man sich nun, woher dieser auffallende Zug der griechischen Mathematik – das feindliche Sich-Abwenden vom Konkreten und Sichtbaren – entstammen mag, zu dem wir gar nichts Ähnliches aus den älteren vorgriechischen Kulturen anführen könnten, so fällt einem zunächst Platon ein. Er war es ja, der das Gedankliche der Mathematik, sowohl der Arithmetik wie auch der Geometrie, so nachdrücklich betonte…“ (Szabó 1994, S. 325) Woher dieses zweifelnde Sich-Abwenden vom sinnli-

chen Ein-Sehen? Um es kurz zu machen: Die dritte, innermathematisch bedeutendste, weil fruchtbarste Funktion des Beweisens, nämlich das Erkunden von logischen Abhängigkeiten („Worauf beruht X eigentlich?“), ist älter als Platon. Nach Überzeugung vieler Fachgelehrter stammt es nicht aus der Mathematik selbst, sondern aus der ionischen Naturphilosophie und Kosmogonie. (Vgl. etwa von Fritz, Mainzer, Scriba/Schreiber, Szabó 1969, Pichot oder Rozanskij.)

„Lass dich nicht durch die vielerfahrene Gewohnheit auf diesen Weg zwingen: deinen Blick den ziellosen, dein Gehör das brausende, und deine Zunge walten zu lassen. Nein, mit dem Verstande logoi bringe die vielumstrittene Prüfung, die ich dir riet zur Entscheidung.“ (Parmenides, zit. n. Szabó 1994, S. 326)

Dieser Zug ins theoretisch Grundsätzliche, Prinzipielle, auf Durchschauen und Beherrschen der unterstellten Zusammenhänge hinter dem Großen-Ganzen, Jenseitigen hat sich als außerordentlich fruchtbar erwiesen, aber es hat nicht mehr den Menschen, Zuschauer, Schiedsrichter im Blick, sondern gegenständlich das Universum, die Wahrheit, die Götter oder die Wissenschaft, emotional Ehre, Opfer und Kult. Aus soziologischer Sicht hat folglich der – noch einmal sei es betont: – innermathematisch fruchtbarste Aspekt zünftigen Beweisens leider einen ausgemachten Zug zum Herrschaftswissen. Verbindet sich dieser weltabgewandte Zug mit den zuvor erwähnten sozialeren Funktionen des Einsichtvermittelns und Überzeugenwollens, dann können Beweisen und Beweisenlehren sehr rasch in Rechthaberei abgleiten und damit sozial destruktiv wirken. (Versuche, die Entstehung systematisch beweisender Mathematik mit dem Entstehen früher Demokratien, öffentlicher Rechtssysteme und entsprechender Diskussionskünste wie Eristik, Dialektik und Sophistik zu verbinden – man denke etwa an die auch bei Juristen beliebte Reductio ad absurdum –, stehen historisch auf schwachen Füßen. An der geschilderten Gefahr sozialer Destruktivität würden solche Bezüge auch nichts ändern.)

„Rather than as a positive element, I am inclined to view the Greek efforts to formulate and prove knowledge, originally attained in a simple and straightforward way, by means of clumsy methods and governed by strict conventions, as a symptom of a terrifying dogmatism, cherished by mathematici and which, from Greek mathematics onwards to the present day, has hampered and sometimes gravely endangered the dissemination of mathematical knowledge and method.“ (Freudenthal 1982, S. 444)

So ist die gegenwärtige Wendung zur unvollständigen Induktion, d. h. zum Anschaulichen, Experimentellen und Empirischen, möglicherweise auch als Reaktion auf den esoterischen Stil so mancher Mathematiklehrerausbildung verständlich. Insofern aber nun im Gegenzug das logisch schlüssige Argumentieren auf der Basis sorgfältiger Begriffsbildungen *und* durchschaubarer Definitionen vernachlässigt wird, begibt man sich auch der sozial positiven Erziehungsmöglichkeiten des Beweisens. Freudenthal und Winter haben dazu selbst die entscheidende Medizin genannt: lokales Ordnen, schülerseits notwendig auf der Grundlage intersubjektiv geteilter „Wahrheiten“ und subjektiver Beweisbedürfnisse. Solche Beweisbedürfnisse sollen bei Schülern nicht aus Gewohnheit kommen, sondern aus gerechtfertigter, d. h. in Problemsituationen erarbeiteter, Skepsis. Globales Ordnen in axiomatischen Systembauten „von Grund auf“ wäre dagegen im Rahmen öffentlichen Schulwesens nur noch in affirmativer und begriffsentleerter Verkürzung möglich. Es kann deshalb schon aus Gründen intellektueller Redlichkeit nicht mehr angestrebt werden.

Geometrielehrer: Glauben, Einsehen oder Hineinsehen?

Es ist klar, dass dieser sozial und schulorganisatorisch begründete Rückzug aus ganzheitlichem Strukturdenken auch den Verzicht auf (im Prinzip vollständig) durchschaubare Gegenwelten bedeutet, die den politisch befleckten Realwelten als normativer Spiegel entgegengehalten werden könnten. Wird damit nicht unnötig auf die Chance verzichtet, mit systemstrukturellen Sichtweisen zu erhöhter Kritikbereitschaft und –fähigkeit anzuhalten? Dieser Traum des Strukturalismus blieb bekanntlich in den sechziger und siebziger Jahren unerfüllt, obwohl man damals zu viel größeren Anstrengungen und Investitionen in die Volksbildung bereit war.

„Diese [wissenschaftliche, d. h. exakt-theoretische; L. F.] *Form ist den Menschen (besonders dem Kind), das (der) lediglich eine unmittelbar-sinnliche Beziehung zu den Dingen hat, ungewohnt, während der theoretische Zugang zu den Dingen für den Wissenschaftler gewohnt ist, dem sich die Wirk-*

lichkeit in dieser Weise offenbart. Fordern wir vom Schüler, ebenso wissenschaftlich vorzugeben, muss er sich zunächst ein neues, ihm ungewohntes theoretisches Verhältnis zu seiner Umwelt und entsprechende Denkformen aneignen. Umso wichtiger ist es, ihm im Unterricht von Anfang an das unmittelbar ‚Gegenständliche' und seine besondere Widerspiegelung im Begriff, der sich im Widerspruch zum Gegenständlichen befindet, nahe zu bringen.

Es ist schwierig, Verfahren für einen solchen Aufbau von Lehrplänen zu entwickeln. Soll der Unterricht den Schülern jedoch von Anfang an ständig eine theoretische Einstellung zum Gegenstand vermitteln und sie befähigen, seine Eigenschaften in Form von wissenschaftlichen Begriffen auszudrücken, sind solche Lehrpläne unbedingt erforderlich." (Dawydow 1967, S. 264)

Um es einmal in der alten, inzwischen eifrig gewendeten DDR-Pädagogik auszudrücken: Ein Tätigkeitsprinzip, das die theoretisch tragfähigsten Konzepte aus konkreten, aber paradigmatischen Einstiegen verallgemeinernd entwickeln will, kann mühelos dem empirischen Sensualismus dienstbar gemacht werden. Man muss nur Egozentrismus und Konkretismus der Schüler zu biologisch oder gottgewollt notwendigen Ingredienzien überwiegend subjektiver Lernprozesse erklären, und letztere gemäß Piaget oder Bruner oder von Glasersfeld als unvermeidlich. Die betont schlichte Empfehlung der KMK-Vorsitzenden in 2004, alle weiterführenden Schulen mögen sich die individualisierenden Sozialformen der Grundschulen zum Vorbild nehmen, geht genau in diese Richtung, Denken und Lernen als Privatangelegenheit auszugeben und geistige Leistung nach kanonisch messbarer Performanz „objektiv zu „evaluieren". Kollektive und soziale Verpflichtungen schulischen Lernens werden damit tendenziell auf das Chamäleon „Wettbewerbsfähigkeit" zurückgenommen, bei dem „internationale Wettbewerbsfähigkeit" und „persönliche Wettbewerbsfähigkeit am Arbeitsmarkt" sozialdarwinistisch zu verschmelzen drohen.

Machen wir uns nichts vor: Das öffentliche Pflichtschulwesen ist im 19. Jahrhundert zu Staats- und Wirtschaftszwecken entwickelt und durchgesetzt worden, nicht zur Befreiung und Beglückung des Volkes oder gar aller „Bürger":

„Wahre Aufklärung, soviel zu seinem eignen und zum allgemeinen Besten erfordert wird, besitzt unstreitig derjenige, der in dem Kreise, worin ihn das Schicksal versetzt hat, seine Verhältnisse und Pflichten genau kennt, und die Fähigkeiten hat, ihnen zu genügen. Auf diesen Zweck sollte daher der Unterricht in allen Volksschulen eingeschränkt werden. Die Zeit, welche man darin auf den oberflächlichen Unterricht in Wissenschaften verwendet, von welchen der gemeine Mann in seiner Sphäre keinen Gebrauch machen kann, ist größtenteils verloren.

Er vergisst das Gehörte sehr bald, und was noch in seinem Gedächtnisse bleibt, sind unvollständige Begriffe, aus welchen falsche Schlüsse und solche Neigungen entstehen, deren Befriedigung sein Stand ihm nicht verstattet, und welche ihn nur missvergnügt und unglücklich machen."

Aus einer Zirkularverordnung Fr. Wilhelm III von 1799 (zit. n. Fertig, S. 224)

Die sozialen Momente des Mathematikunterrichts, speziell natürlich auch des Geometrieunterrichts, werden nicht von der Bezugswissenschaft Mathematik garantiert, sie entstehen und vergehen mit dem sozialen Gebrauch zu Lehr- oder anderen Zwecken. Es spielt also ein wichtige Rolle, wessen Geschäft der Lehrer verrichten will.

Es gibt (immer noch) verschiedene Rollen, die ein Mathematiklehrer übernehmen kann:

Tradierung und Enkulturation oder Handwerkslehre oder sozialisierende Formung oder entfremdende Disziplinierung oder Beschäftigung und Unterhaltung …, je nachdem, welcher Funktion Geometrieunterricht hier und jetzt gewidmet wird, der Geometrielehrer hat (heute noch) die Wahl zwischen vielen Rollen. Er kann sich dauernd oder zeitweilig als Kunst-Handwerker oder Schreiber-Beamter begreifen, als Technologe, Sophist, Rechthaber, Fachsprachler, Pietist, Mathe-Lehr-Profi, Methodenkünstler, Projektdesigner, PC-Nutzer, Kompetenz-Trainer, Schulprofilierer u. v. A. m. Da all diese Rollen nicht wirklich originell sind, mögen geschichtliche Rückblicke helfen, schädliche Nebenwirkungen abzuschätzen, z. B. entsolidarisierende.

Kurz: Wir müssen wählen!

Literatur:

Bernal, J. D.: Wissenschaft – Science in History, Band 1. Reinbeck: Rowohlt TB 1970.

Braunfels, S. u. a.: Der „vermessene“ Mensch – Anthropometrie in Kunst und Wissenschaft. München: Moos 1973.

Brunner-Traut, E.: Frühformen des Erkennens – Aspektive im alten Ägypten. Darmstadt: Wiss. Buchges. (3. Aufl.:) 1996.

Brunner-Traut, E.: Alltag unter Pharaonen. Freiburg u. a.: Herder 1998.

Dawydow, W. W.: Beziehungen zwischen der Theorie der Verallgemeinerung und der Lehrplangestaltung. In: E. A. Budilowa u.a.: Untersuchungen des Denkens in der sowjetischen Psychologie. Berlin: VEV Volk & Wissen 1967, S. 253-269.

Fertig, L.: Zeitgeist und Erziehungskunst. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1984.

Freudenthl, H.: Book Review on P. Damerow; W. Lefèvre (Eds): Rechenstein, Experiment, Sprache.…. In: Educational Studies of Math. 13 (1982), S. 443-444.

von Fritz, K.: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft.Berlin: de Gruyter 1971

Frutiger, A.: Der Mensch und seine Zeichen. Wiesbaden: Fourier (8. Aufl.:) 2001.

Führer, L.: 300 Jahre Theorie des öffentlichen Mathematikunterrichts in Deutschland. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker 2000,. S. 19-26.

Garbini, G.: Schätze der Weltkunst, Band 2 – Alte Kulturen des Vorderen Orients. Gütersloh u. a.: Bertelsmann 1974.

Gerdes, P.: Ethnogeometrie. Bad Salzdetfurth: Franzbecker 1990.

Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient. Berlin-Heidelberg: Springer 1984.

Hoffman, D. D.: Visuelle Intelligenz. Stuttgart: Klett-Cotta 2000.

Hogben, L.: Mensch und Wissenschaft. Zürich: Artemis 1948.

Institut f. Geschichte d. Naturwiss. d. Chines. Akad. d. Wiss (Hrsg.): Wissenschaft und Technik im alten China. Basel: Birkhäuser 1989.

Jung, C. G. u. a.: Der Mensch und seine Symbole. Solothurn/Düsseldorf: Walter-Verlag 1968.

Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss nach Klasse 9. Bonn: KMK Oktober 2004. (http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/bildungsstandards.htm)

Lompscher, J.; Nickel, H. u. a.: Leben, lernen und Lehren in der Grundschule. Neuwied: Luchterhand 1997.

Mainzer, K.: Geschichte der Geometrie. Mannheim: BI 1980.

Papke, W.: Die geheime Botschaft des Gilgamesch. Augsburg: Weltbild 1994.

Pedersen, O.: A Survey of the Almagest. Odense: Odense Univ. Press 1974.

Pichot, A.: Die Geburt der Wissenschaft. Frankfurt a. M.: Campus 1995.

Rozanskij, I. D.: Geschichte der antiken Wissenschaft. München: Piper 1984.

Schädler, U.: Griechische Geometrie im Artemision von Ephesos. In: U. Muss (Hrsg.): Der Kosmos der Artemis von Ephesos. Wien: Österr. Archäolog. Inst. 2001, S. 279-287.

Scriba, C. J.; Schreiber, P.: 5000 Jahre Geometrie. Berlin-Heidelberg: Springer 2001.

Skovsmose, O.: Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer 1994.

Szabó, A.: Anfänge der griechischen Wissenschaft. München: Oldenbourg 1969.

Szabó, A.: Die Entfaltung der griechischen Mathematik. Mannheim: BI 1994.

Treutlein, P.: Geometrischer Anschauungsunterricht. Leipzig: Teubner 19

van der Waerden, B. L.: Geometry in Ancient Civilizations. Berlin u. a.: Springer 1983.

Wygotski: Denken und Sprechen. Frankfurt: S. Fischer 1982.