Lutz Führer, Frankfurt am Main: (Stand 4.09.2003)

Mit Verhältnissen rechnen? – Plädoyer für eine Renaissance des Proportionsdenkens

„Verhältnis“ ist das gewisse Verhalten zweier gleichartiger Größen der Abmessung nach.

Euklid V. Def. 3

Kommentar des Übersetzers Clemens Thaer:
(Diese Definition) passt schlecht zu der mathematischen Schärfe der folgenden Definitionen; doch gibt die Überlieferung keinen Anlass, sie für unecht zu halten. Ein Verhältnis zwischen Fläche und Strecke wird freilich durch sie ausgeschlossen, ohne Definition 4 aber noch nicht ein Verhältnis zwischen den Teilen, in die der Kreis den Winkel zwischen Tangente und Berührradius teilt.

Dass sie ein „Verhältnis zueinander haben“, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können.

Euklid V. Def. 4

Zahlen „stehen in Proportion“, wenn die erste von der zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist wie die dritte von der vierten. „Ähnliche“ ebene und körperliche „Zahlen“ sind solche, deren Seiten in Proportion stehen.

Euklid VII, Def. 20-21

Ohne ein wenig Kraftaufwand werden sich die Verhältnisse hier nie ändern!

Lauter, aber untauglicher Versuch I. Newtons
am 13.07.1668, seiner Haushälterin ein
neues Trägheitsprinzip nahe zu bringen
(Tombrooke, S. 302, Fussnote 437c)

Der von einigen Forschern ebenfalls herausgehobene Verhältnisaspekt ist zweifelsohne eine wichtige Komponente eines anwendungsorientierten Bruchzahlbegriffes, (er) ist jedoch für den Aufbau der Bruchrechnung nicht tragfähig, ...

F. Padberg 2002, S. 38

Verhältnisaspekte spielen bei den heute üblichen Einführungen in das Begriffsfeld Bruchzahl und in die Bruchrechnung nur eine sehr untergeordnete Rolle. Das ist nicht gut so, aber es hat verschiedene Gründe. So heißt es beispielsweise, Verhältnisse wären „für den Aufbau der Bruchrechnung nicht tragfähig“, und sie würden gerade wegen ihrer Alltagsbezüge zur falschen Bruchaddition verleiten (Padberg, S. 38 bzw. S. 103 f.). Im Laufe des 20. Jahrhunderts wurde sogar vorgeschlagen, Proportionsgleichungen ganz verschwinden zu lassen, weil Proportionen angeblich nichts anderes als Bruchzahlen und Proportionsgleichungen nichts anderes als Bruchgleichungen seien (vgl. Weber 1909, Tropfke 1937, Kirsch 1987). Diese radikale Geringschätzung des Proportionsdenkens hat sich allerdings nicht durchgesetzt: Mit Dreisatzaufgaben und Proportionalitäten beginnen immer noch Buchstabenalgebra und Funktionenlehre; Verhältnisgleichungen scheinen beim Thema Strahlensätze-Ähnlichkeitslehre unvermeidlich; und wer die Oberstufe besucht, bekommt es in der Analytischen Geometrie zumindest zu Klausurzwecken gelegentlich mit Teilverhältnissen zu tun. Aber die Gastspiele sind buntscheckig, zusammenhangslos und kurz. Eigentlich sind Verhältnisse bei uns out.

Was Wunder, wenn Lehrer immer wieder staunen, wie ungeschickt Neuntklässler und Oberstufenschüler mit Verhältnissen umgehen. Was Wunder auch, wenn TIMSS und PISA bei ihren deutschen Probanden ganz erhebliche Mängel im Proportionsdenken verzeichnen (s. Kasten 1). Auch gebildete Erwachsene und Studierende haben mit Zuordnungs-, Mischungs- und Röhrenaufgaben ihre liebe Not, aber Politmoderatoren, Talkmaster und Kultusminister/innen werden ja glücklicherweise nicht öffentlich getestet – sonst könnte man es einmal mit den drei letzten Aufgaben aus Kasten 1 versuchen.

Problematische Verhältnisse

- In einer Klasse sind 28 Schüler. Das Verhältnis Mädchen zu Jungen ist 4 : 3. Wie viele Mädchen sind es? (TIMSS 2; von 19% bzw. 30% der deutschen Siebent- und Achtklässler richtig gelöst; s. Beaton u. a., S. 97)
- Eine Pizzeria bietet zwei runde Pizzas mit derselben Dicke in verschiedenen Größen an. Die kleinere hat einen Durchmesser von 30*cm* und kostet 30 Zeds. Die größere hat einen Duchmesser von 40*cm* und kostet 40 Zeds. Bei welcher Pizza bekommt man mehr für sein Geld? Gib eine Begründung an. (PISA)
- Was ist beim Quadrat das Verhältnis von Seitenlänge zu Umfang? Antworten: 1/1, 1/2, 1/3 oder 1/4? (TIMSS 2: richtig bei 36% in dt. Klassen 7, 45% in dt. Klassen 8)
- Peter kaufte 70 Stück, und Sue 90. Zusammen haben sie 800 $ bezahlt. Wieviel mußte Sue bezahlen? (TIMSS 2: richtig bei 29% in dt. Klassen 7, 37% in dt. Klassen 8)
- Auf sechs Studenten kommt ein Professor. Schreiben Sie das als Gleichung mit P und S.... (s. die Befunde auch für Erwachsene bei Malle)
- Alana mixt eine Farbe aus 5 l Rot, 2 l Blau und 2 l Gelb. Welchen Anteil Rot hat die Farbmischung? 5/2, 9/4, 5/4 oder 5/9? (TIMSS 2: richtig bei 26% in dt. Klassen 7 und 8)
- Es sind 3 Männer in einem Gefängnis, die ausbrechen wollen; der erste sagt, daß er in 6 Stunden das Gefängnis aufbrechen werde, der zweite sagt, daß er es in 12 Stunden aufbrechen werde, und der dritte sagt, daß er es in 18 Stunden aufbrechen werde. Die Frage ist, wenn alle 3 zusammenarbeiten, in welcher Zeit sie dann das Gefängnis aufbrechen werden.“ (typische „Röhrenaufgabe“ von Filippo Calandri 1491; zitiert nach Tropfke 1980, S. 519)

Kasten 1

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die verbreitete Missachtung des Proportionsdenkens nicht nur schädlich für internationale Vergleichstests ist, dass sie vielmehr sowohl fachmathematisch als auch anwendungsbezogen kurzsichtig ist. Dies wird deutlich, sobald man die folgenden drei gängigen Vorurteile ein wenig genauer untersucht, nämlich

- Quotientengrößen seien kompliziert und deshalb nicht so „elementar“ wie die bürgerlichen Grundgrößen der Primarstufe,
- Verhältnisse, die sich durch Kürzen oder Erweitern ineinander überführen lassen, seien von Natur aus „gleich“

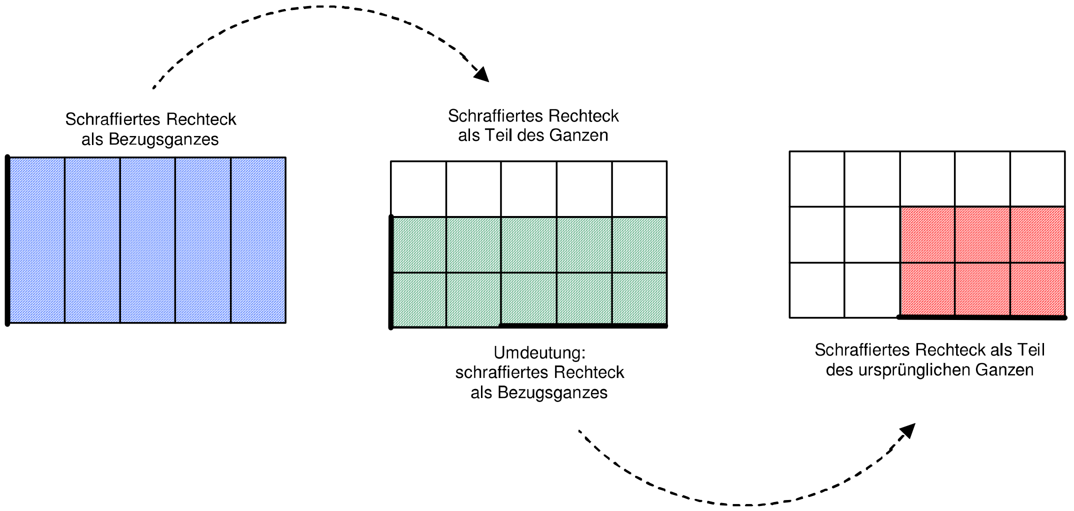
  und

- Proportionen und Brüche seien „im Wesentlichen“ dasselbe.

1. Größen-Verhältnisse

Üblicherweise sollen Schüler unter einem Bruch zu allererst einen Teil eines Ganzen verstehen, dann auch einen Teil mehrerer Ganzer und schließlich – auch oder alternativ – einen Anteilsbildner im Sinne des „von“-Aspekts oder – besser noch, aber selten realisiert – im Sinne eines Operators als einem eigenständigen Gedankending, mit dem sich nach gewissen Spielregeln rechnen lässt. Die beiden ersten Aspekte lassen sich mit dem Größenkonzept zwanglos konkret-operational, realitätsnah und e-i-s-methodisch ausgefeilt zum Ausdruck bringen, weil das Bezugsganze und die Bezugsvielheit bei bürgerlichen und physikalischen Grundgrößenwerten wie 2,3€, $\frac{2}{3}m$ oder $\frac{3}{8}km$ unmittelbar präsent sind und zu Einwechselungen herausfordern. Kürzen, Erweitern, Addition und Subtraktion sind auf diesem Weg gut zu begründen und zu trainieren.

Aber das Größenkonzept verträgt sich bekanntlich schlecht mit den viel wichtigeren Punktrechenarten. Im Wesentlichen hat das zwei Gründe: Multiplikation und Division führen aus einem gegebenen Größenbereich hinaus, und jede anschauliche Interpretation von $\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}$ stützt sich auf *wechselnde* Bezugsganze. Bis zu drei Abstände kann man miteinander multiplizieren, aber man bekommt dabei Flächen- oder Rauminhalte, keine Längen; Gewichte kann man nicht sinnvoll miteinander multiplizieren, aber mit Längen von Lastarmen oder Hebeln; und so etwas wie $kg\cdot\frac{m}{s^2}$ ist eine sinnvolle physikalische Einheit. Wer sich $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ oder $\frac{2}{3}m\cdot\frac{3}{5}m=\frac{2}{5}m^2$ mithilfe eines geeignet unterteilten Schokoriegels klarmachen möchte, der wird die linke Seite zeitlich-sukzessiv als „$\frac{2}{3}$ von einem auf $\frac{3}{5}$ geschrumpften Bezugsganzen“ interpretieren, also mit Rückgriff auf zwei und nicht auf ein Bezugsganzes. Während die zuvor favorisierte Teil-Ganzes-Bruchvorstellung gegenständlich und ergebnisorientiert arbeitet, werden bei der Multiplikation *Prozesse* nacheinander ausgeführt und die Bezugsganzen bedarfsweise und nebenbei angepasst. Größenkonzept und Teil-Ganzes-Bruchvorstellung geraten bei der Multiplikation in ernste Konflikte.



Zeitlich-sukzessive Deutung von $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}$

(praktisch geht man sogar vom Rechteck über Streckenteilungen zu Rechtecken zurück)

Weil nun auch viele Anwendungen wie Dreisatz, Zinseszins und maßstabsgerechte oder proportionale Umrechnungen von einer mehr operatorischen Auffassung profitieren, ist es ganz naheliegend, den „von“-Aspekt einfach dadurch ins Spiel zu bringen, dass gegen Ende des Größenprogramms zunehmend die Maßzahlen gegenüber den Maßeinheiten betont werden. Bei 2,3€, $\frac{2}{3}m$ oder $\frac{3}{8}km$ steckt das Bruchhafte nicht länger in der Abstammung des Gegebenen von einem Bezugsganzen, an das die Maßeinheiten wie Familiennamen erinnern, sondern in den jeweiligen Koeffizienten, die jetzt von Fall zu Fall als Anteilsbildner, Streckfaktoren oder Teilanweisungen gedeutet werden sollen.

So elegant und scheinbar organisch sich das im Unterricht darstellen mag, das Umschwenken vom Operieren mit Größenwerten und mit konkret gegebenen Teilen von feststehenden Ganzen zur Verkettung der Operatoren selbst bleibt natürlich ein Sprung auf eine höhere Abstraktionsstufe, in Piagets Ausdrucksweise: ein Sprung vom konkret-operationalen zum formal-operationalen Denkniveau – und genau deshalb ist es wenig sinnvoll, mit der Bruch*rechnung* vor der Orientierungsstufe anfangen zu wollen. Es ist allgemein bekannt und in der Fachliteratur vielfach untersucht, dass hier allerlei Fehlerquellen und Verständnisprobleme entstehen und dass gerade der methodisch geschickt unterspielte Perspektivwechsel nicht selten zu einer unbehaglichen Verfremdung der Bruchrechnung aus Schülersicht beiträgt. Für viele Schüler werden aus den Symbolen für Pizzateile und andere vertraute (Gedanken-) *Dinge* durch das „von"-Konzept autoritäre *Rechenvorschriften* für bestimmte Aufgabensituationen – die klassischen, didaktisch völlig inakzeptablen Dreisatzrezepturen lassen grüßen.

Die verführerische Konkretheit der Teil-Ganzes-Beziehung und der entsprechenden Größenauffassung im üblichen Erstunterricht zur Bruchrechnung behindert die nötige Abstraktion von Handlungsanweisungen (Operatoren) zu Rechenzahlen. Diese Feststellung kann aber gewiss nicht bedeuten, das Größenkonzept müsse jetzt ganz verworfen werden. Zum ersten fehlen unterrichtsmethodisch akzeptable Alternativen, und zum zweiten – viel wichtiger – stützen sich quantitative Bezüge zur Außenwelt in den allermeisten Fällen auf Größen. Zur Verbindung mit der Realität ist die Bruchrechnung nun einmal auf Größen angewiesen. Was lässt sich dann noch tun, um den Gedankensprung von der Größen- zum Operatorauffassung organisch aufzulösen? Ist in der Bruchrechenmethodik seit Volksschulzeiten nicht schon alles versucht und durchdekliniert worden?

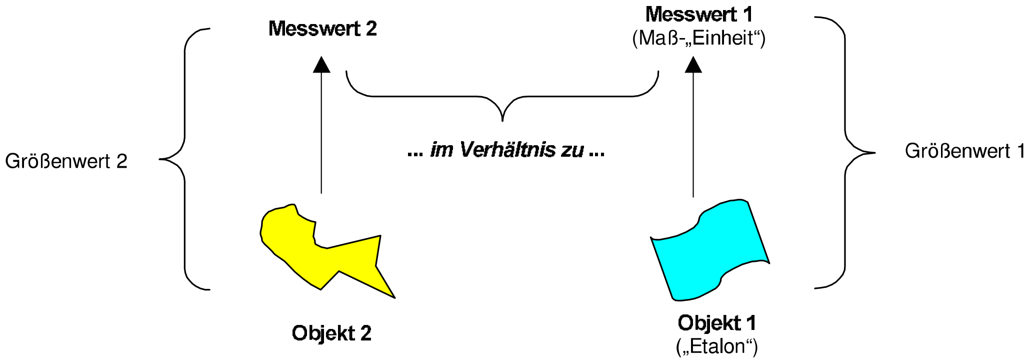
Mir scheint, das Ganze ist weniger ein methodisches als ein didaktisches Problem, und es beruht hauptsächlich auf einem fundamentalen, eben gerade methodisch motivierten Missverständnis des Größenbegriffs. Schauen wir uns diesen Begriff einmal etwas genauer an:

> Erstlich wird alles dasjenige eine Größe genannt, was einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder wovon sich etwas hinwegnehmen läßt…
>
> Es läßt sich aber eine Größe nicht anders bestimmen oder ausmessen als daß man eine andere Größe derselben Art als bekannt annimmt und das Verhältnis angibt, in dem diese zu jener steht.
>
> L. Euler: Vollständige Anleitung zur Algebra, Kap. 1.1 und 1.3

Größen sind traditionell und in neuerer Zeit auch wieder für den DIN-Ausschuss (s. z. B. Griesel) doppelt relationale Begriffe, d. h. ein Größenwert bedeutet immer nur etwas in Bezug auf einen anderen Größenwert derselben Art, und beide Größenwerte beziehen sich auf mehr oder minder konkrete Messobjekte. Größenwerte erhält man nämlich durch Schätzen, Messen oder Berechnen, wobei es jedesmal darum geht, eine Eigenschaft des auszumessenden Objekts in ein quantitatives Verhältnis zu einer entsprechenden Eigenschaft eines anderen, aber gleichartigen Objekts, das in der Regel die Rolle der (Maß-) Einheit spielt, zu setzen. Was „gleichartige" Objekte sind, ist, wie das erste Euklid-Zitat am Anfang dieses Aufsatzes zeigt, schwer zu beschreiben, aber was „dieselbe Art Größenwert" meint, hat Euklid vorbildlich ausgedrückt: es handelt sich um bestimmte oder gedachte Messwerte, die „vervielfältigt einander übertreffen können".

Euklid schrieb nur solchen Größenwerten ein Verhältnis zu. Es gehört aber zur Revolution der Mathematik im 17. Jahrhundert, dass man allmählich auch Verhältnisse unterschiedlicher Dimension wie „Länge zu Rauminhalt", „Kraft zu Fläche" oder „Weg zu Zeit" denken, vergleichen und verrechnen gelernt hat (vgl. etwa Scholz). Leibniz und die Bernoullis schrieben und dachten z. B. schon im neuen Geist $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$, während Newton und die britischen Mathematiker des 18. Jahrhunderts immer noch aus Dimensionsgründen an dem schwerfälligen $\dot{y} : \dot{x}$ festhielten.

Wenn man so will, kann man Größen als Funktionen oder besser als statische Funktionsrelationen ansehen, die alle denkbaren „einschlägigen“ Mess- und Berechnungsverfahren zusammenfassen, um möglichst große Bezugs- oder Definitionsbereiche zu erhalten. Größen*werte* meinen dann eigentlich Größen*punkte*, nämlich Elemente der Relation oder Punkte des Funktionsgraphen, weil ein Messwert y



Interpretation von Größenwerten

(Nicht zufällig erinnert die Grafik an entsprechende Bilder zum Modellbegriff und zum Mathematisieren)

nur etwas Reales bedeutet, wenn er sich auf ein Messobjekt x bezieht. Aber diese genauere Bezeichnung ist nicht üblich, man tut einfach so, als wären die Bezugsobjekte klar, und identifiziert einfach Messwerte (y-Werte) mit Größenwerten (x-y-Paare), wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind. Die Verhältnisnatur des Größenbegriffs, von der im Weiteren die Rede ist, bezieht sich in der Funktions-Sichtweise auf Verhältnisse von Messwerten, und das setzt mindestens eine Ordnungsstruktur im y-Wertebereich voraus, der durchaus kein Zahlberereich sein muss, sondern z. B. auch aus Umsatz- oder Geschwindigkeitsvektoren, Farben, Tönen oder anderen Qualitätsurteilen bestehen kann.

Wie man sich das „Vervielfältigen“ von Größenwerten vorzustellen hat und welche Rechenoperationen mit ihnen „wirklichen“ Sinn machen, liegt zunächst gar nicht fest. Beides hängt von der einzelnen Größenart ab, von deren Bezugsbereich, von den verfügbaren Messtechniken und mitunter auch vom Verwendungskontext oder besonderen Relativitätstheorien. Denkt man etwa an Dichten oder Stoffkonzentrationen in einem Medium, an den Sättigungsgrad von Farben, an Tonhöhen oder an Preisindizes, so wird deutlich, dass es mehr auf Vergleichbarkeit im Sinne einer mit Eigenarten des jeweiligen Objektbereichs konsistenten Ordnungsbeziehung ankommt als auf exakte Darstellbarkeit jedes Größenwertes als Vielfaches jedes anderen einschlägigen Wertes. „Verhältnisse“ sind in dieser Allgemeinheit nichts als Paare von Größenwerten im Rahmen einer „konsistenten“ Ordnung. (Wie man die Konsistenzbedingung allgemein fassen kann, wird in der bei Griesel angegebenen Literatur erörtert.)

> *Alltäglicher Verhältnisvergleich:*
>
> *Gebindepreis : Stückpreis wie* 5,35€ : 1,12€. *Aber: das Gebinde enthält* 6 *Stück, und mein Bedarf bis zum Verfallsdatum liegt um die ... Stück.*

Es ist auch nicht so, dass Addierbarkeit die Natur von Größen charakterisiert, wie primitive Messtechniken für Grundgrößen wie Geld, Gewicht, Länge, Winkelgröße, Flächeninhalt, Volumen und Zeiträume nahelegen (Zeitpunkte und Temperaturen passen bekanntlich nicht recht dazu). Zeigerausschläge, Färbungen, Klänge oder Digitalanzeigen von Messgeräten sprechen eine andere Sprache. Das Aneinanderfügen von Geld- und Gewichtsstücken, Ellen oder Zollstöcken, Uhrzeigerwinkeln, Quadratplättchen und *ml*-Würfelchen passt so überzeugend zur gängigen e-i-s-Ideologie der Primarstufenmethodik, dass die von Kirsch beschriebenen additiven „elementaren Größenbereiche“ nicht selten und vorübergehend sogar vom DIN-Ausschuss als Charakteristikum aller Größenbegriffe missverstanden wurden. (Kirsch hatte im Vorwort seines Standardwerkes von 1970 ausdrücklich, aber für die nachfolgende Sachrechendidaktik fast vergeblich betont, dass es ihm nur um den eingeschränkten Bereich des bürgerlichen Volksschulrechnens ging, nicht um Größen im Allgemeinen.)

Beim Zoomen, bei Zahnradgetrieben oder beim Mikroskopbau schaltet man Vergrößerungsmaßstäbe hintereinander – solche Maßstäbe zu addieren kommt niemandem in den Sinn. Größen sind zu allererst Verhältnisbegriffe, und da man in vielen Kontexten sinnvoll Verhältnisse von Verhältnissen bilden kann, stehen Größen tatsächlich den Punktrechenarten näher als den Strichrechenarten. Zweifellos im Bewusstsein der pythagoreischen Musiktheorie hat Euklid die Verkettung (Multiplikation) von Verhältnissen behandelt, aber keine Addition von Verhältnissen (im heutigen Sinne) und keine Bruchrechnung, obwohl ihm (in Alexandria!) sehr wahrscheinlich die ägyptische Bruchrechnung und die babylonische Hexagesimalbruch-Arithmetik geläufig waren. Der „Logos", der ursprüngliche realitätsbezogene „Zahl"begriff der Griechen (lat. und engl. „ratio", ital. „proportio"), hatte nach Szabó die relative Bedeutung eines Größenverhältnisses. „Der Logos ist eben das Zahlenbündel, mit Hilfe dessen man den Gegenstand, die musikalische Harmonie, die Gestalt des Dreiecks usw. aussprechen und mitteilen kann." (Von Fritz, S, 483) Die Feinteilung (Fraktion) der beiden beteiligten Größenwerte zwecks rechnerischen Vergleichs, d. h. das algebraische $b = r{\cdot}a$ statt des geometrischen $a : b = p : q$, fand erst später in der (wissenschaftlichen) Mathematik Interesse, als sie begann, Rechenkünste und Gleichungsumformungen systematisch zu untersuchen (vgl. Benoit u.a., Scholz, Tropfke).

Wenn aber Größen ursprünglich und im Wesentlichen Verhältnisse sind und wenn Verhältnisse den Punktrechenarten näher stehen als den Strichrechenarten, wie kommt es dann, dass das Größenkonzept sich mit den letzteren bei der Einführung in die Bruchrechnung so gut verträgt und ausgerechnet bei den ersteren strandet?

Eine mögliche Erklärung liegt in der Überbetonung additiver Handlungsvorstellungen (materialistischer Kardinalzahlaspekt!) und in der Aufgabe-Ergebnis-Vorstellung von Mathematik, mit denen in der Grundschule der „natürliche" Rechenzahlbegriff und die Grundrechenarten entwickelt werden. Multiplikation wird dort materialgestützt als fortgesetzte Addition begriffen (was später immer schlechter zu Produkten aus rationalen, negativen, irrationalen oder komplexen Faktoren passt); Division ist der Multiplikation als sperrige Umkehrung nachgeordnet, nicht selten auch durch schlechte Erfahrungen mit dem (unnötig optimierten) schriftlichen Divisionsalgorithmus belastet; und Zahlenpaare mit oder ohne Rechenzeichen werden nur zu oft, wie Heinrich Winter bemerkte, als stillschweigende Aufforderungen zum Ausrechnen genommen. All das begünstigt natürlich den Wunsch, es den dummen Taschenrechnern nachzutun und gemeine Brüche und Proportionen nicht als Quotienten zu behandeln, sondern stets „auszurechnen", d. h. immer in eine Dezimalzahl zu verwandeln.

Wo freilich gemeine Brüche nicht als Zahlen*paare* begriffen, akzeptiert und rechnerisch verarbeitet werden können, sei es aufgrund der üblen „Aufgabe-Ergebnis-Gewohnheit", sei es aus rechentechnischer Bequemlichkeit, wegen anhaltender Dezentrationsprobleme oder auch nur zur Entlastung des Kurzzeitgedächtnisses, da ist es zweifellos angeraten, sich mit einer Mischung aus Ganzzahlarithmetik und Größenordnungsbestimmung zu begnügen (vgl. etwa Baireuther; Profke). Dies hieße aber den Versuch aufgeben, Schülern ein Verständnis von so mächtigen, universellen Ausdrucks-, Ordnungs- und Problemlösungshilfen zu vermitteln wie sie abgeleitete Größen, Koordinaten, Vektoren, Terme, Formeln, Buchstabenrechnung und Funktionenlehre bieten. Dort geht es jedesmal darum, Paare oder sogar Tripel von Zahlen, Größenwerten oder Variablen zu deuten und koordiniert zu verwalten. Nach Freudenthal ist allgemeine Bruchrechnung als Schulstoff genau so viel wert, wie man sie als konkrete Vorstufe und Grundlage der Algebra versteht. Für Pizzen, Lottochancen und Gardena-Zubehör braucht man sie gewiss nicht, und für Erbteilungen und Unterhaltsprozesse gibt es Tabellen.

Die einflussreiche amerikanische Mathematiklehrervereinigung NCTM hat das delikate Nebeneinander von Fraction (Bruch), Ratio (Verhältnis) und Proportion (Proportionalität) 2002 zum Thema ihres Jahrbuches gemacht (s. Litwiller). Breiten Raum nimmt dort der TIMSS-Befund ein, die amerikanischen Probanden hätten vor allem mit den *multiplikativen*, „dynamischen" und prozesshaften Anwendungen der Bruchrechnung große Schwierigkeiten gehabt (ratios), weniger mit den additiven, „statischen", ergebnisorientierten Bruchteilrechnungen (fractions). Wie schon in ihrer Agenda 2000, der wir übrigens die aktuelle Standards-Euphorie unser Bildungspolitiker verdanken, hatte die NCTM daraus den Schluss gezogen, es müsse in den amerikanischen Schulen viel mehr dafür getan werden, die Schüler besser und früher an den Umgang mit den multiplikativen Denkweisen des bürgerlichen

Rechnens zu gewöhnen. Unser Plädoyer für Proportionsdenken geht noch über diese Forderung des NCTM hinaus. Wir behaupten nämlich, Dreisatz und Anwendungen proportionaler Funktionen, die klassischen Themen des bürgerlichen Rechnens, beruhten letztlich auf der ganzheitlichen, „ungeteilten" und weitgehend intuitiven Verhältnisnatur aller Größenbegriffe, die bei den heute üblichen Einführungen in die Bruchrechnung viel zu kurz komme.

Die alltägliche Verwendung von Verhältnisangaben, d. h. von Quotienten, entspricht dem schulischen Primat des gegenständlich Additiven durchaus nicht. Trotzdem reagiert niemand auf Torverhältnisse, Maßstäbe oder Haushaltsindizes mit irgendwelchen Divisionsfluchtreflexen. Quotientengrößen sind nämlich häufig ohne jeden unmittelbaren Rechenbezug im Alltag allgegenwärtig – ohne Rücksicht auf irgendein mathematikwissenschaftliches Grundlegungsprinzip, nach dem Quotienten erst später drankommen dürfen: Auf einer Klassenfahrt tauscht jemand 3 Briefmarken gegen eine Cola-Flasche ein; 80*€* sind zur Zeit 83,75*$* wert; die Straße steigt je 100*m* Entfernung um 10*m* an; auf 512*km* wurden 32*l* Diesel verbraucht; je Kopf und Jahr wurden in Deutschland 230 *Eier* verzehrt; ein Läufer tat bei seinem 100*m*-Lauf 23 *Atemzüge*... Tauschwerte, Verbrauchswerte, Indizes, Wachstumsraten, Gewinnquoten, Leistungen, Steigungen... All das ist intuitiv geläufiges Bezeichnungswissen von realen Verhältnissen, auf dem sich früh aufbauen läßt, wenn man den delikaten, oft unnötigen und manchmal sinnlosen Bezug zum Rechnen und insbesondere zur Division nicht gleich in den Vordergrund stellt.

Um nicht missverstanden zu werden: Natürlich ist die Vorstellung vom Teilen grundlegend für viele Interpretationen der Bruchrechnung, aber sie sollte der bewussteren Wahrnehmung von Verhältnissen nachgeordnet werden, gerade weil letzteres sowohl anspruchsvoller als auch alltagsnäher ist. Und noch etwas: Das zielstrebige Teilen sollte *gestaltliche* Informationen nicht zerstören, die in Metaphern wie „Verhältnismäßigkeit der Mittel", „wohlproportioniert" oder „fair" traditionell mitschwingen und auf einen tieferen Zusammenhang zwischen Gerechtigkeit und Ästhetik anspielen. Verhältnisse signalisieren vor allem Gestaltliches. Auch darin sind sie anders als Brüche und (erst recht) Bruchrechenzahlen.

2. Übungen zum Verhältnisbegriff

1. Spielergebnisse, z.B. Tor- oder Satzergebnisse
2. Formatangaben, z.B. bei DIN-Rechtecken
3. Chancen, z.B. bei der SKL oder bei einer Wette
4. Maßstab
5. Blattstellungen
6. Leistungen, z.B. Klassenarbeits- oder Geschwindigkeitsvergleiche
7. Benzinverbrauch
8. Lohn- oder Preiserhöhungen
9. gerechte Kostenteilung
10. Zahnrad- und Getriebeübersetzungen, von Fahrradgängen bis zu Planetenmodellen
11. Pro-Kopf-Einkommen
12. Mischungsverhältnisse (Kochrezepte, Flüssigkeiten)
13. Typographie
14. Geschwindigkeit
15. Druck
16. Wachstum
17. Lebenserwartung

18.	Wahrscheinlichkeit
19.	Oktave, Quinte
20.	Straßensteigung
21.	Sitzverhältnisse bei Wahlen

Kasten 2

Aufgabe 1:

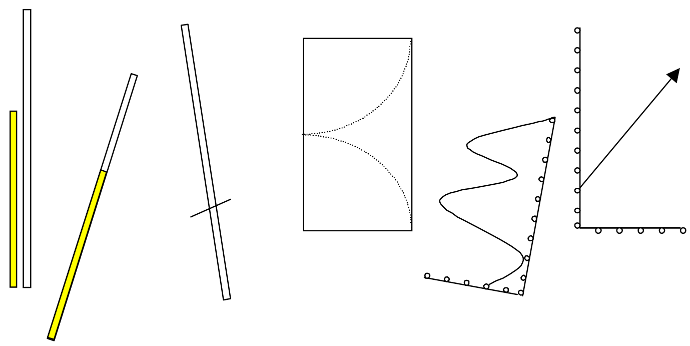
In Kasten 2 stehen einige Beispiele, die mit „Verhältnissen" zu tun haben. Erkläre das für fünf dieser Beispiele. (Du darfst im Lexikon oder im Internet nachschauen, und Du darfst auch Leute fragen.)

Aufgabe 2:

Landkarten und Fotografien zeigen die wirklichen Verhältnisse „maßstabsgerecht". Wie gehst Du vor, wenn die aus den Abbildungen wirkliche Entfernungen oder Abstände schätzen willst?

Aufgabe 3:

Erfinde eine spannende kleine Detektivgeschichte, in der die Auflösung am Ende gelingt, weil ein bestimmtes Verhältnis zu einem der Beispiele von Kasten 2 an einem der folgenden Muster erkannt wird:



Aufgabe 4:

Die Muster von Aufgabe 2 kann man gut benutzen, um Verhältnisse grafisch zu veranschaulichen und ungefähr zu vergleichen. Erläutere das an Zahlenbeispielen.

Aufgabe 5:

Löwen können etwa 5 *m* weit springen, Menschen bis zu knapp 9 *m*, und Ochsenfrösche 2 *m.* Wer springt besser?

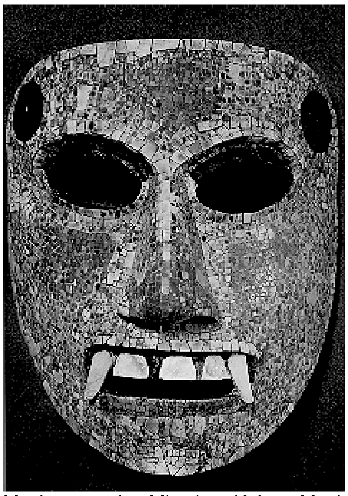
Um fair zu sein, sollte man wohl das Verhältnis zur Körperlänge anschauen. Löwen sind etwa 2,5 *m* lang, menschliche Weitsprungrekordler etwa 1,80 *m*, und Ochsenfrösche nur 20 *cm.* Die Verhältnisse sind also 5 *m* : 2,5 *m*, 9 *m* : 1,8 *m* bzw. 2 *m* : 20 *cm*, und es ist wohl klar, wer gewonnen hat. Man drückt solche Verhältnisse aber nicht so umständlich aus, sondern mit möglichst kleinen und glatten Zahlen. 2 : 1, 5 : 1 und 10 : 1 sind nicht nur höflicher, sondern auch anschaulicher. Kannst Du unsere drei Weitspringer in eine höfliche Rangliste mit den folgenden Konkurrenten einordnen?

	Sprungweite	Körperlänge
Tiger	5 *m*	2,50 *m*
Fuchs	2,80 *m*	65 *cm*
Rothirsch	11 *m*	2,50 *m*
Floh	60 *cm*	3 *mm*
Rennkuckuck	3 *m*	50 *cm*
Impala-Antilope	10 *m*	1,65 *m*
Springmaus	2,50 *m*	17 *cm*
Känguruh	10 *m*	1,40 *m*
Heuschrecke	2 *m*	7 *cm*
Gibbon	12 *m*	90 *cm*

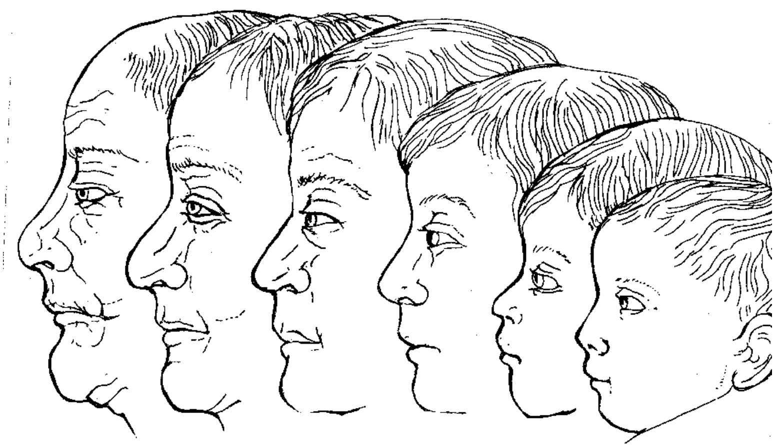
(Daten nach Flindt, S. 36 f.)

Aufgabe 6:

Götter und Kinder haben besonders große Augen. Was ist damit gemeint?



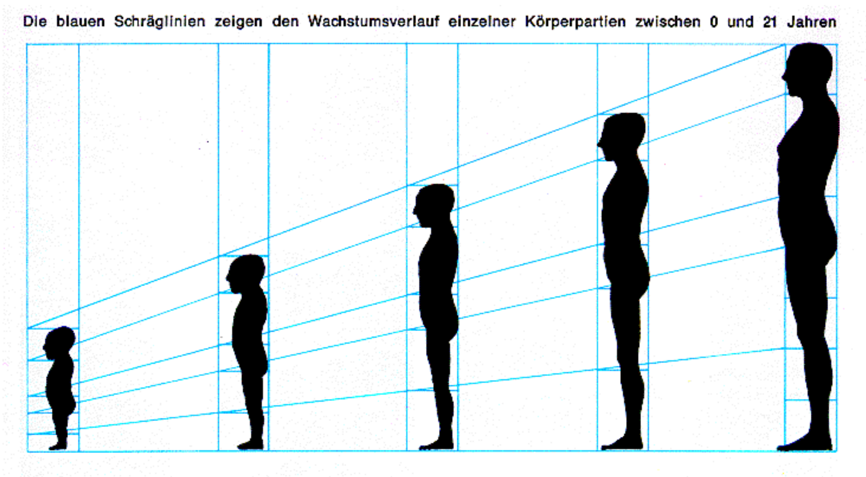
Maske aus der Mixteken-Kultur, Mexiko, um 1200 n. Chr. (aus Lommel, S. 115; dort farbig)



aus Landau, S. 45

Aufgabe 7:

Strecke die vier linken Personen auf dieselbe Höhe wie die rechte, möglichst ohne wesentliche Formänderung, also „maßstabsgerecht“. Was fällt auf?

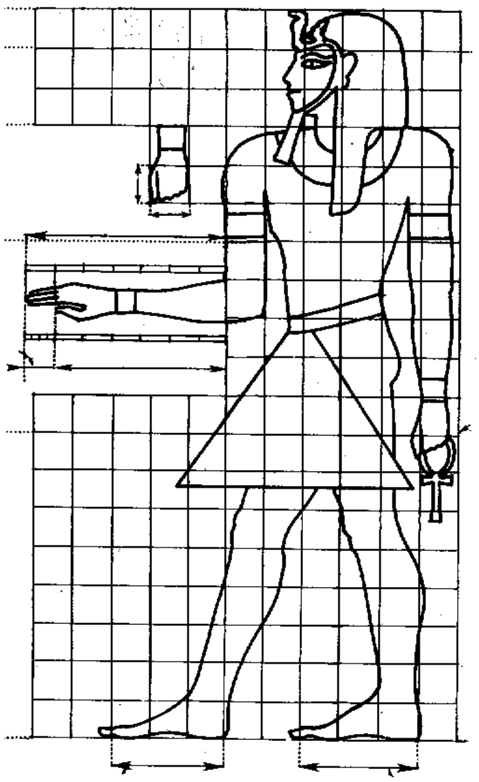


(aus Jaxtheimer, S. 113)

Aufgabe 8:

a) Bevor man ein richtig großes Bauwerk anfangen kann, braucht man einen Plan. Warum?

b) Bevor man ein richtig großes Bauwerk mit vielen Mitarbeitern anfangen kann, braucht man Planzeichnungen. Warum? Worauf muss bei der Bauausführung besonders geachtet werden?



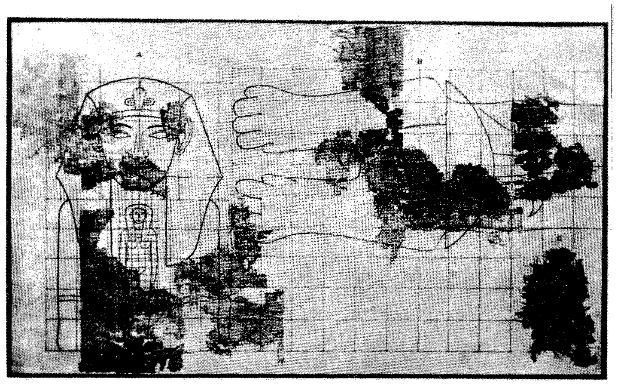
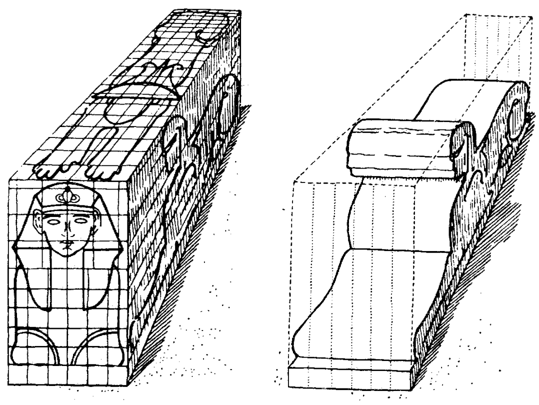
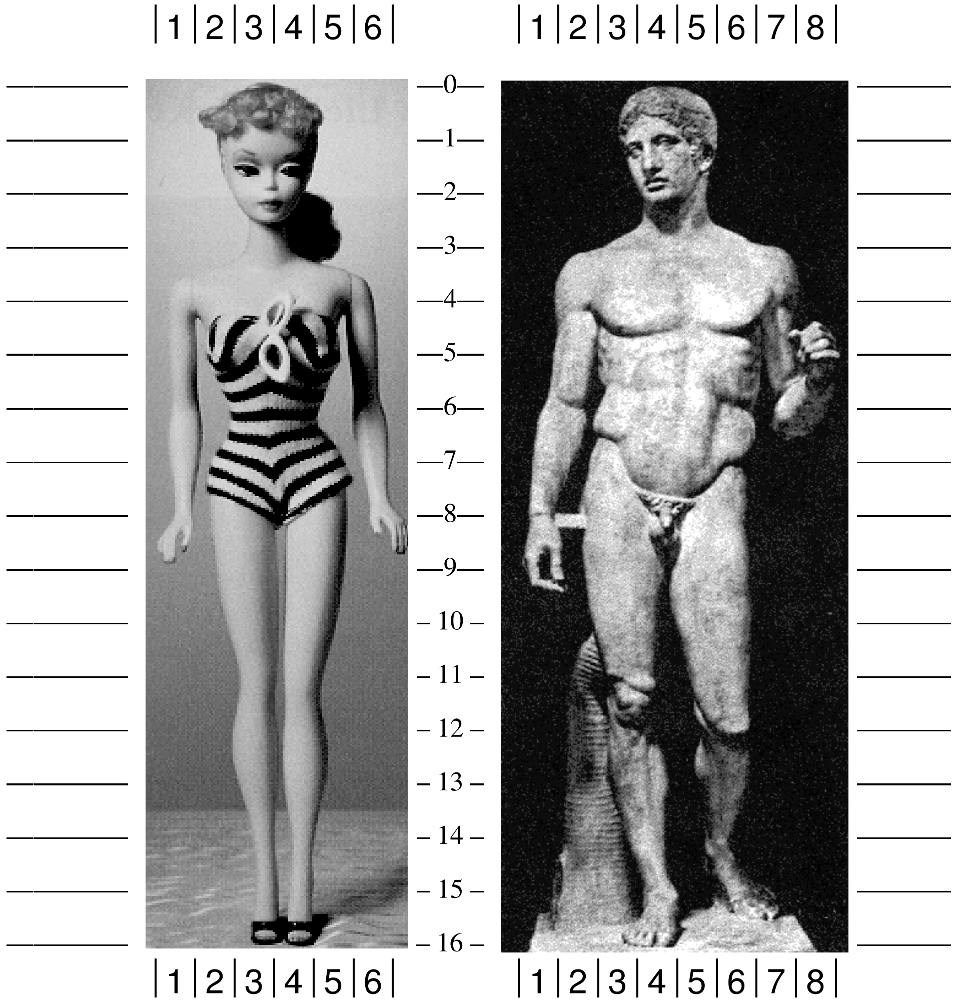


Abb. 6. Berliner Papyrus (Griechisch-römische Ära ab 3. Jh. v. u. Z.)



(linke Abb. aus Doczi, Schutzumschlag; rechte Abbn. aus Kaderavek, S. 14f.)

Aufgabe 9:



Links ist Barbie abgebildet (geb. 1959; aus Wunderlich), rechts Polyklets Speerträger (um 450 vor Chr.; aus Bammes).

a) Vergleiche die beiden Körper mit Hilfe der Zahlenskalen. Wenn Du magst, kannst Du die Skalen dafür noch etwas verfeinern.

b) Durch Barbie und durch Polyklet wurden bestimmte „Schönheitsideale" geprägt. Versuche beide mit Hilfe von Zahlenpaaren zu beschreiben.

c) Entwickle Dein eigenes „Schönheitsideal", beschreibe es mit fünf Zahlenpaaren, und zeichne ein Beispiel dazu.

Aufgabe 10:

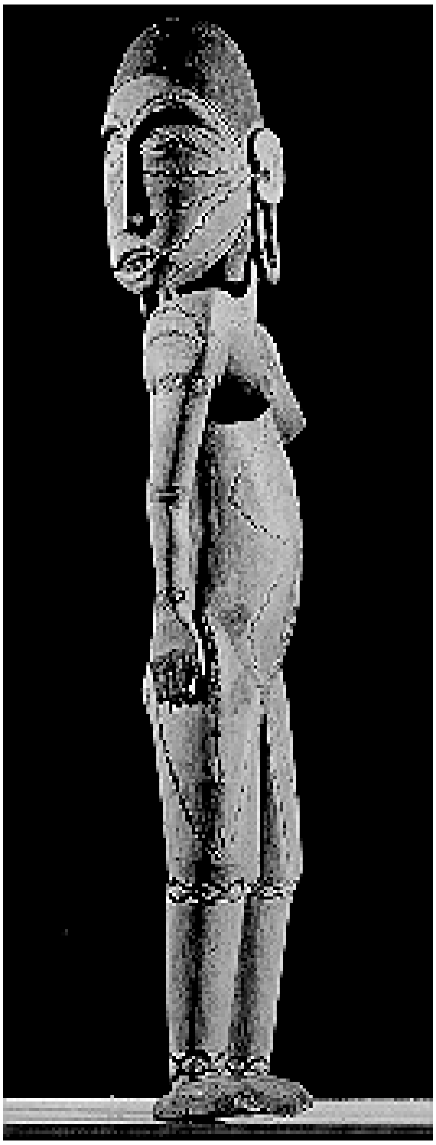
Was bedeuten die folgenden Wörter und Redewendungen:

„Analogie", „Proporz" „wohlproportioniert", „überproportional", „(Un-) Verhältnismäßigkeit der Mittel", „rational", „Fairness", Komparativ, Proportionalsatz?

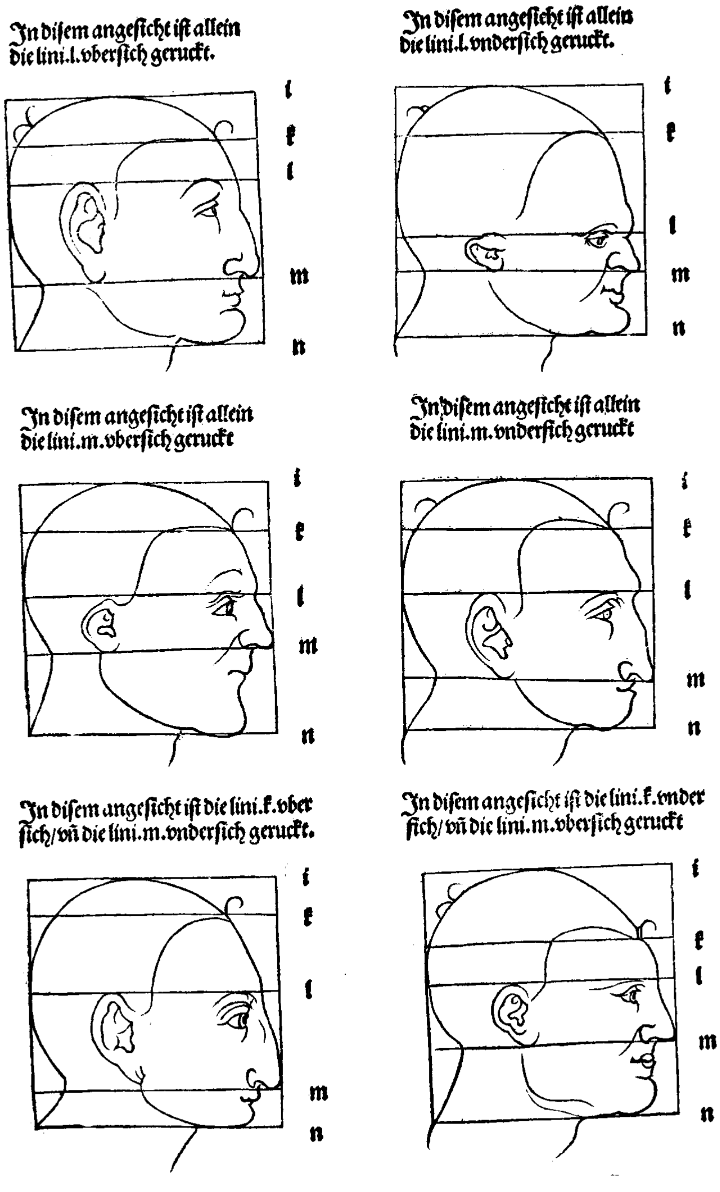
(Für ein klassisches Beispiel von Proportionsdenken vgl. Rousseau, Kap. 3.1)

Aufgabe 11:

Es geht nicht immer nur um Schönheit. Gerade Abweichungen vom Ideal können viel aussagen:



Ahnenfigur von den Admiralitäts-Inseln, Melanesien. Frühes 20. Jahrhundert. Holz. Höhe 60 *cm*. Museum für Völkerkunde, München.
(Aus Lommel, S. 91; dort farbig)



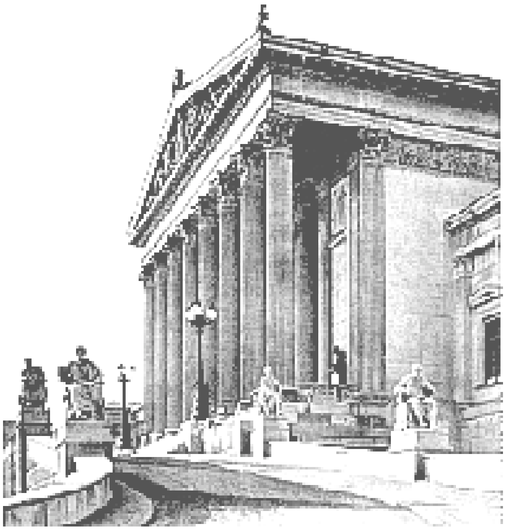
(aus Dürer: Vier Bücher von menschlicher Proportion)

a) Zeichne die Ahnenfigur sowie einen der Köpfe vergrößert ab, und berichte anschließend, wie du es gemacht hast und was dabei schief gegangen ist. (Könner machen so etwas übrigens ganz freihändig.)

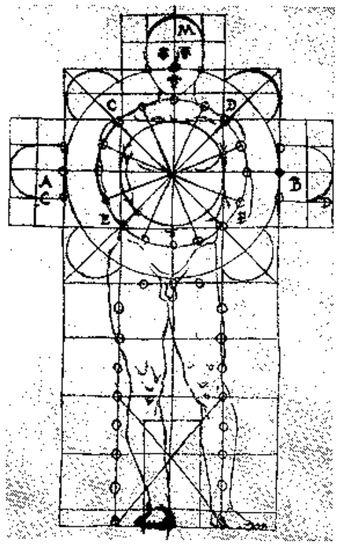
b) Was soll jeweils durch die Abweichungen vom Schönheitsideal ausgedrückt werden?

Aufgabe 12:

Vor zweitausend Jahren schrieb der Architekt Vitruv, der für die Kaiser Caesar und Augustus gearbeitet hat: „... Denn kein Tempel kann ohne Gleichmaß und Proportion eine vernünftige Form haben, wenn seine Glieder nicht in einem bestimmten Verhältnis zu einander stehen, wie die Glieder eines wohlgeformten Menschen.“ Was meinte er wohl mit „Gleichmaß“ und „pro Portion“? Kannst Du in folgenden Bildern Verhältnisse entdecken, die so sind wie bei einem „wohlgeformten“ Menschen?



Wiener Parlamentsgebäude
(aus Würtenberger, S. 97)



Kirchengrundriß von Francesco
di Giorgio, um 1500 (ebend, S. 204)

Aufgabe 13:

Schau Dich in Deiner Umgebung um und schätze: Welche Längenverhältnisse sind typisch für Fenster, Tische, Schränke, Bilderrahmen, Papierblätter, Häuser, Kirchen, Autos, ... ?

Ergänzung zu Aufgabe 5:

Im Hochsprung besser als Flöhe

Die sechs Millimeter großen Wiesen-Schaumzikaden halten den Weltrekord im Hochsprung. Dank einer bislang unbekannten Sprungtechnik überflügeln die Zikaden selbst Flöhe, die bisherigen Rekordhalter. Sie katapultierten sich auf eine maximale Höhe von 70 Zentimetern, was umgerechnet auf die Körpergröße einem 210-Meter-Hochsprung eines durchschnittlich großen Mannes entspricht. Das berichtet der britische Zoologe Malcolm Burrows im Fachblatt „Nature“.

Hinweise auf die Technik der Sprungkünstler gaben Aufnahmen mit einer hochauflösenden Videokamera: Die Insekten ziehen ihre extrem langen Hinterbeine unter den Körper und arretieren sie. In einem kräftigen Muskel, der elf Prozent des Körpergewichts ausmacht, wird wie in einem Katapult Energie gespeichert. Überschreitet die Energie des Muskels einen gewissen Punkt, löst sich blitzartig der „Verschluss“ der Hinterbeine. Durch die Freisetzung der Energie werden die Hinterbeine durchgedrückt, was den Körper enorm beschleunigt. Bei den besten Sprüngen heben die Tiere mit einer Geschwindigkeit von vier Metern pro Sekunde ab und beschleunigten dabei mit mehr als dem 400-fachen der Erdanziehungskraft. dpa

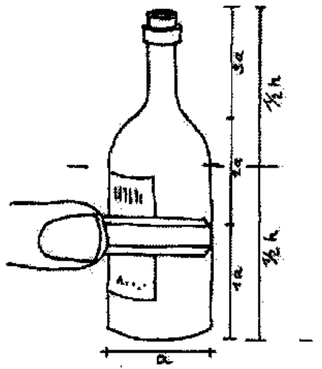
Aus: Bonner General-Anzeiger vom 9./10. August 2003

Ergänzung zu den Aufgaben 7/8:

Zeichnen
Konstruktion und Proportion

http://www.artefax.de/kunsterziehung/zeichnengrundab.html

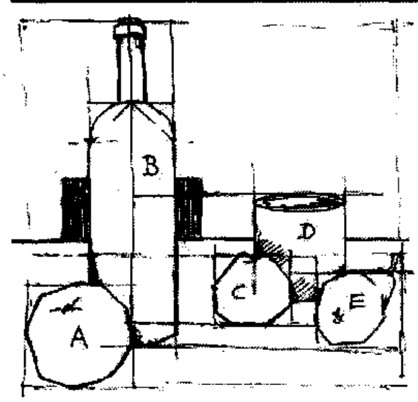
Das Messen von Proportionen



Wir greifen bei ausgestrecktem Arm ein Maß (z.B. die Breite) eines zu zeichnenden Gegenstandes zwischen Bleistiftende und Daumennagel ab und vergleichen es mit einem anderen Maß (z.B. der Höhe). Das Verhältnis dieser beiden Maße (z.B. Breite zu Höhe 1:4) nennt man Proportion. Wichtig bei dieser Methode ist, dass man mit großen Maßeinheiten beginnt (Gesamtbreite zu Gesamthöhe) und weiter nach einfachen Maßverhältnissen wie 1:1, 1:2, 1:3 usw. sucht. Man kann dann Aussagen treffen wie:

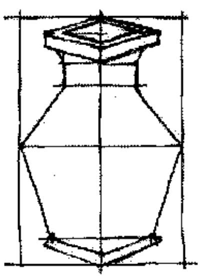
- die linke Tangente eines Gegenstandes teilt die Gesamtbreite im Verhältnis 1:3
- Die Mittelachse eines Gegenstandes befindet sich etwas rechts von der Mitte der Gesamtbreite
- der obere Rand eines Gegenstandes teilt die Gesamthöhe im Verhältnis 1:1 usw.

Die Konstruktion



Man überträgt die Größenverhältnisse aufs Papier und vergleicht ständig die Lage der Gegenstände zueinander. Es entsteht ein Gerüst aus Hilfslinien und Rechtecken, das die Gegenstände und ihre Lage zueinander beschreibt.In nebenstehender Abbildung können folgende Vergleiche angestellt werden:

- Apfel A:
rechte Tangente = Mittelachse Flasche B
höchster Punkt = Mitte Apfel C
- Flasche B:
Breite etwas kleiner als Breite Apfel A
halbe Höhe = oberster Punkt der Dose D
- Apfel C:
halbe Breite = rechte Tangente Dose D
unterster Punkt höher als unterster Punkt Flasche B
usw.

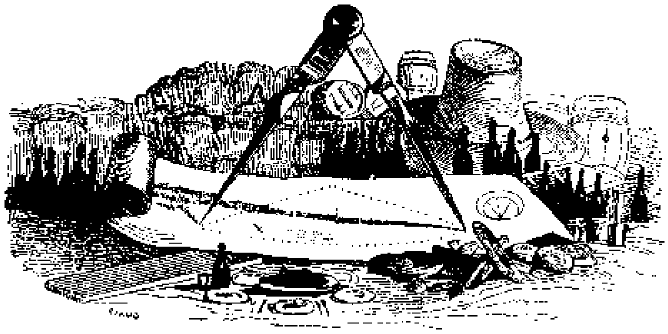


Symmetrische Gegenstände werden mit einer Hilfslinie für die Mittelachse versehen, wichtige Punkte mit waagrechten Linien gekennzeichnet und dann mit Geraden verbunden. Dann kann die Form gezeichnet werden. Organische Gegenstände werden überzeichnet, Rundungen zuerst durch geknickte Geraden ausgedrückt, man erhält so eine charakteristische Darstellung des Objektes. Wenn die Umrisse aller Gegenstände gezeichnet sind, sucht man die Überschneidungspunkte.

3. Verhältnisse übertragen, verketten, multiplizieren

Aufgabe 14:

Der Leser habe die Güte zu bemerken, daß der Kaiser in dem letzten Artikel der Urkunde, nach welcher ich meine Freiheit erlangte, mir so viel Speise und Trank bewilligte, als für 1728 Liliputaner genügen wurde. Einige Zeit nachher fragte ich einen meiner Freunde bei Hofe, wie man gerade auf diese bestimmte Zahl gekommen sei, und erhielt zur Antwort: die Mathematiker hätten die Größe meines Körpers mit einem Quadranten aufgenommen, und da sie nun berechneten, daß



dieselbige die ihrige im Verhältnis von zwölf zu eins übertraf, zogen sie aus der Ähnlichkeit ihrer Körper den Schluß, daß der meinige wenigstens 1728 der ihrigen enthalten müsse und deshalb ebensoviel Nahrung erfordere als jene Zahl Liliputaner. Hierdurch kann sich der Leser einen Begriff von der Klugheit dieses Volkes und von der verständigen und genauen Ökonomie eines so großen Fürsten verschaffen.

Aus: Jonathan Swift: Gullivers Reisen – Mit Illustrationen von Grandville. Welsermühl, Wels (Österreich) : Verlag Lothar Borowsky o. J.

Erläutere an zwei Würfelgebäuden, die einen typischen Liliputaner und den gestrandeten Lemuel Gulliver darstellen sollen, warum die Liliputaner ausgerechnet auf 1728 kamen. (Gullivers Reisen war 1726 erschienen; und der Kaiser von Liliput hätte besser nicht nur seine Mathematiker, sondern auch seine Biologen und Mediziner fragen sollen. Da der Wärmehaushalt stark von der Kühlung an der Körperoberfläche abhängt, hätte man einiges an Nahrung sparen können. Vielleicht wussten das die Liliputaner auch und wollten nur sicher gehen. Außerdem wollten sie bestimmt höflich erscheinen.)

Aufgabe 15:

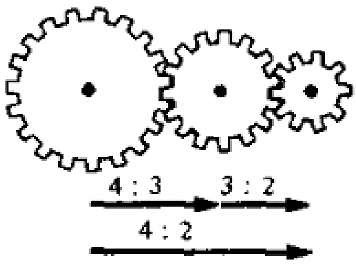
In einer Klasse sind 28 Schüler. Das Verhältnis Mädchen zu Jungen ist 4:3. Wie viele Mädchen sind es? Zeichne ein passendes Muster im Stil von Aufgabe 3. (Aufgabe aus TIMSS 2)

Aufgabe 16:

„Ich habe einen neuen Regenschirm für Mutti als Geburtstagssgeschenk gekauft. Er kostet 24 €. Gibst du die Hälfte zu?“ – „Nö, das find ich unfair. Du hast ja doppelt soviel Taschengeld wie ich!“ (nach Fischer, S. 32) Zeichne ein passendes Muster im Stil von Aufgabe 3.

Aufgabe 17:

Das ... Beispiel kann sehr gut dazu dienen, die Verkettung von Verhältnissen zu verdeutlichen, wenn man mit wenigen Handgriffen aus Lego, Fischer-Technik oder ähnlichen Baukästen eine Übersetzung baut oder bauen läßt.

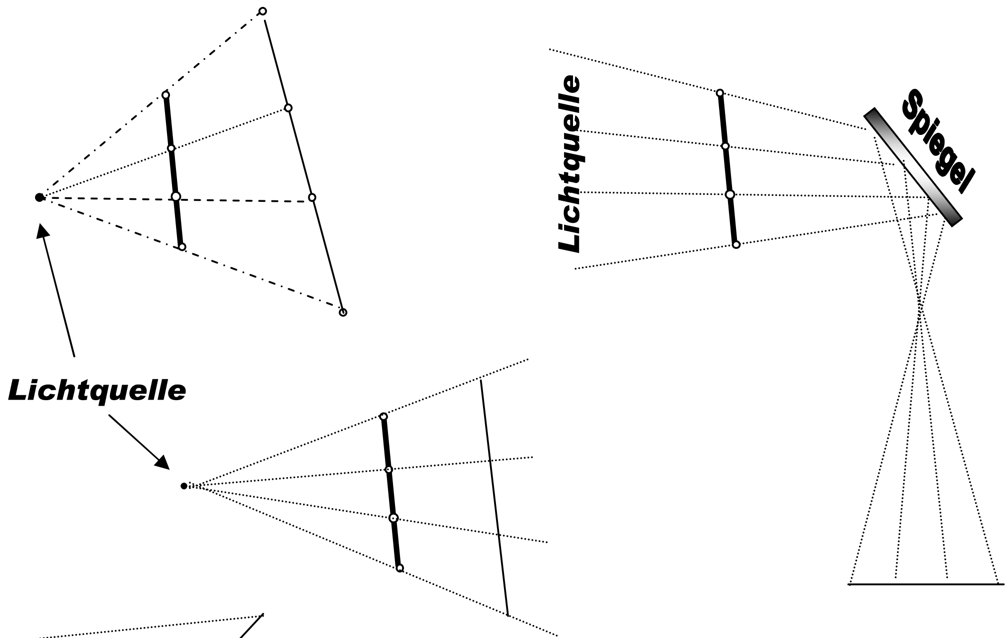


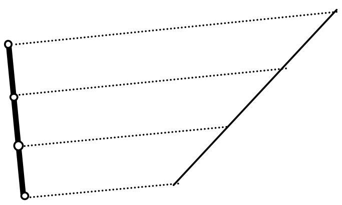
Mechanisches Modell der multiplikativen Verkettung (aus Strehl, S. 166)

Was ist gemeint? Zähle die Zähne, und überlege, was beim Drehen des kleinen Rades passiert.

Aufgabe 18:

a) Was unterscheidet die folgenden Vergrößerungs- bzw. Verkleinerungsverfahren?





(Hinweis: Wo keine Parallelen oder wenigstens Senkrechte im Spiel sind, ändern sich die Verhältnisse.)

b) Nenne Beispiele, bei denen diese Abbildungsverfahren vorkommen.

c) Welche dieser Verfahren kann man benutzen, um genauer zu messen oder zu zeichnen?

d) Welches Verfahren kann man benutzen, um eine Strecke zeichnerisch genau zu siebenteln?

Aufgabe 19:

Zwei Streckenverhältnisse heißen „mathematisch ähnlich“, kurz „m-ähnlich“, wenn man die beiden Verhältnisse durch Auswechseln der beteiligten Längeneinheiten genau gleich machen kann.

Beispiele: 4*cm* : 6*cm* ist m-ähnlich mit 4*m* : 6*m* und auch mit 4*km* : 6*km* oder 4*Meilen* : 6*Meilen* oder 24*mm* : 36*mm* , aber nicht mit 7*cm* : 10*cm* und auch nicht mit 6*cm* : 4*cm* – es kommt auf die Reihenfolge an.

Zwei Streckenverhältnisse heißen „so ähnlich“, „recht ähnlich“ oder „fast-ähnlich“ (f-ähnlich), wenn man sie durch kleine Änderungen der beteiligten Strecken m-ähnlich machen kann. Was „kleine Änderungen“ sind und was nicht, muss man von Fall zu Fall entscheiden.

Bei ganzzahligen Verhältnissen im Großen nimmt man meistens an, dass es auf die genauen Zahlen nicht so ankommt, dass z. B. *4km* : 6*km* recht ähnlich mit 7*Meilen* : 10*Meilen* sein dürfte. *Ob* jedoch *24mm* : *36mm* f-ähnlich mit 7*cm* : 10*cm* ist, spielt eine Rolle bei Papierbildern von Kleinbildfilmen: Meistens sind die Standardvergößerungen in Ordnung, aber manchmal ist eine Nase abgeschnitten oder ein Ohr, und es gibt großen Ärger, wenn das betreffende Körperteil auf dem Negativ ganz vorhanden ist.

a) Zeichne je fünf Beispiele von m-ähnlichen und f-ähnlichen Verhältnispaaren mit Hilfe der Muster aus Aufgabe 3.

b) Bei Digitalkameras und Computerbildschirmen findet man vielfältige „Pixelangaben“. Was bedeuten sie? Sind die jeweiligen Bilder m- oder f-ähnlich? Wie passt das zu den üblichen Papierbilder- und Din A-Formaten?

c) Sind die Din A-Formate m- oder f-ähnlich zu den Din C-Formaten? Kannst du dir dein Ergebnis erklären?

d) Welche Rechtecke sind m-ähnlich zu Quadraten? Welche f-ähnlich?

e) Wie müsste ein Liliputaner aussehen, der Lemuel Gulliver m-ähnlich sähe?

f) Wie müsste ein Liliputaner aussehen, der Lemuel Gulliver nicht f-ähnlich sähe?

g) Was hältst du von folgender Faustregel: Ändert man in einem Verhältnis die vorkommenden Zahlen um einen Einer ab, dann entsteht meistens f-ähnliches Verhältnis. Gib einige Beispiele und Gegenbeispiele an, und versuche das Wörtchen „meistens“ durch eine genauere Angabe zu ersetzen.

Aufgabe 20 (vgl. Kasten 2):

a) Welche Bedeutung haben

- Maßstäbe von Maßstäben?
- „Die nächste Blattstellung“?
- Laufgeschwindigkeit im Zug?
- Relative Häufigkeiten von relativen Häufigkeiten?
- Chancen von Chancen?
- Gerechte Teilungen von gerechten Teilungen?
- Mehrfache Zahnradübersetzungen?
- Die Aufeinanderfolge von Steigungen?
- Mischungen von Mischungen?
- Die Aufeinanderfolge von Vergrößerungen?

b) Erfinde kleine Geschichten zu zwei Zahlenbeispielen.

c) Zeichne zu deinen Geschichten.

d) In welchen Fällen ist f-Ähnlichkeit wichtig, in welchen m-Ähnlichkeit?

Aufgabe 21:

Der Legende nach hat Pythagoras als erster die Beziehungen zwischen Teilverhältnissen und harmonischen Zusammenklängen studiert und einen diesbzgl. „Kanon“ (Regelwerk) aufgestellt. Danach gab es unter den „emmelischen“ (anheimelnden, himmlischen) Zusammenklängen von Tonpaaren solche, die zu einem einzigen Eindruck zu verschmelzen schienen, die „symphonischen“. Ganz besonders war das bei Tönen der Fall, die von gleichen Saiten mit dem Längenverhältnis 2 : 3 (Quinte) erzeugt wurden, mit Abstrichen auch beim Verhältnis 3 : 4 (Quarte). Das Seitenverhältnis 1 : 2 erscheint dagegen langweilig: „derselbe“ Ton erklingt lediglich auf zwei Tonhöhen. Weil die Quinten so besonders schön klingen, ist vielleicht schon Pythagoras auf die Idee gekommen, aus ihnen alle anderen Töne herzuleiten. Das Programm mag etwa wie rechts gelautet haben.

Start:

Nimm eine Saite der Länge l, und schlage sie an.

Reduktion mit R:

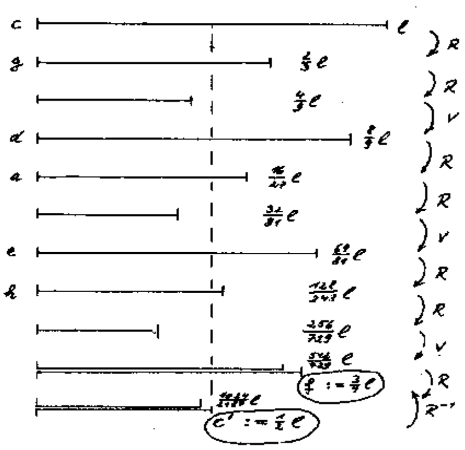
Klemme die Saite auf 2/3 der Länge ab.

Eventuelle Verlängerung mit V:

Ergibt sich durch den vorigen Schritt ein „zu kurzes“ Saitenstück, nämlich eines, das unter der Hälfte der Anfangssaite liegt, dann ersetze es durch eines der doppelten Länge, d.h. durch einen „gleichen“, aber tieferen Ton.

Wiederholung:

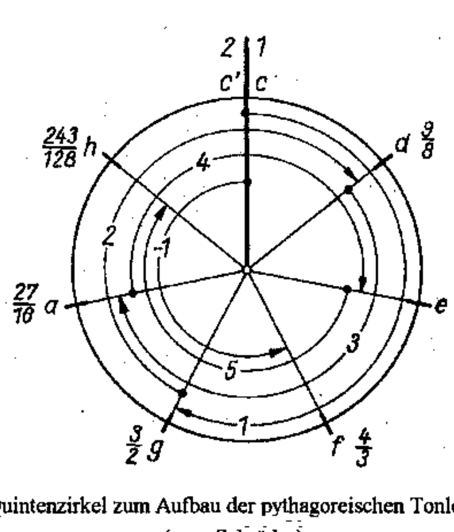
Setze die neue Saitenlänge gleich l, und kehre an den Start zurück.



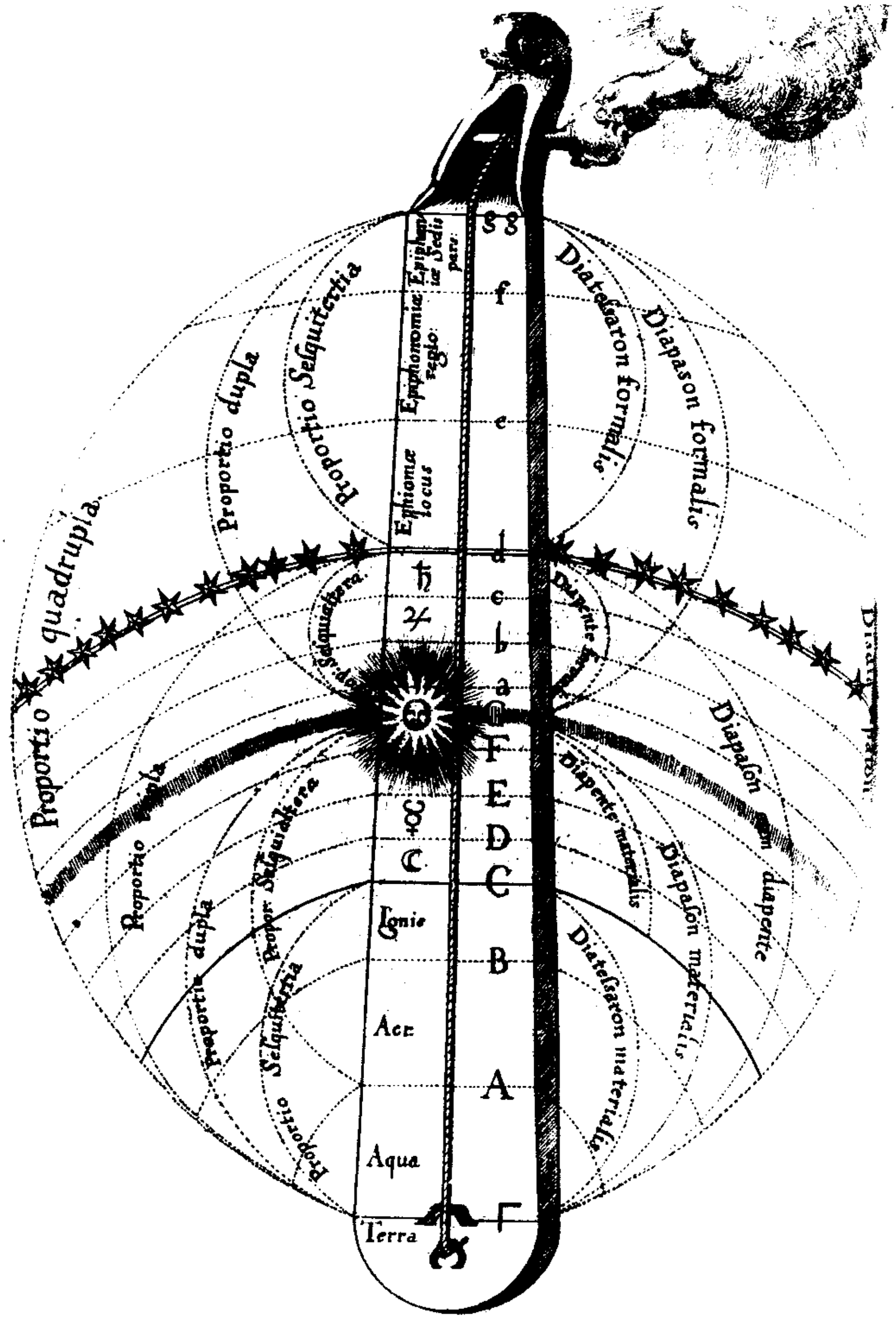
Zeichne einen Quintenzirkel nach diesem Programm, und benenne die Töne.

Näheres, so auch den folgenden Text, findet man in Schröder..

Den auf *h* folgenden Ton zur Saitenlänge 512/729 *l* verwarf man, da er schlecht zur 3/4-Verkürzung mit *R'* paßte, der Quarte zum Grundton *c*, die immerhin auch aus *c'* mittels R^{-1} ableitbar war und somit halbwegs ins Quintenschema paßte. Insgesamt begnügte man sich ursprünglich mit sieben verschiedenen Tönen bzw. Saiten der Laier (später zuzügl. der Oktave). Ordnete man sie der Länge nach an, so wurde die *g*-Saite zur fünften (pente bzw. lat. Quinte), die *f*-Saite zur mittleren (mese bzw. Quarte) und die *c'*-Saite zur achten (diapason = der durch alle Töne gehende Akkord bzw. Oktave). Da man alle 7 Töne gewissermaßen zyklisch angeordnet hatte, liegt ein Kreisdiagramm mit Siebeneck nahe, der sog. „Quintenzirkel“ (in der Abbildung vom höheren Ton *c'* ausgehend durch Saitenverlängerung aufgebaut, daher die Kehrwerte der o.a. Brüche)



Quintenzirkel zum Aufbau der pythagoreischen Tonleiter (aus Schröder)



Monochord-Darstellung aus C. Seife: Zwilling der Unendlichkeit - Eine Biographie der Null. München: Goldmann-TB 2002, S. 38 (ursprüngliche Bildquelle leider nicht angegeben).

4. Verhältnisse addieren?

Aufgabe 22:

Drei Fünftel einer Klasse sind Mädchen, und es kommen noch fünf Mädchen und fünf Jungen dazu.

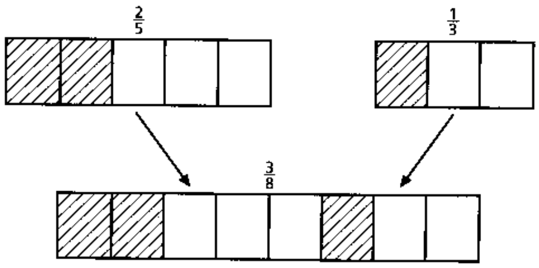
a) Zeichne dazu eine Erläuterung.

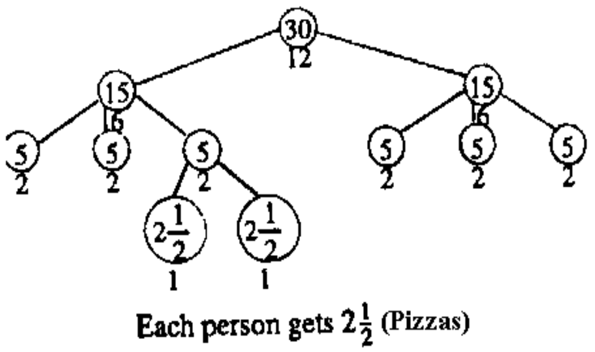
b) Gibt es am Ende mehr, genauso viele oder weniger Mädchen als Jungen in der Klasse?

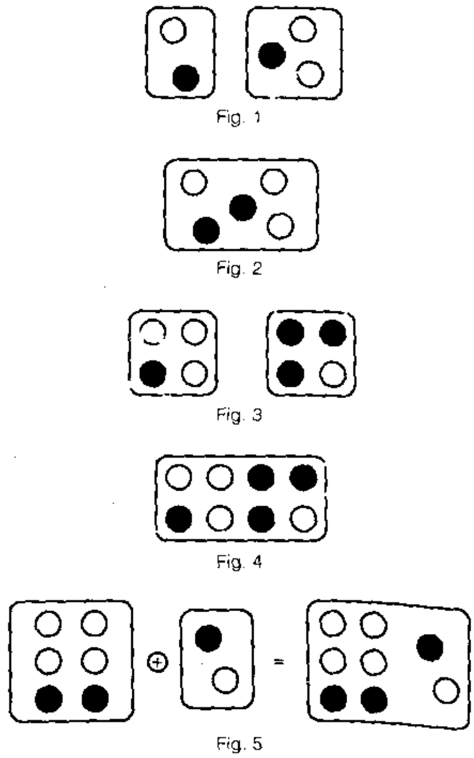
(Es handelt sich um eine leicht abgewandelte TIMSS-Aufgabe; vgl. Beaton u. a., S. 97, und Aufg. 22.)

Aufgabe 23 (vgl. Kasten 2 und Howard):

Erkläre wie hier zusammen gerechnet wurde (Abbn. aus Padberg, Streefland bzw. Howard):







Aufgabe 24:

Auch in anderen Fällen rechnet man mitunter nach der Regel „Gleiches zu Gleichem“. Wir wollen dieses Rechenverfahren ⊕-Addition nennen. Was bedeutet die ⊕-Addition in den folgenden Fällen:

- Spielergebnisse?
- (typografische) Formatangaben?
- Relative Häufigkeiten?
- Chancen?
- Notenspiegel von Klassenarbeiten? Leistungsberechnungen?
- Weg-Zeit-Angaben?
- Hebellasten?

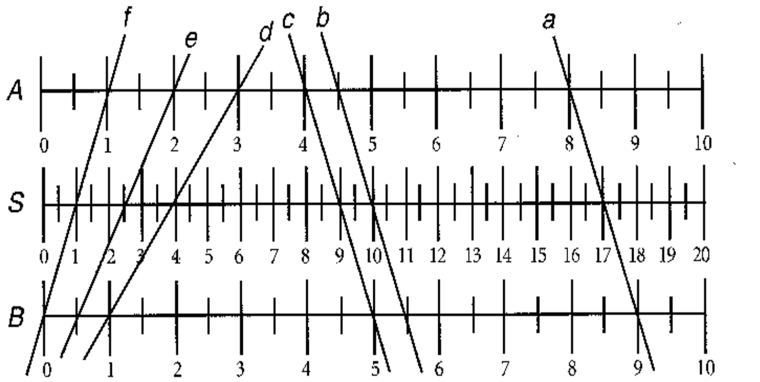
- Steigungen am Berg?
- Mischungsverhältnisse?
- Stimmverhältnisse bei Wahlen?

Erfinde dazu kleine Geschichten mit Zahlenbeispielen und zeichne dazu.

Aufgabe 25:

Die Abbildungen in dieser und in der nächsten Aufgabe sowie im Wesentlichen auch die Übungsideen stammen von C. Haberman's Beiträgen im Supplementary Booklet zum NCTM-Yearbook 2002 (S. 29-35).

a) Die Abstände AS und SB seien gleich groß, die Skalen parallel. Man verbinde (z.B. auf dem OP) je einen Teilpunkt der Skala A mit einem der Skala B und lasse dann den Schnitt mit S benennen. Von A oder B kann man auch mit einem Punkt von S verbinden und auf der anderen Grundskala ablesen. Wo würden sich bei genügender Skalenlänge (A-31½ ; B-47¼) mit S treffen? Wie ist es mit (A-31½ ; S-47¼)? Es soll eine Gleichung aufgestellt werden, die die Beziehung zwischen A, B und S zusammenfasst.

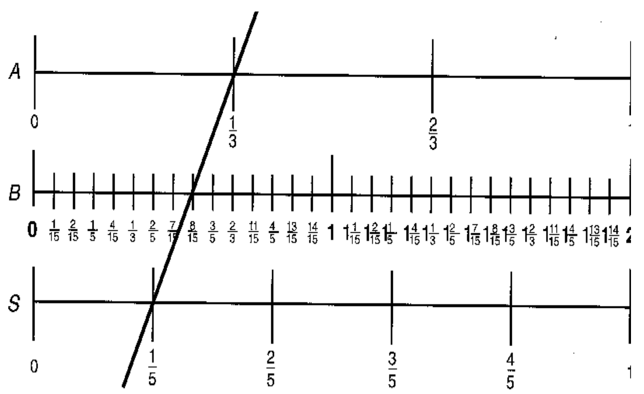


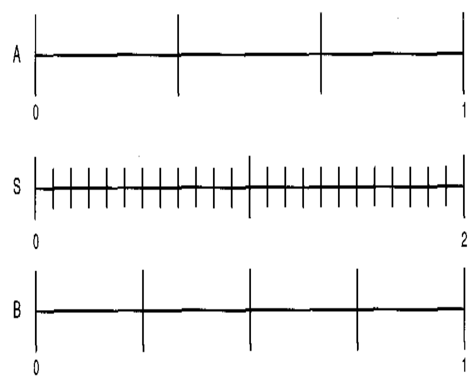
b) Wie müsste S eingeteilt werden, wenn SB dreimal so groß wie AS ist? Warum?

Aufgabe 26:

Die Aufgaben rechts können mit den nachfolgenden Diagrammen gelöst werden. Wie?

$\frac{2}{3}+1$	$1+\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$
$4\frac{2}{3}+\frac{7}{12}$	$\frac{11}{12}-\frac{2}{3}$	$1\frac{7}{12}-\frac{1}{4}$	$9\frac{1}{3}+4\frac{2}{5}$
$\frac{17}{15}-\frac{4}{5}$	$\frac{5}{12}-\frac{1}{4}$	$3\frac{4}{15}-1\frac{2}{3}$	$8\frac{1}{15}-3\frac{2}{5}$





Aufgabe 27 (aus Howard):

Frau Jones hat eine Klasse mit 30 Schülern. Ein Drittel davon sind Jungen. Herr Byrum hat eine Klasse mit 20 Schülern, von denen ¾ Jungen sind. Welchen Jungenanteil hat eine Versammlung beider Klassen?

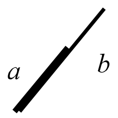
Aufgabe 28 (nach Howard):

a) Schüttet man 5 Liter einer 20%igen Lösung mit 10 Litern einer 50%igen Lösung desselben Stoffs zusammen, dann erhält man eine ....%ige Lösung. Erläutere einen Rechenweg mit ⊕.

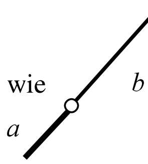
b) Wie viele Liter der 50%igen Lösung muss man zu den 10 Litern 20%iger Lösung kippen, damit eine 25%ige Lösung entsteht?

Aufgabe 29:

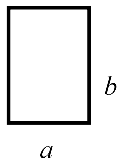
a : b kann man sich wie



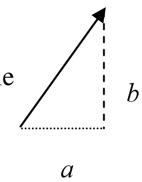
oder wie



oder wie



oder wie



vorstellen. (Vgl. Aufgabe 3) Manchmal leuchtet die eine Darstellung mehr ein, manchmal die andere. Erfinde für jeden Fall eine „grafische Verhältnisaddition“

$$(a\ :\ b)\oplus(c\ :\ d).$$

Aufgabe 30:

Begründe mit Hilfe einer der grafischen Verhältnisdarstellungen, dass

a) das Ergebnis einer ⊕-Addition immer „zwischen“ den beiden Ausgangsverhältnissen liegt
und

b) dass m-ähnliche Verhältnisse nicht unbedingt dieselbe Summe liefern.

c) Was läßt sich über $(a : b)$ und $(c : d)$ sagen, wenn $(a : b) \oplus (c : d) = (3a : 3b) \oplus (c : d)$ ist?

d) Was läßt sich über $(a : b)$, m und $(c : d)$ sagen, wenn $(a : b) \oplus (c : d) = (\mathrm{m}\cdot a : \mathrm{m}\cdot b) \oplus (c : d)$ ist?

5. Anmerkungen zum theoretischen Hintergrund

Verhältnisse oder Proportionen sind nach unser Auffassung gestaltliche oder Formbegriffe, die zunächst der relativen Beschreibung in konkreten Situationen dienen. Diese Beschreibungsfunktion ist z. B. fundamental für die Mathematsierung von Dreisatzkonstellationen:

	Größe I	Größe 2	
$\frac{m}{n}\bullet$	a	b	$\bullet\frac{m}{n}$
	c	d	

In den siebziger und achtziger Jahren des 20. Jhs. Wurden bekanntlich allerlei enttäuschende Erfahrungen mit Versuchen gemacht, das Verhältnisdenken durch proportionale und antiproportionale Funktionen zu ersetzen. Nicht einmal „quotientengleiche“ und „produktgleiche Paare“ konnten die Brücke ausbessern.

Ob und ggfs. wie man mit Verhältnissen rechen sollte, liegt eben nicht von vornherein fest. Und das macht Verhältnisse sympathischer, intuitiver als Quotienten. Es ist eben nicht dasselbe, ob gegebene Verhältnisse durch ein Zahlen- oder Größenwertpaar gestaltlich charakterisert werden oder ob man sie gleich für Rechenzwecke aufbereitet. Anders gesagt: Die Identifikation von m-ähnlichen Verhältnissen (zu Bruchzahlen) und der algebraische Umgang mit Verhältnissen (und Brüchen) ist nicht naturgegeben, sondern zweckgebundene Konventionssache. Vermutlich weil das so ist, nützen die traditionellen Appelle zu mehr Anschaulichkeit in der Bruchrechnung herzlich wenig. (Nach Freudenthal schaden sie sogar, weil Bruchrechnung mit (all-)„gemeinen Brüchen“ ein formales Spiel ist, das den Formalismus der Buchstabenrechnung vorbereitet.)

Im Falle des Kürzens, Erweiterns, Multiplizierens und Dividierens – und folglich bei Dreisatzaufgaben – ist die Identifikation von Verhältnissen (Brüchen) bis auf Verfeinerungen (Erweitern) oder Vergröberungen (Kürzen) kein Problem, weil die Punktrechenarten für Verhältnisse und Brüche (Bruchoperatoren) dieselben sind. Weil Größen und Verhältnisse eng zusammen gehören, sind die Punktrechenarten die natürlichen Rechenoperationen für Proportionen und Bruchzahlen. Für die Addition von Verhältnissen (Größenwertpaaren) stehen jedoch zwei Kandidaten bereit, die „falsche“ Bruchaddition $\oplus$ und die „richtige“ (Aufg. 25 und 26), die dann und nur dann Sinn macht, wenn die Teil-Ganzes-Deutung angebracht ist.

Die oft ganz zu Unrecht so bezeichnete „falsche“, strukturell einfachere Bruchaddition liegt dem Verhältnisbegriff näher (Aufg. 23 und 24), es ist nämlich die „richtige“ Addition für Zeiger (= Vektoren). Dies hat Vor- und Nachteile: Die Addition und die S-Multiplikation der Vektorrechnung automatisieren Strahlensatzverhältnisse und Ähnlichkeitsbeziehungen auf sehr angenehme, anschauliche und effektive Weise, aber die Summenbildung verträgt sich schlecht mit der Identifikation m-ähnlicher Verhältnisse (d. h. mit Bruchzahlen), und sie liefert stets Mittelwerte, nicht die gewohnte Summandenvergrößerung.

Geschwindigkeiten können sinnvoll als Brüche interpretiert und addiert werden, solange sich alles im eindimensionalen Kontext eines Schienenstranges abspielt. Im zweidimensionalen Fall, etwa beim schiefen Wurf, geht das so nicht; hier ist bekanntlich die (Vektor-) Pfeildarstellung und -verkettung angemessener. Durchschnittsgeschwindigkeiten können entsprechend nach dem Schema $v_1 \oplus v_2 :=$ (Weg 1 + Weg 2) : (Zeit 1 + Zeit 2) errechnet werden. Entsprechend geht es mit Steigungs- und Rechtecksverhältnissen, Leistungs-, Quoten- und Ratenbegriffen sowie beim Proporz. Aus fachlicher Sicht ist es folglich keine redliche Argumentation, wenn in Klasse 6 bei irgendwelchen Besprechungen des Kardinalfehlers der Bruchrechnung behauptet wird, es gehe nicht an, dass die Summe $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{a+c}{b+d}$ zwischen den (positiven) Summanden liege, oder es gehe nicht an, dass die Summe von Brüchen nicht invariant gegenüber Erweitern und Kürzen sei (vgl. Aufg. 30).

Bevor die Dezimalbruchrechnung nach 1600 Allgemeingut wurde, bestimmte man Mittelwerte gern mithilfe der „falschen“ Bruchaddition, so z. B. in Nicolas Chuquets „Triparty“ von 1484 (vgl. Tropfke 1980). Manchmal nennt man diese Addition auch Chuquet-Mittel (vgl. Hischer). Das berühmteste Beispiel betrifft den ausgezeichneten Wert $\pi \approx 113\backslash 355$ von Tsu Chung-Chi (um 470 n. Chr.; Smith II, S. 309), dessen Herleitung leider nicht überliefert wurde. B. Adriaen Anthoniszoon und sein Sohn Adriaen Metius erhielten denselben Wert aber um 1600 wieder, und zwar im Wesentlichen aus den beiden Archimedischen Näherungen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{6}{42}$ durch „falsche Bruchaddition“ (Smith II, S. 310):

$$\pi < 3\frac{10}{71} \oplus 3\frac{6}{42} = \frac{355}{113} < \pi + 3\cdot 10^{-7}\ .$$

Dass diese Näherung so gut ist, nämlich um weniger als $3\cdot 10^{-7}$ größer als π, erklärt sich daraus, dass es sich um einen der Näherungsbrüche aus der Kettenbruchentwicklung handelt – und solche Näherungsbrüche sind bekanntlich (bei gegebener Größenordnung des Nenners) optimal.

In Euklid V und VII findet sich die „falsche“ Addition, wenn man so will, in Form korrespondierender Additionen von Proportionsgleichungen, weil von vornherein modulo m-Ähnlichkeit argumentiert wird. Sehr viel ausgiebiger behandelt Euklid verkettete Verhältnisse, z.B. auch beim Beweis der berühmten Sätze VI 23-24 über das Ergänzungsparallelogramm.

Das erst gestaltliche, dann kinematische und schließlich (dimensionslos) funktionale Proportionsdenken ist jedenfalls viel älter und viel traditionsreicher als die Brucharithmetik(en). Dass Proportions- und Verhältnismetaphern an der Oberfläche der Umgangssprache selten geworden sind (s. Aufg. 10), sollte nicht über deren erhebliche Präsenz im kollektiven Bewußtsein und insbesondere in Mathematisierungen hinweg täuschen. Die Quantifizierung von Verhältnismäßigkeit liegt der angewandten Differentialrechnung ebenso zugrunde wie der modernen Vektorrechnung und dem Korrelationsdenken. Und: Verhältnismäßigkeit ist ein zentraler, wenn nicht der zentrale Grundgriff unseres Gerechtigkeits- und Gesellschaftsdenkens – man lese Rousseau. Wie kann man allgemeine Bruchrechnung für Nichtmathematiker sinnvoll finden, ohne von Proportionen zu handeln?

Literatur

Andelfinger, B.: Thema: Proportion. Soest: Landesinstitut für Curriculumentwicklung, Lehrerfortbildung und Weiterbildung (Didaktischer Informationsdienst Mathematik, Curriculum Heft 22) 1981 (Quellensammlung dazu:) 1982.

Baireuther, Peter: Konkreter Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth: Franzbecker 1990.

Baireuther, Peter: Zur Kontinuität von Lernprozessen im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1998, S. 102-105.

Benoit, Paul; Chemia, Karine; Ritter, Jim (Hrsg.): Histoire de fractions – fractions d’histoire. Basel u.a.: Birkhäuser 1992.

Fischer, R.: Die Verhältnisrechnung – (k)ein Thema für die Grundschule? In: Math. Unterrichtspraxis, 4. Quartal 1994, S. 31-35.

Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1. Stuttgart: Klett 1973.

Führer, L.: Geschicktes Probieren. In: Mathematik lehren 91 (1998), S. 50-54

Griesel, Heinz: Zur didaktisch orientierten Sachanalyse des Begriffs Größe. In: JMD 18.4 (1997), S. 259-284.

Hischer, Horst: „Fundamentale Ideen“ und „Historische Verankerung“ – dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung. In: Mathematica didactica 21.1 (1998), S. 3-20.

Howard, A. C.: Addition of Fractions – The unrecognized Problem. In: Mathematics Teacher 1991, S. 710-713.

Käfer, K.: Der Kettensatz – Ein Beitrag zur Geschichte und Theorie des kaufmännischen Rechnens. Zürich: Schulthess & Co. 1941.

Kirsch, A.: Eine Analyse der sogenannten Schlußrechnung. Im: Mathematisch-physikalische Semesterberichte, Neue Folge Bd. XVI (1969), S. 41-55.

Kirsch, A.: Elementare Zahlen- und Größenbereiche. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1970.

Kirsch, A.: Mathematik wirklich verstehen. Köln: Aulis 1987.

Litwiller, B.; Bright, G. (Ed.): Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions. Reston, Virg.: NCTM 2002 Yearbook.

Litwiller, B.; Bright, G. (Ed.): Classroom Activities for Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions. Reston, Virg.: NCTM 2002 Yearbook supplementary Booklet.

Malle, G.:Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg 1993.

Mitschka, A.: Das Rechnen mit Verhältnissen. Ratingen: Henn 1971.

Padberg, F.: Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg: Spektrum (3. Aufl.:) 2002.

Panofsky, E.: Die Entwicklung der Proportionslehre als Abbild der Stilentwicklung. In E. Panofsky: Aufsätze zu Grundfragen der Kunstwissenschaft (Hrsg. v. H. Oberer/E. Verheyen). Berlin (2. Aufl.:) 1974, S. 69-204.

Profke, Lothar: Bruchrechnung im Mathematikunterricht. In: Mathematik lehren und lernen – Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel 1991, S. 143-155.

Rousseau, J.-J.: Vom Gesellschaftsvertrag oder Grundsätze des Staatsrechts. (Übers. und Hrsg. H. Brockard) Stuttgart: Reclam 1986 (frz. Original 1762).

Scholz, E. (Hrsg.): Geschichte der Algebra. Mannheim: BI 1990.

Streefland, Leen: Fractions in Realistic Mathematics Education. Dordrecht u.a.: Kluwer 1991.

Strehl, R.: Grundprobleme des Sachrechnens. Freiburg: Herder 1979, Abschnitt IV.6.

Szabó, A.: Die Entfaltung der griechischen Mathematik. Mannheim: BI 1994.

Tombrooke, J. W. C.: The Persistent Influence of Housekeeping Problems on the Earlier Scientific Work of Isaak Newton. Bahia: Dubbledupf 1931.

Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik, Band 3: Proportionen, Gleichungen. Berlin: de Gruyter (3. Aufl.) 1937.

Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementarmathematik, Band 1 – Arithmetik und Algebra. Berlin/New York: de Gruyter (4. Aufl.:) 1980.

Weber, H.: Verhältnisse. In: Weber, H./Wellstein, J. (Hrsg.): Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis. Leipzig: Teubner 1909, 5. Abschnitt, S. 90-105.

Winter, H.: Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. In: Mathematica didactica 4/1982, S. 185-211.

Winter, H.: Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht – dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung. Manuskript TH Aachen 1999 (als pdf-Datei abrufbar unter www. http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/suche_m_schlagwort.html).

Bild- und Datenquellen:

Alberti, L. B.: Zehn Bücher über die Baukunst (Übers. M. Theuer). Darmstadt: Wiss. Buchges. 1991.

Bammes, G.: Figürliches Gestalten. Berlin: VEB DVW 1981.

Beaton, A. E.; Mullis, I. V. S., u.a.: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). Chestnut Hill, MA, USA: Boston College 1996.

Ceman, R.: Rekorde – Pflanzen und Tiere. Hanau: Dausien 1998.

Doczi, G.: Die Kraft der Grenzen – Harmonische Proportionen in Natur, Kunst und Architektur. München: Dianus-Trikont 1984.

Dürer, A.: (Albrecht Dürer's Unterweisung der Messung. Nachdruck der Peltzer-Bearbeitung von 1906. Vaduz: Sändig Reprint1996.)

Dürer, A.: Vier Bücher von menschlicher Proportion. Nördlingen: Alfons Uhl (Nachdruck der Nürnberger Ausgabe von 1528:) 1996.

Euklid: Die Elemente (Übers. C. Thaer). Darmstadt: Wiss. Buchges. 1980.

Euler, L.: Vollständige Anleitung zur Algebra. Stuttgart: Reclam 1959 (russ. Original: St. Petersburg 1767, dt. Druch ebenda 1770).

Flindt, R.: Biologie in Zahlen. Stuttgart/New York: Gustav Fischer (3. Aufl.:) 1988.

von Fritz, K.: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft. Berlin, New York: de Gruyter 1971.

Hecht, K.: Maß und Zahl in der gotischen Baukunst. Hildesheim/Zürich/New York: Georg Olms 1997.

Hogarth, W.: Die Analyse der Schönheit. Dresden, Basel: Verlag der Kunst o.J. (um 1990; engl. Original 1753).

Jaxtheimer, B. W.: Knaurs Mal- und Zeichenbuch. Müchen: Droemer/Knaur 1990.

Kaderavek, F.: Geometrie und Kunst in früherer Zeit. Stuttgart/Leipzig: Teubner 1992.

Kretschmer, E.: Körperbau und Charakter. Berlin: Springer (21. und 22. Aufl.:) 1955.

Landau, T.: Von Angesicht zu Angesicht. Reinbeck: rororo-Sachbuch 1995.

Lietzmann, W.: Lebendige Mathematik. Breslau: Hirt 1943.

Lommel, A.: Schätze der Weltkunst, Band 1 – Vorgeschichte und Naturvölker. Gütersloh: Bertelsmann 1974.

Naredi-Rainer, P. von: Architektur und Harmonie. Zahl, Maß und Proportion in der abendländischen Baukunst. Köln: du Mont (2. Aufl.:) 1984.

Ondrejka, K.: Rekorde auf unserer Erde. Hanau: Dausien 1996.

Pierce, J. R.: Klang – Musik mit den Ohren der Physik. Heidelberg; Berlin: Spektrum 1999.

Robins, Gay; Shute, Charles: The Rhind Mathematical Papyrus. New York: Dover 1987.

Schneider, N. J.: Die Kunst des Teilens – Zeit, Rhythmus und Zahl. München: Piper 1991.

Schröder, E.: Mathematik im Reich der Töne. Stuttgart/Leipzig: Teubner

Smith, D. E.: History of Mathematics, Vol. II. New York: Dover 1958.

Steck, M.: Dürers Gestaltlehre der Mathematik und der bildenden Künste. Halle: Niemeyer 1948.

Szabó, A.: Die Entfaltung der griechischen Mathematik. Mannheim: BI 1994.

Tischel, Gerhard (Hrsg.): Spektrum der Mathematik, Band 6 und Lehrerband 6. Frankfurt am Main: Diesterweg 1986.

Tschichold, J.: Erfreuliche Drucksachen durch Typographie. Augsburg: Maro (3. Aufl.:) 1996.

Vitruv: Zehn Bücher über Architektur (Übers. C. Fensterbusch). Darmstadt: Wiss. Buchges. (5. Aufl.:) 1991.

Waerden, B. L. van der: Erwachende Wissenschaft. Basel/Stuttgart: Birkhäuser 1956.

Waerden, B. L. van der: Die Pythagoreer. Zürich/München: Artemis 1979.

Walser, H.: Der goldene Schnitt. Stuttgart/Leipzig: Teubner (2. Aufl.:) 1996.

Wersin, W. von: Das Buch vom Rechteck – Gesetz und Gestik des Räumlichen. Ravensburg: O. Maier 1956.

Winter, H.: Mengentheoretische Grundlagen der Relation der Verhältnisgleichheit. In: G. Schmitz; J. Bär; H. Winter: Aspekte moderner Mathematik in der Hauptschule. Ratingen: Henn 1969, S. 53-101.

Winter, H.: Gedanken zur Modernisierung des Sachrechnens in den Klassen 7 bis 10 der Hauptschule. In: E. Meyer (Hrsg.): Didaktische Studien – Mathematik in der Hauptschule, Band 2. Stuttgart: Klett 1972, S. 99-140.

Winter, H.; Ziegler, T. (Hrsg.): Neue Mathematik, Band 6. Hannover: Schroedel 1970, Abschnitte 3.3 und 5.1.

Wolf, N.: Der Mythos Schönheit:. Reinbeck: rororo-Sachbuch 1991.

Würtenberger, F.: Die Architektur der Lebewesen. Karlsruhe: Info Verlagsges. 1989.

Ziegler, T.: Die logische Struktur des Sachrechnens. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel 1969, S. 225 ff.

Wunderlich, H.: Barbie – Künstler und Designer gestalten für und um Barbie. Reinbeck: Rowohlt 1994.

==

Gekürzte Fassung erschienen in:

Mathematik lehren, Heft 123 (2004), S. 46-51.