Wurzeln, Mathematik und Nostalgie -

Bedenkliches zum mathematischen Wagenschein

Vortrag von L. Führer zur Wagenschein-Gedächtniswoche,
am 2.12.96 in Frankfurt am Main

1. Wurzeln & Mathematik

(Erinnerungen für morgen, Berg, S. 85*f.*)

„Aber ich bin doch ein Outsider!“ Laugwitz: „Eben deshalb!“

... Mathematik und Physik. Warum? Ich dachte mir: Das ist eine solide Sache! Eine objektive Methode, geeignet als Basis, um von ihr aus dermaleinst *alles* verstehen zu können.

Nur ein Achtel meines Lebens wohnte ich in Städten.

Alle Schulwege führten über Land.

... Schlesinger in Gießen:... Begriffe in *statu nascendi*, als notwendig werdende, entwickelte... große Entdeckungen, Gewicht, Zauber...

* * *

Mach 1881: Ich kenne nichts Schrecklicheres als die armen Menschen, die *zuviel* gelernt haben... Ich wäre zufrieden, wenn jeder Jüngling einige wenige mathematische oder naturwissenschaftliche Entdeckungen sozusagen *mit erlebt* und ihre weiteren Konsequenzen verfolgt hätte.

Lichtenberg um 1800: Was man sich selbst erfinden muß, läßt im Verstand die Bahn zurück, die auch bei anderer Gelegenheit gebraucht werden kann. (Goethe: Was du ererbt...)

Toeplitz 1927: Genesis, nicht Gechichte!

Vollrath 1989: Wagenschein hatte eine Vision des Unterrichts, von der sein ganzes Leben und Wirken durchdrungen war: In seinem Unterricht erfahren Schüler und Lehrer gemeinsam das Entstehen von Mathematik von ihren Wurzeln her in intensivem Denken und Sprechen.

S. Weil (1909-1943): Enracinement statt Entwurzelung der Arbeit

2. Berechtigte Kritik am real-existierenden Unterricht

Den folgenden Kritikpunkten, die Wagenschein in dieser oder ähnlicher Form immer wieder vertreten hat, ist auch heute noch zuzustimmen:

- Scheinwissen
- Hinfälligkeit
- Mathematikgläubigkeit und -phobie
- Oberflächlichkeit
- Vorratslernen
- systemfixierter Turmcharakter
- Abgehobenheit
- Leistungsdruck statt Leistungssog
- allegorhythmische Volksverdummung
- Antworten, wo niemand gefragt hat
- Enzyklopädismus
- Rezeptivität statt Spontaneität
- Stoffhuberei statt Muße
- Prüfungswahn
- Performanz statt Kompetenz
- fachwissenschaftliche Schlagseite der Ausbildung
- mangelhaftes Bild von (dem Sinn) der Mathematik
- hektische und bürokratische Arbeitsbedingungen

Wagenscheins Gegenrezept

„Tugend des einzelnen Schülers: alles den anderen zu sagen, was er zur Sache denkt.

Tugend des Lehrers: zu führen durch die möglichste Zurückhaltung seiner selbst

(wozu gehört, umfassend zuzuhören und, wenn nötig, das Gespräch bei der Sache zu halten).

Tugend eines jeden Teilnehmers: sich mitverantwortlich zu fühlen, daß alle verstehen“ (Erinnerungen für morgen, S. 38)

* * *

- Verstehen des Verstehbaren ist ein Menschenrecht!
- Initiationsfragen
- Motivation, Leistungssog
- Muße & Gründlichkeit
- Konzentration
- **exemplarische** Probleme (Paradigmatisches: Themenkreise)
- Selbsttätigkeit (Arbeitsunterricht)
- **genetisches** Vorgehen
- **Sokratik**
- Recht auf Fehler, Umwege, Einfälle
- Selbstvertrauen
- Gemeinschaft, Solidarität
- Ungesichertheit des Lehrgangs (kein Kanon!)
- Offenheit, Fächerübergriff

Keines dieser Stichworte war zu Wagenscheins Zeit wirklich neu, und Wagenschein hat das auch nicht behauptet. Neu und originell war die sehr persönliche und atmosphärisch dichte Synthese, die er in einigen unterrichtsnahen Beispielen gab. Wir wollen im folgenden an mathematischen Beispielen prüfen, wie weit Wagenschein seinen eigenen Maßstäben gerecht wurde. (Für eine Kritik des physikdidaktischen Hauptwerks verweise ich auf den neuen Artikel von Muckenfuß.)

3. Unterrichts- oder Themenbeispiele bei Wagenschein

(Urspr. Verstehen und exaktes Denken, S. 539*ff.,* Berg, S. 360*ff.,* Verstehen lehren)

- Kern und Schale runder Dinge, 1948
- Zweierlei Wissen (Pi bei der Mondsphäre), 1948
- Nicht-Abbrechen der Primzahlenreihe, 1949
- Math. Jahresarbeiten und Aufsätze, 1950,
- Irrationalität der Quadratwurzel aus Zwei, 1950
- Satz des Pythagoras, 1960
- Mathematik aus der Erde (Eratosthenes), 1961
- Wie weit ist der Mond von uns entfernt? 1962
- Die Erfahrung des Erdballs (u.a. Aristarchos), 1967
- Entdeckung der Axiomatik, 1968, 1974

Daneben erwähnt:

Kegelschnitte, komplexe Zahlen, Grenzwerte, Irrationalzahlen, Infinitesimalrechnung, Kegel, Kugel, Zylinder, Kugelgeometrie, Logarithmen, Trigonometrie

Die beiden bekanntesten und wohl auch eindruckvollsten Beispiele sind das „Nicht-Abbrechen der Primzahlenreihe“ und die „Entdeckung der Axiomatik“. Es soll nun gerade an diesen Musterbeispielen gezeigt werden, daß

1. die Beispiele nicht für mathematische Erkenntnisprozesse paradigmatisch sind (und folglich das exemplarische Prinzip fragwürdig machen),
2. die Beispiele heuristisch brüchig sind (und folglich nicht sokatisch, sondern stark affirmativ sind),
3. in den Beispielen Subjekte mit dem vermeintlichen Kollektiv identifiziert werden (und folglich tiefe Bildungswirkungen nur aus einem unterstellten Kommunionserlebnis abgeleitet werden können, sonst würde das sokratische Lehrgespräch und insbeseondere die anschließenden Sicherungsarbeiten für fast alle Schüler zum langatmigen Lehrervortrag mißraten).

4. Das Nicht-Abbrechen der Primzahlenfolge (1949)

Zitat Wagenschein:

Der ebenso einfache wie geniale antike Beweis dafür, daß die Reihe der Primzahlen niemals abbrechen kann, gehört zu den wenigen wirklich unentbehrlichen Stücken des mathematischen Lehrgutes. Ohne irgendwelche Vorkenntnisse vorauszusetzen, läßt er erfahren, was es heißt, mathematisch zu denken. Für die überhaupt nicht Empfänglichen ist das aktive Begreifen dieses souveränen Verfahrens ein unvergeßliches Erlebnis.

Der Beweis geht (in seiner heute üblichen Fassung), bekanntlich so vor, daß das Produkt aller Primzahlen hinauf bis zu irgendeiner, *p*, gebildet wird und daß dann durch Hinzufügen der Eins eine Zahl entstehen muß,

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1,$$

die durch keine dieser Primzahlen teilbar sein kann. Wenn sie also nicht selber Primzahl ist, so kann sie nur solche Primfaktoren haben, die oberhalb von *p* liegen. Es gibt also in jedem Falle Primzahlen, die größer sind als *p*.

Das ist schnell gesagt und vom mathematisch Geübten auch leicht verstanden. Es dem Anfänger einfach zu erzählen hieße, das Kind auf den Berg hinauftragen, statt es ihn ersteigen zu lassen. Wie anders sieht es dann die Aussicht, tief atmend, durchblutet, mit weiten Augen. Nur wer die Höhe gewann, weiß, was Höhe ist.

Wie wenige mathematische Fragen ist dieses Problem geeignet, im aktiven Gespräch einer Gruppe *errungen* zu werden. Nur muß die *Frage* erst einmal *gesehen* werden, und dazu muß der Lehrer vieles sagen, ehe er dann schweigt, indem der eigentliche Unterricht beginnt...

Als Beispiel für diesen überpersönlichen Verwirklichungsprozeß gebe ich hier den Bericht über den Weg, den das Unterrichtsgespräch genommen hat in einer Gruppe von 13 Jungen und Mädchen verschiedener Nationen im Alter zwischen 14 und 17 Jahren in Paul Geheebs Ecole d'Humanité (Goldern, Schweiz), eine der wenigen Schulen, die noch die „Muße" (was ja der Ursinn des Wortes „Schule" ist) lassen, in der allein Bildung geschehen kann... Wie sehr eine Heimschule wie diese den Bildungsvorgang begünstigt, zeigt sich unter anderem darin, daß die entscheidenden Einfälle und Vorschläge oft nicht in der Unterrichtsstunde, sondern tagsüber in Gesprächen oder gar nachts gefunden worden sind. Zuweilen bildeten die Primzahlen den Gesprächsstoff auf Treppen und Gängen... Dem Kurs standen täglich 60 Minuten zur Verfügung. „Hausaufgaben" sind in dieser Schule nicht üblich.

Die *erste Stunde* war ganz dazu verbraucht worden, das *Thema* sichtbar zu machen und die Verbindung zwischen ihm und der Gruppe zünden zu lassen.

Schon vor der zweiten Stunde hatte die sechzehnjährige Deutsch-Engländerin Gabi geglaubt, eine Primzahl-Formel gefunden zu haben, nämlich $2n \pm 1$. In der Tat, sie stimmte immer in dem Sinn, daß (außer 2) jede Primzahl in diese Form paßte (in der *n* irgendeine natürliche Zahl bedeutet). Doch hatte Gabi bald bemerkt, daß damit ja nur die Selbstverständlichkeit ausgesagt ist, daß eine jede Primzahl ungerade sein muß.

In der *zweiten Stunde* wurde deshalb der Gedanke gar nicht mehr ganz bewußt ins Auge gefaßt und nur noch historisch gestreift. Im Gespräch mit Gabi war nämlich der vierzehnjährige Deutsche Peter auf einen Satz gekommen, den er zwar noch nicht beweisen konnte, den er aber überzeugt vertrat, zumal alle Stichproben stimmten.

(1) Jede Primzahl, behauptete er, habe die Form $6n+1$ oder (wenn nicht das, so doch) $6n-1$. n bedeutete dabei wieder eine beliebige natürliche Zahl. Man prüfe: 23; 37; 41; 43.

Wie er darauf gekommen war, konnte er nicht ganz deutlich zurückrufen; aber er hatte, wie er sagte, „die 3 *auch* berücksichtigen“ wollen. - Der Kundige bemerkt, wie der Anfang der Operation Euklids, das $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots$ ..., sich schon durchsetzt.

Wir verteilten nun aus einer Tabelle die P.Z. (Primzahlen) bis 10 000 unter uns zur Durchmusterung: Die Formel stimmte immer. Doch war allen klar, daß damit nichts entschieden war, daß nur ein *Versager* eine endgültige Entscheidung bringen könnte und daß Peters Satz noch zu beweisen wäre. Es begann ein wildes Suchen.

Diesen etwas blinden Wetteifer mußte ich steuern, indem ich daran erinnerte, was wir denn eigentlich wollten? Was würde denn der Satz (1), wäre er richtig, für unsere Frage nach der letzten Primzahl bedeuten? Würde er helfen?

Ja, das würde er, fand man einstimmig, denn dieses $6n \pm 1$ ließe sich ja „mit n beliebig hochschrauben“.

Nur einer bemerkte hier etwas Entscheidendes: Nein, die Gültigkeit des Satzes (1) werde uns leider gar nichts nutzen (wir brauchten uns also um einen Beweis gar nicht zu bemühen), denn er sage ja nicht, daß $6n \pm 1$ *immer* auf eine P.Z. führe!

Es bedurfte eines längeren Gesprächs, um fast alle dahin zu bringen, daß sie unterscheiden lernten zwischen einem *Satz* und seiner *Umkehrung*. Wir formulierten gemeinsam jetzt *zwei* Sätze, wozu besonders der sechzehnjährige Isreali Elnis beitrug:

Satz I: *„Alle Primzahlen passen in die Form* $6n \pm 1$*.“* Dieser, wie es scheint, richtige Satz ist von uns nicht bewiesen, braucht aber auch nicht bewiesen zu werden, denn er kann uns nicht weiterhelfen.

Satz II: (Umkehrung von I): *„Alle Zahlen von der Form* $6n \pm 1$ *sind Primzahlen“* (n bedeutet in beiden Sätzen eine beliebige natürliche Zahl).

Dieser zweite Satz könnte uns helfen. Leider erwies er sich als *falsch.* Denn bald sammelten wir Versager ...

Wesentlich ist, wie der Euklidische Ansatz sich schrittweise verwirklicht.

So auch in dem nächsten Vorschlag, der nun kommt. Elnis glaubt, daß zwar nicht jedes $6n \pm 1$ (wo n eine *natürliche* Zahl ist) auf eine P.Z. führt, daß aber (2) $6p+1$ (wo p eine *Prim*zahl ist) immer eine neue (und größere!) P.Z. aufbaut!

Der Euklidische Ansatz ist jetzt also in der Form $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot p+1$ noch näher gerückt. Wer am Ziel steht, erkennt sofort, daß dieser Satz (2) falsch ist. Denn es war durch Elnis' Ansatz nun außer 2 und 3 der Teiler p auch ausgeschlossen, aber p ist ja nicht die einzige P.Z. außer 2 und 3, es gibt ja mehr als diese drei. Die Arbeitsgruppe selbst durchschaute es noch nicht. Aber sie fand, daß der Satz nicht stimmen könne: Der eine Versager $6 \cdot 29+1=175$ genügt dazu...

Der Neuling tastet ins Dunkel, diesmal wieder Elnis. Und zwar so: Er steht vor der Tafel und schreibt und denkt laut (nach der Stunde): „42 ist 2 mal 3 mal 7. Da ist die 2 drin und die 3 und die 7. Und in 43 ist sie nicht drin. Jetzt müßte man nur noch sehen, ob vielleicht die 5 drin sein könnte? Man müßte die Teilbarkeitsregeln benutzen. Bei 3 die Quersumme usw.?“ - Das ist ein guter Weg, sage ich ihm, aber die Teilbarkeitsregeln, die brauchst du nicht! Es geht ohne sie!

Am nächsten Morgen kommt er strahlend zum Frühstück: Ich hab’ die Lösung! Im Unterricht verkündet er sie:

(3) Wenn *p* die größte P.Z. ist, die ich kenne, dann ist

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1$$

(wobei das Produkt *alle* Primzahlen bis *p* enthalten soll) bestimmt auch eine P.Z., und zwar eine größere als *p*.

Damit hat sich der Euklidische Ansatz durchgesetzt. Wenn auch noch gebunden an einen Irrtum: Elnis’ Begründung ist nämlich wörtlich diese: „Diese Zahl ist nicht durch 2, nicht durch 3 usw. und nicht durch *p, also durch ‘Nichts’* teilbar!“ (Er meint: durch keine Zahl.)

Alle stimmten überzeugt zu. Auch stimmen die Proben ... Soweit stehen sie alle in der Tafel der P.Z. Aber $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30\,031$ wird ja wohl auch eine P.Z. sein, sie sieht so aus.

Ich bleibe zögernd und fordere zur schärfsten Kritik und Prüfung auf.

Merkwürdigerweise kommt die Lösung *nicht* auf experimentellem Wege durch Entlarvung der Zahl 30031, wie ich angenommen hatte.

Am Abend überrascht mich die sehr spröde und bisher fast schweigsame Marianne, eine aus dem Baltikum vertriebene Fünfzehnjährige, dadurch, daß sie mir den *Fehler* in der Begründung des Satzes (3) klar ausspricht.

Noch mehr: Am Morgen ein Jubelschrei von Gabi. Nicht nur das: Sie könne sogar nun beweisen, daß es keine letzte P.Z. geben könne! Sie hat den Beweis wirklich, er ist da.

Vierte Stunde: Zuerst gibt einer, der noch an den Satz (3) glaubt (der Finder Elnis selbst ist schon schwankend), noch einmal den vermeintlichen Beweis wieder: „... also ist diese Zahl durch *keine* Zahl teilbar.“

Dann lasse ich Marianne ihre Widerlegung geben. Sie sagt (und gibt es mir zugleich auf einen Zettel geschrieben):

„Die Behauptung von Elnis ist nicht vollständig. Denn es gibt zwischen *p* und *N* noch andere P.Z. *N* kann eine P.Z. sein. Es kann aber auch sein, daß *N* keine P.Z. ist. Dann gibt es noch P.Z. im Zwischenraum zwischen *p* und *N*, durch welche die Zahl *N* teilbar ist.“

Das sehen bald alle ein ...

Nun erst kam das Erstaunliche zur Sprache, das, was Gabi in der Nacht klar geworden und was, wie sich herausstellte, auch Marianne am Abend schon aufgeschrieben hatte. Ihr Zettel geht nämlich weiter:

„In *beiden Fällen* ist bewiesen, daß es keine letzte P.Z. gibt, da man dies weiterführen kann.“

Nun, das ist reichlich konzentriert. Ich bitte Gabi, es zu sagen: Es gelingt ihr in vollendeter Präzision, aber es ist so einfach und klar gesagt, daß keiner die Pointe erkennt. Sie vergißt auszumalen, was hier das „Aufregende“ ist und es ihr war: daß nämlich das Versagen von Satz (3), seine Widerlegung, gerade eben das schafft, was der erledigte Satz (3) nicht mehr schaffen kann. Der Feind wird zum Freund. Das Blatt wendet sich. Zwar muß die so schön große Zahl *N* selbst nicht Primzahl sein. Sie ist nicht (immer) die P.Z., die berufen ist, *p* zu übertreffen. Aber ihre Teiler, wenn sie welche hat, sind ja *auch* oberhalb *p*, müssen es sein, *sie* leisten das, was *N* selbst nicht immer leisten kann.

Dieses Stück der Beweisführung müßte „feierlich gesagt werden", meint einer, „mit Trompetensignalen", ein anderer.

Zunächst haben es vielleicht nur zwei verstanden. Sie wiederholen es nun in ihren eigenen Worten, zur Not auf Französisch oder Englisch, bis neue Anhänger entstehen, die es nun auf ihre Weise noch einmal sagen. So gewinnen wir schließlich fast alle.

Zum Überfluß lasse ich es gleichzeitig noch einmal *aufschreiben*, jeden auf einen Zettel. Etwa die Hälfte bringt den Beweis sachlich richtig zuwege. Manche bleiben unvollständig, bei nur wenigen befriedigt auch die sprachliche Präzision. Am besten ist das, was Gabi geschrieben hat. Es ist druckfertig. Kurioserweise tut sie nach der Stunde die Äußerung, dieser Beweis sei wunderbar, aber „Mathematik" sei scheußlich. (Sie meint das, was sie bisher dafür hielt.)

Fünfte Stunde: Sie dient ausschließlich der *Formulierung*. Ich hatte mir aus den Niederschriften die besten Stellen herausgezogen; sie lagen vor mir. Dann formten wir aus den Vorschlägen, wie sie bald von diesem, bald von jenem kamen, Satz für Satz. Die ausgesuchten besten schriftlichen Vorschläge bot ich besonders an. Das meiste diktierte Elnis. Obwohl er sonst einen hartnäckigen Widerstand gegen Übungen in der ihm noch ungeläufigen deutschen Sprache zeigte, bewährte er sich hier sehr. Sein Widerspruchsgeist brachte sich selber um: Indem er fast jedem Vorschlag widersprach, konnten wir ihm fast jeden zur endgültigen Fassung übergeben. Sie gelang ihm gut, und er konnte sie dann gleich diktieren. (Im Grunde fand er es überflüssig, Dinge aufzuschreiben, die man begriffen hatte. Gegen Ende der Stunde bemerkte er sehr erstaunt, daß auch ich mitschrieb, und fragte in seinem Anfängerdeutsch: „Du schreibst den Euklid *auch* noch mal auf?")

...

Wagenschein gibt noch die Ausarbeitung an, erwähnt einen Vergleich mit Euklids knapperen Formulierungen (in deutscher Übersetzung) und zitiert aus einer begeisterten Erinnerung, die die Schülerin Gabi später verfaßt hat (Wagenschein: Urspr. Verst. und exaktes Denken, S. 110):

Hören wir auf das Wort der kleinen Gabi (Deutsch-Engländerin, 16 J.): „*Das* ist wunderbar, aber Mathematik ist scheußlich!"

Nachtrag:

Einige Monate später schrieb sie: „Sie ahnen nicht, wie aufregend es war. Wir dachten wirklich an nichts anderes. Ich weiß noch den heißen Nachmittag mit Elnis unter dem Haselnußstrauch, als er den Satz fand: und nachts, oben in der Hütte, war ich so aufgeregt, als ich den fertigen fand, daß ich zum Fenster raus sprang und auf die Bidmisalp ging."

...

„Als wir nach mehreren Tagen die Aufgabe gelöst hatten, waren wir stolz, als wenn das Primzahlenproblem uns unser ganzes Leben lang geplagt hätte und wir die ersten Menschen seien, die den Beweis gefunden hatten. Es wird wohl keiner von uns je wieder dazu verleitet werden, daran zu zweifeln, daß es keine größte Primzahl gibt..." (Veröff. 1950 zum 80. Geburtstag von Paul Geheeb.)

Ein Unterrichtsgespräch zu dem Satz Euklids über das Nicht-Abbrechen der Primzahlenreihe (1949)

13 Schüler zwischen 14 und 17 Jahren, Ècole d'Humanité, 5 Std. à 60'

1. Stunde: Themenvorstellung

L.-Ziel: $N := 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot p+1$ *wird allenfalls von* $q > p$ *geteilt.*

vor der 2. Std.: Gabi vermutet $2n \pm 1$.

Gabi selbst: Das scheint immer zu stimmen, heißt aber i.w. nichts als „ungerade".

2. Stunde:

Peter vermutet $6n \pm 1$. — 23, 37, 41, 43 ... scheint zu stimmen.

Primzahltabelle bis 10 000 — ... stimmt überall. Gibt's *einen* Versager?

Beweis?

L.: Würde es nützen? — Nur einer merkt's: $6n \pm 1$ n. notw. P.Z.

Satz I: Alle P.Z. sind $6n \pm 1$. — Beweis nutzlos.

Satz II: Alle $6n \pm 1$ sind P.Z. — falsch: Versager werden gesammelt.

Elnis: Alle $6p \pm 1$ sind P.Z. — falsch: $6 \cdot 29+1 = 175$ ist ein Versager.

Elnis nach der Stunde bzw. vor dem Frühstück:

Teilbarkeitsregeln... — L.: Brauchst du nicht.

3. Stunde:

Elnis: $N = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot p+1$ ist durch nichts teilbar. — Alle Proben stimmen.

Alle sind überzeugt.

Wagenschein: „Aber $1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+1=30031$ *wird ja wohl auch eine Primzahl sein, sie sieht so aus. Ich bleibe zögernd und fordere zur schärfsten Kritik und Prüfung auf. Merkwürdigerweise kommt die Lösung* nicht *auf experimentellem Wege durch Entlarvung der Zahl* 30 031 (= $59 \cdot 509$, L.F.)*, wie ich angenommen hatte."*

Marianne abends: Begründung unvollst.

Gabi jubelt morgens: Keine letzte P.Z.!

4. Stunde: Wiederholung — Marianne: Bew. unvollständig. Es könnte zwischen p und N noch P.Z. geben.

Gabi/Marianne: Man kann dies weiterführen, also gibt es keine letzte P.Z. — „Muß feierlich gesagt werden." - „mit Trompetensignalen"

4./5. Stunde: Sicherungsarbeit, Euklid — (Dankschreiben von Gabi)

Kritik:

1. Das Wesentliche passiert privat, singulär, außerhalb des Unterrichts.

Von 13 Schülern kamen in Wagenscheins Bericht explizit vor:

- Gabi, 16jährige Deutsch-Engländerin: findet vor 2. Std. (angeblich) $2n \pm 1$
- Peter, ein 14jähriger Deutscher: will auch die 3 berücksichtigen, $2 \cdot 3 \cdot n \pm 1$
- Elnis, ein 16jähriger Israeli: $2 \cdot 3 \cdot p + 1$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1 =: N$
- Marianne, eine 15jährige, aus dem Baltikum vertrieben: q zwischen p und N möglich
- Gabi neben Marianne: „In beiden Fällen ist bewiesen, daß es keine letzte P.Z. gibt.“

„Dieses Stehenlassen des Persönlichen darf nicht davon ablenken, daß die folgende Skizze gerade betonen möchte, wie sehr Persönliches hier nur zufällige, nur illustrative Bedeutung hat. Zuletzt ist gleichgültig geworden, ob nun Marianne oder Peter dies oder jenes gefunden hat. Das spüren auch Peter und Marianne, und gerade darin äußert sich ein Bildungswert der Mathematik. Der einzelne bedeutet nur vorübergehend etwas, er ist nur das Sprachrohr, durch welches die Wahrheit sich ankündigt.“ (Urspr. Verstehen und exaktes Denken, S. 103f.)

Welche Wahrheit? Die Wahrheit von Elnis, Gabi und vielleicht ein wenig auch und recht einsam Marianne? Was tut ein solcher Unterricht mehr, als einzelne begabte oder lehrer-affine Schüler anzuregen?

2. Nicht „das seelische Kollektiv kommuniziert“, sondern erst Gabi mit Peter, dann mit Elnis, und Marianne bleibt für sich.

Der Nachweis für das Gemeinschaftserlebnis, für den „überpersönlichen Verwirklichungsprozeß“, stützt sich im wesentlichen auf Gabis verständliche Begeisterung. Sie hatte (vielleicht erstmals in Mathe) die größten Erfolgserlebnisse- und fühlt sich nun gar als urteilsfähig bzgl. der verhaßten Normalmathematik.

3. Wenn „fruchtbare Momente“ (F. Copei, 1930) im Unterricht durchbrechen, dann schwebt ein Engel durch den Raum, und es ist m.E. indiskret, das Außenstehenden schildern zu wollen.

Für mich ist die Grenze zur pädagogischen Taktlosigkeit überschritten, wenn vom Haselnußstrauch und von der Bidmisalp geredet wird.

4. Trotz des komfortablen Zeitrahmens sind die entscheidenden Lehrerhilfen massiv und nicht auf der Höhe heuristischer Lehrkunst (vgl. etwa G. Polya)

- Der Lehrer reitet auf der größten oder „letzten“ Primzahl herum. Die natürliche Frage, wie viele es gibt, scheint nie aufzutauchen. (Euklid hat sie gemieden, Lehramtsanwärter merken den Unterschied meist nicht.)
- Lehrer (privat) zu Elnis: ... guter Weg ... Aber die Teilbarkeitsregeln, die brauchst du nicht.

- Lehrer im Unterricht: verlangt schärfste Prüfung von $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$. (Darauf kommt kein Schüler, und wenige Lehrer!)
- Lehrer verlangt nach Gabis sachlichem Bericht, das Aufregende auszumalen. Erst dann stellt sich Begeisterung ein (Trompetensignale).

Bei solcher Vorgehensweise liegen zwei Gefahren nahe: Der Lehrer macht sich selbst gern etwas vor, über den sachlichen Gehalt und die Breite des kollektiven Erlebnisses, das tatsächlich nur er mit seinen Musterschülern hatte, und die wenigen Schüler mit echten Erfolgserlebnissen täuschen sich im Nachhinein leicht über ihre tatsächliche Leistung und über ihr Leistungsvermögen (Selbstüberschätzung im historischen Vergleich mit Spitzenforschern? vgl. Elnis).

5. Die Sicherungsarbeit ist äußerst aufwendig, disziplinarisch heikel und unrealistisch.

Nach Gabis blendendem, höchst sachlichen Vortrag in der 4. Stunde ist „die Luft raus". Der Lehrer ist enttäuscht und fordert, das Aufregende auszumalen. Dann kommen erst die Trompetensignale, anschließend eine höchst öde Sicherungsarbeit über ca. 100 Minuten(!): „Zunächst haben es vielleicht nur zwei verstanden. Sie wiederholen es mit ihren eigenen Worten." „Neue Anhänger werden gewonnen" und wiederholen es auch noch. Dann wird alles noch einmal schriftlich ausgefeilt und schließlich mit der Euklid-Übersetzung verglichen. Welchen Schülern hat das wohl Spaß gemacht (Elnis jedenfalls nicht)? Welche Schülergruppen machen so etwas ohne Murren mit? Wollen wir solche Schülergruppen?

6. Das Ganze spielt 1948 in der reichen Schweiz der noch reicheren Emigranten!

Wagenschein hält sich (wieder einmal) heraus.

In Berlin kündigte sich damals die Luftbrücke an. Ich war drei Jahre als, spürte die Angst meiner Mutter und der Nachbarn, und ich hatte Hunger... Wagenschein hatte im Dritten Reich gelitten: Er war nur noch Gymnasiallehrer an einer öffentlichen Schule und mochte die Aufmärsche nicht:

„Ich kann nicht sagen, daß es gerade die Schule war, in der ich mich unglücklich fühlte in den ersten Jahren der Diktatur. Das Unheil lagerte außerhalb, meine Fächer boten keinen Anlaß, sich mit der herrschenden Ideologie merklich zu reiben. Es kümmerte sich auch kaum jemand um meinen Unterricht. Ich machte unauffällig, was ich wollte, soweit ich konnte, und das war immerhin genug."(Erinnerungen für morgen, S. 48) - Ein großer Pädagoge?

War Elnis nicht Israeli?

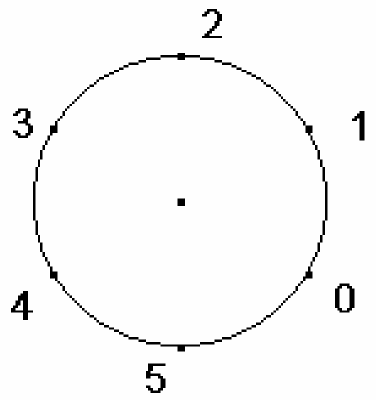
7. Fazit: Es handelt sich um ein disziplinarisch und sozial höchst komfortables Team-Teaching mit 2-3 begeisterten Hilfslehrern. Für die meisten der (nur) 13 Schüler wird es wohl netter Frontalunterricht gewesen sein.

5. Entdeckung der Axiomatik (1974)

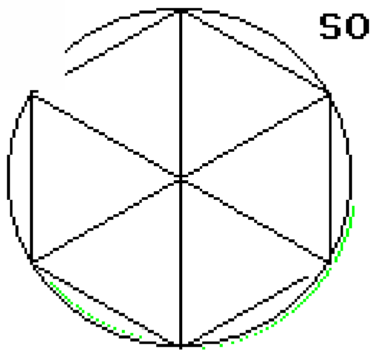
Bevor wir Wagenscheins Beispiel sezieren, sei zur Einstimmung kurz aus Rousseaus Émile (1762) zitiert:

> Ob ich es wage, hier die größte, wichtigste und nützlichste Regel jeglicher Erziehung darzulegen? Sie heißt: Zeit verlieren und nicht gewinnen.

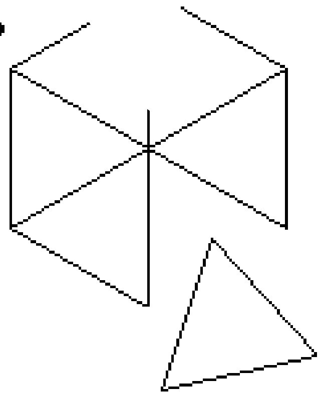
> Ich habe gesagt, daß die Geometrie für Kinder nicht faßlich sei, aber daran sind wir selber schuld. Wir merken nicht, daß sie eine andere Methode haben als wir und daß, was für uns zur Kunst des Denkens wird, für sie nur die Kunst zu sehen sein muß. Statt ihnen unsre Methode beizubringen, nähmen wir besser die ihre an, denn unsre Art, Geometrie zu lernen, ist mindestens ebenso eine Sache der Vorstellungskraft wie des Denkens. Ist der Satz gegeben, muß der Beweis gefunden werden, das heißt, es muß gefunden werden, welche Folgerung der gegebene Satz aus dem schon bekannten darstellt, und von allen Folgerungen, die aus diesem gleichen Satz gezogen werden können, gilt es, die zu wählen, um die es sich handelt.
>
> Auf diese Weise muß der logischste Denker, wenn ihm die Vorstellungs- und Erfindungskraft fehlt, zuschanden werden. Und was kommt dabei heraus? Daß man uns die Beweise diktiert, anstatt sie uns finden zu lassen; daß der Lehrer für uns denkt und nur unser Gedächtnis übt, anstatt uns selbst denken zu lehren.
>
> Zeichnet genauere Figuren, kombiniert sie, legt sie aufeinander, untersucht ihre Proportionen und ihr werdet die ganze Elementargeometrie finden, indem ihr von Beobachtung zu Beobachtung schreitet, ohne daß von Definitionen, Problemen oder irgendeiner anderen Beweisform die Rede zu sein braucht als der des einfachen Übereinanderlegens. Ich selbst maße mir gar nicht an, Emile Geometrie beibringen zu wollen; er wird sie mir beibringen, ich werde die Proportionen suchen, und er wird sie finden; denn ich werde sie auf die Weise suchen, die ihn sie finden läßt. Um zum Beispiel einen Kreis zu zeichnen, nehme ich keinen Zirkel, sondern einen Stift, am Ende eines Fadens befestigt, der sich auf einem Zapfen um sich selber dreht. Wenn ich hinterher die Radien untereinander vergleichen will, wird Emile mich auslachen und mir begreiflich machen, daß sich durch denselben Faden, wenn er immer in gleicher Spannung gehalten wird, niemals ungleiche Radien ergeben können.
>
> Wenn ich einen Winkel von sechzig Grad messen will, beschreibe ich von der Spitze des Winkels aus keinen Bogen, sondern einen ganzen Kreis, denn bei Kindern darf man nichts voraussetzen. Ich stelle fest, daß der Kreisabschnitt zwischen den beiden Schenkeln ein Sechstel des Kreises ausmacht. Dann beschreibe ich von demselben Punkt aus einen zweiten, größeren Kreis und stelle fest, daß dieser zweite Kreisabschnitt wiederum ein Sechstel seines Kreises ausmacht. Ich beschreibe einen dritten konzentrischen Kreis, bei dem ich die gleiche Probe mache und so weiter mit vielen anderen Kreisen, bis Emile, von meinem Stumpfsinn schockiert, mich darauf aufmerksam macht, daß jeder Kreisabschnitt, ob groß oder klein, der sich im gleichen Winkel befindet, immer ein Sechstel seines Kreises ausmacht etc...



Regel II: Alles Eingebrachte sollte sichtbar sein.



Überflüssiges?

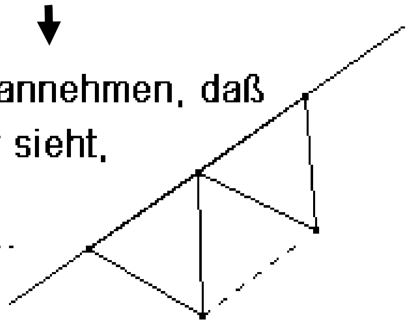


-

Hier ist ein heuristischer Bruch:
Die nächste Figur entsteht nicht durch Fortlassen von "Überflüssigem", sondern durch "Rückwärtsarbeiten" oder "Umstrukturieren des Problems" (Polya) nach dem Motto "es würde doch für unser Problem reichen, wenn sich drei gleichseitige Dreiecke an eine Gerade lückenlos anpaßten". Läßt man die eine Hälfte nur einfach fort, dann meinen Schüler, dort wäre schon alles in Ordnung - und benutzen das erst noch zu Beweisende.

"Genetisch" ist diese entscheidende Stelle bei Wagenschein leider nicht.

Man darf annehmen, daß bald einer sieht, worauf es ankommt...



Kulminationspunkt...
Keine "Ufer-Hilfe" möglich!?

Jetzt zu Wagenscheins Beispiel:

Betrachten wir einmal Abschnitt 10 aus Wagenscheins berühmter „Entdeckung der Axiomatik“: Es geht dort um die Frage, ob sich der Kreis mit seinem Radius rundherum sechsmal genau abzirkeln läßt. Wagenscheins eindrucksvolle Unterrichtssequenz steht und fällt mit der Bereitschaft der Schüler, ein, wie er meint, wundersames Phänomen zu ahnen und sich von dieser Ahnung fesseln zu lassen.

Wagenschein schreibt zunächst:

„Der Zirkel wirkt auf Kinder und Naive fast schon wie ein magisches Instrument. Er ‘übersteigt’ vornehm die Strecke, die er doch meint; er lenkt von ihr ab. Anfangs sollte sie sichtbar sein. Deshalb wählen wir ein Seil...

‘Es sieht ganz so aus’, als ginge es ‘wirklich’ und ‘genau’ sechsmal. Hier kann die Diskussion um die Idealität der Figur, wenn nötig, wieder aktuell werden. Es wird klar, daß die Frage ‘empirisch’ nicht entschieden werden kann. Schon eine Abweichung von 1 Promille würde bedeuten: nicht genau. (Wer hier sagt: ‘Mir reichts!’, hat Geometrie zu früh begonnen. Wer es lebenslang sagt, sollte durch sie nicht bedrängt werden.)“

Und er fährt dann fort:

„Schon die Frage muß von den Schülern formuliert werden. Man kann nicht vorher wissen, was sie sagen. Dazu gehört, daß auch ausgesprochen wird, *warum hier etwas Verwunderliches, also Zweifel Erregendes vorliegt:* Weil es auch ‘genau so gut’ anders sein könnte. Warum nicht 5,98mal? Nützlich ist der Vergleich mit der anderen Frage, wieviel mal der Radius (als Seilstück) außen herumgebogen werden kann? Offenbar nicht 6mal. Offenbar mehr als 6mal. Also dann 7mal?

Das volle Verstehen der Fragestellung ist notwendig, um das Suchen zu motivieren.“

Kritik:

Soweit Wagenschein. Stellt man sich die Szene in einer normalen 6. oder 7. Klasse von heute vor, dann tauchen einige Fragen und Zweifel auf:

1. Daß der Zirkel die Strecke überbrücke, „die er doch meint“, kann man wohl vom Stechzirkel, kaum von den Schulzirkeln sagen. Sie „meinen“ wohl mehr die richtungslose Strecke mit einem festen Endpunkt bzw. alle derartigen Strecken, d.h. den Ort aller Punkte mit konstantem Abstand vom festen Zentrum. Jedenfalls ist dies die entscheidende Kreiseigenschaft in allen Konstruktionsaufgaben. Warum also die in praxi unästhetische Seilspannerei[1]? Hier liegt die Antwort auf der Hand: Das Sechseck soll nahegelegt werden.
2. Geht es dann nicht eigentlich um das reguläre Vieleck aus gleichseitigen Dreiecken, um ein Parkettierungsproblem, statt um den Kreis? Bald heißt es: „Alles ist rot, außer dem Kreis. vielleicht genügt das für einen Teilnehmer, um ihn stumm wegzuwischen.“
3. Warum die Verpackung, die man notfalls erst wieder mit drei - auf diesem frühen Stand des Geometrieunterrichts: - höchst geheimnisvollen „Ufer-Hilfen“ loswerden muß? (I. Man

[1] Die man immerhin mit Hinweis auf Herodot verkaufen könnte: Nach dessen (zweifelhaftem) Zeugnis kam die Geometrie von den ägyptischen Seilspannern...

benutze nur das Eingebrachte, das aber vollständig. *„Warum denn das?“* sollten die Schüler fragen, und *„was wollen Sie uns denn nun eigentlich beibringen?“* II. Alles Eingebrachte sollte sichtbar sein. *„Auch die sich drehenden Radien beim Kreiszeichnen? Dann müssen wir den Kreis vollmalen. Und was nun?“* III./IIIa. Alles Überflüssige sollte man wegwischen, ohne das Problem zu verkürzen. *„Aber es ging doch um den Kreis, und der ist vor allem gebogen. Wie kann das überflüssig sein?“* Warum ließ nicht schon der Lehrer alles „Überflüssige“ fort?)

4. Ob es genau sechsmal gehe oder nicht, ist die zentrale Einstiegsfrage. Unterstellen wir, daß viele Kinder das spannend finden. Werden es genügend viele sein, um weiterhin störungsfrei nachdenken zu können? Wieviele 6. oder 7. Klassen von dieser zauberhaften Naivität gibt es in Deutschland? (Bei 8.-11. Klassen brauchen wir nicht anzufragen.)

5. Können jene Kinder, die Zirkel noch magisch finden, und die Einstiegsfrage aufregend genug für alles weitere, „empirische“ Entscheidungen zurückweisen und die „Idealität der Figur“ meinen? *„Warum soll es denn nicht um diesen, hier gezeichneten Kreis gehen? Gesagt haben Sie das nicht, und gezeigt haben Sie es nur mit diesem Kreis und diesem Radius.“* (Klarer und altersangemessener wird das Problem wohl, wenn alle Schüler es für sich und mit beliebig großen Radien versucht haben. Das könnte die Vermutung erzeugen, daß es bei allen realen Kreisen gehe - womit wir bei Aristoteles’ Abstraktion aus Empirie wären, statt bei Platon, und bei einem schrecklichen Allquantor. Mit Seilen oder Fäden dürfte das übrigens gründlich schief gehen und vom Problem eher abschrecken.)

6. „Schon eine Abweichung von 1 Promille würde bedeuten: nicht genau...“ So reden nur Theoretiker. Es macht nur Sinn, wenn der (platonische) Kontext klar ist, auf den sich „genau“ bezieht. Bei einem Kreis von 10 cm Radius ist 1 Promille für die Schüler enorm gut, erst recht im Gelände, beim Seilspannen. Liegen nicht eher dort die (technischen) Probleme, die Schülern dieses Alters und Handwerkern klar sind? Irgendwann lernen Kinder, sich einen Gattungsbegriff vom „Stuhl“ oder vom „Kreis“ an sich zu machen. Sind sie deswegen schon bereit, oder besser: sollten sie deswegen schon bereit sein, sich von der Logik in ihre Begriffswelt hineinregieren zu lassen? Welchen Sinn können sie in idealen Gedankenkreisen finden, an denen ideale Seile sechsmal herumgezirkelt werden, bevor die sich auf wunderbare Weise versteifen und den Kreis verschwinden lassen? Deduktionsketten finden, d.h. Reine Mathematik treiben, verlangt, ontologische Bedeutungen auszublenden. Steht das nicht geradezu im Widerspruch zur Deutung von Phänomenen aus Selbstverständlichem, d.h. hier zweifellos: Deutung von Phänomenen aus dem intuitiv Gewissen, dem „wirklich Wahren“?

7. Die anschließenden Äußerungen Wagenscheins „Wer hier sagt...“ und „Wer es lebenslang sagt...“ geben ein bedauerliches Beispiel für die tendenzielle Demokratiefeindlichkeit, die den Platonismus pädagogisch diskreditiert. „Geometrie“ meint hier - für Schüler dieses Alters und Problembewußtseins - ein Stück „Reine“ Mathematik, und diese Reinheit sollen viele niemals sehen lernen? Später, mit 15 Jahren, wird ja die Geduld und Offenheit fehlen. Wie verträgt sich das mit Wagenscheins Parole „Verstehen ist Menschenrecht“?

8. Ist die Rückführung der genauen Sechsteilung auf die Parallelverschiebung eine Rekonstruktion des fraglichen Phänomens aus „Selbstverständlichem“. Setzt es nicht vielerlei Konventionen oder Erfahrungen mit Geradlinigem voraus? Warum darf das genaue Aufgehen am Kreis als empirische Tatsache nicht (nach hinreichender Zeichenübung) als Selbstverständliches genommen werden? Die Überschrift „Entdeckung der Axiomatik“ und der Schluß des Textes nimmt „Axiom“ im altertümlichen Sinne von unbestreitbarer, intuitiv wahrer Grundtatsache. Mehr noch, es wird so getan, als stünde „die“ Axiomatik irgendwo

schon bereit, um „entdeckt" zu werden. Gemeint und für die Schüler völlig undurchsichtig ist hier natürlich die euklidische Geometrie und deren Charakterisierung durch ein kanonisches, monomorphes Axiomensystem. Was geht das Mittelstufenschüler an? Seit hundertfünfzig Jahren weiß man, daß über die euklidische oder nichteuklidische Struktur des „ursprünglichen", „selbstverständlichen" Raumes jedenfalls nicht innermathematisch entschieden werden kann, und seit hundert Jahren weiß man, daß polymorphe Axiomensysteme viel nützlicher sind. Sollen wir wider besseres Wissen mit Geometrie anfangen, mit Reiner Geometrie wohlgemerkt? Die Großen unter den Kleinen zum Analysieren und Deduzieren an nur scheinbar Wahrem anhalten? Und die Kleinen unter den Kleinen zum Verstummen vor dem mathematischen Posing der „begabten" Durchblicker? Und wenn deren Durchblick mehr die Gedankenwelt des Lehrers antizipiert als mathematisches Gehabe?[2]

9. Warum „muß die Frage von den Schülern formuliert werden"? Damit der Lehrer hört, was die Formulierer denken? Und die anderen? Im günstigsten Falle schweigen sie. Dann kann die Entdeckungsreise losgehen. Ist das so gut, wenn sie schweigen? Was ist vom Wissensdrang einer 6. oder 7. Klasse zu halten, wenn alle in Einzelbefragung zu erkennen geben, daß sie hier und jetzt nichts Wichtigeres bewegt, als unsere Einstiegsfrage?

10. Viele Kinder *im fraglichen Alter von etwa 12 Jahren* finden es in der Tat schön und erstaunlich, daß es genau sechsmal zu gehen scheint, und einige fragen auch, warum das so sei. Werden sie eine so lange Gedankenkette bis zur angeblichen Wurzel in der Parallelverschiebung als vernünftige Antwort auf eine vernünftige Frage akzeptieren? Werden sie das Glasperlenspiel nicht eher als Ausrede empfinden, zur Abschreckung vom Fragen? Wird hier nicht - ganz gegen Wagenscheins Programm - Mathematik als Lehre von verwickelten Antworten auf naheliegende Fragen präsentiert?

Mit dieser absichtlich überspitzten Detailanalyse wollte ich zweierlei zeigen: Erstens werden wiederholt Sichtweisen unterschoben und Heuristiken verordnet, die zwar im Lehrerkopf und im Blick auf den vollen Lösungsweg Sinn machen, die von den Schülern aber erst durch längeren Geometrieunterricht angeeignet werden können. Zum Zweiten werden unbewußt zweifelhafte mathematische und philosophische Attitüden eingeübt, indem entscheidende Kontextbindungen unreflektierbar, weil auf dieser Altersstufe unverbalisierbar, übernommen werden müssen. Tatsächlich werden sie vom Einzelschüler scheinbar freiwillig, nämlich „erfolgsgesteuert", umso eher übernommen, je besser es ihm gelingt, bewußt unscharfe Lehrerimpulse sachlich erfolgreich zu deuten.

---

[2] Mehr als „Gehabe" kann es wohl bei den bescheidenen mathematischen Vorerfahrungen kaum sein, wenn wir von staunenden und genügend hartnäckig nachhakenden Kindern ausgehen müssen. Für einen Teil der Leistungskursschüler auf der Oberstufe läge das sicher anders. Aber dort - und bei den erwachsenen, mathematisch geschulten Lesern des Textes - bezieht sich das Staunen wohl eher auf die zauberhafte Entdeckungsreise zu einem Beweis des Schließungssatzes als auf das Phänomen und seine „Einwurzelung" im „Selbstverständlichen". Wagenschein redet ausdrücklich von „Kindern" - allerdings von solchen mit „leerem Geist" und vollem mathematischen Problembewußtsein...

6. allgemeine Kritikpunkte

- Selbsttäuschung beim Selbsterarbeiten (Lenné: programmierter Unterricht für Individualisierung besser)
- wieviele Hilfen sind nötig, um effizient genetisch zu unterrichten? (Lenné: Ungesichertheit versus Optimierung)
- Wo lernt man rezeptives Lernen?
- Metaphorik & Selbstberauschung
- „die Schüler“ = „ein Schüler“ = „einige Schüler“ = „alle Schüler“ (Lenné: Wer entdeckt?)
- Ergriffenheit = Mitdenken? (Lenné: Immitation statt Initiation)
- Konzentrations- und Motivatonsaufwand
- Zensuren weg?
- Epochenunterricht?
- Zeitaufwand (Lenné)
- Monadologie? (Lenné: Das Ganze im Einzelnen?)
- Verstehensbegriff innerfachlich (Volk)
- Gedankenkurzschlüsse bevorzugt (paradigmatisch + naiv zugänglich?)
- Relevanzkriterien? (Volk)
- Normenfrage
- echtes Denken, wahre Mathematik? (Vollrath: begrenzte Vorstellung von Mathematik)
- Wesen der neueren Axiomatik?
- Algebra & Strukturen?
- Karikatur von Wissenschaftsgenese (Volk)

Folie mit Weierstraß-Zitaten

Die Kritik ist viel älter als Wagenschein. So hat z.B. der später bedeutende Mathematiker Karl Weierstraß 1841, als 26jähriger Gymnasialreferendar, der wissenschaftlichen Prüfungskommission in Münster eine respektvolle Arbeit „Über die sokratische Lehrmethode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterrichte“ vorgelegt, in der er u.a. zu folgenden skeptischen Schlüssen kommt: „Die Sokratische Methode kann auch bei den ihr an sich ganz angemessenen Gegenständen ihren Erfolg nur dann haben, wenn der Lehrer nur einen oder doch nur sehr wenige Schüler vor sich hat... Während der Lehrer mit *einem* Schüler verkehrt, - und bei wahrer Sokratischer Methode ist es doch nöthig, daß die Untersuchung mit *einem* wo nicht zu Ende, doch zu einem bestimmten Abschlusse geführt werde - geht ein großer Teil seines Unterrichts für die übrigen Schüler verloren. Es ist in manchen Fällen für den Schüler zu schwer, das Gespräch, welches der Lehrer mit einem andern hält, gehörig zu verfolgen. Dazu müsste er sich ganz in den Gedankengang des letztern hineinfinden können, was oft für den Lehrer schwer genug ist. Oft würde er auch selbst ganz anders geantwortet haben; dann vermengt er seine Gedanken mit denen des andern und geräth in Verwirrung; hat er einmal den Faden verloren, so ist alle Aufmerksamkeit dahin... Nicht minder erfordert die Sokratische Methode einen Lehrer von ausgezeichnetem Talente... Aus diesen Bemerkungen möchte wohl der Schluß zu ziehen sein, dass bei dem *Schul-Unterrichte* die Sokratische Methode weder die allgemeine, noch selbst die vorherrschende sein könne. Dass die Schule den Lehrling auch zum selbständigen Gebrauch seiner Kräfte anzuleiten habe, ja dass dieses ganz vorzüglich ihre Aufgabe sei, bedarf keiner Erinnerung...“

Weierstraß stellt dann fest, daß die sokratische Methode kaum zu den Sprachen, zur Literatur und Geschichte der alten Völker, zu den Naturwissenschaften und zur Religion passe, am ehesten noch zur philosophischen Propädeutik und zur Mathematik. „Somit bliebe hauptsächlich noch die Mathematik übrig, welche auf Sokratische Weise gelehrt werden könnte. Hierfür haben sich in der That stets viele Stimmen erhoben. Manche mögen den Anspruch des Sokrates im Sinne gehabt haben, den ich bereits oben anführte. Sokrates möchte indess gegenwärtig kaum noch so urtheilen. Aber es ist auch manches sehr gewichtige Urtheil dagegen vernommen worden, und zwar von Männern, deren Leistungen als Lehrer sehr bedeutend waren, und denen man nicht den beliebten Vorwurf machen konnte, dass sie ‘am alten Schlendrian hingen’. Diese erklärten es für nicht möglich, eine ganze Klasse durchaus nach Sokratischer Methode mit gutem Erfolge zu unterrichten. Ihre Gründe waren zum Theil von ähnlicher Art wie die vorhin in Beziehung auf den Schulunterricht überhaupt angeführten. Aber mit Recht erinnerten sie auch, dass gründliches Verstehen erzielt werden könne, wenn man den Schüler auch nicht gerade selbst den Weg der Erfindung durchmachen lasse. Der Lehrer soll die Wissenschaft vor den Augen des Schülers entstehen lassen. Wie sie sich in dem Geiste des gereiften Denkers aus den ihm inwohnenden Grundvorstellungen entwickelt und gestaltet, so soll er sie, nur für die jugendliche Fassungskraft eingerichtet, darstellen und als ein organisch sich bildendes Produkt der Vernunftthätigkeit mittheilen. An *seinem* Verfahren soll der Schüler mathematisch denken lernen. An Folgerungen aus fruchtbaren Hauptsätzen, an Lösungen mannichfaltiger Aufgaben mag dann auch die Sokratische Methode geübt werden. Aber als herrschende Form kann sie auch beim mathematischen Unterrichte nicht in Anwendung kommen.“ (K. Weierstrass 1903, S. 328f.)

7. Nostalgie der Reformpädagogik

Vollrath:

Die für Wagenschein alarmierenden Krankheitssymptome werden als drastisch beschriebene Abnutzungserscheinungen im Schulalltag, als unvermeidliche Schwierigkeiten des Systems und allenfalls als individuelles Versagen gesehen. Zwar machen sich Didaktiker immer wieder zu Anwälten der Kinder und kritisieren den Mathematikunterricht..., aber im Grunde setzen die meisten Didaktiker das bestehende System als gegeben voraus. Dies zeigt sich z.B. auch in neueren Untersuchungen über das Unterrichtsgeschehen. Selbst ‘chaotische’ Unterrichtssituationen, in denen die Schüler überhaupt nicht mehr bei der Sache sind, sondern sich mit allem Möglichen, auch Unsinn, beschäftigen, werden didaktisch analysiert... Dies muß im Lichte von Wagenscheins Auffassungen über Unterricht als skurril erscheinen. Wagenschein hätte sich geweigert. unter solchen Bedingungen zu arbeiten.

- gymnasial
- familiär (Lenné: Schauspielerrolle realistischer)
- gutbürgerlich-mittelständisch (Volk);
- elitär (Vollrath: Verwurzelung im Humanismus)
- individualistisch (Vollrath)
- indiskret

Vorwärts zurück!

„Schule als Lebensraum, das hat die Odenwaldschule vorgeführt. Und die Wirkung? Gewalt gibt es kaum in der international und sozial gemischten Schülerschaft. Fünfzig Prozent zahlen die monatlichen 3045 DM voll. Die übrigen Schüler finanzieren die Schule mit Teil- oder Vollstipendien.“ (Wilhelmi)

Wider die Neue Offenheit, Betulichkeit und Herzensgüte

- § 86(2) Hess. Schulgesetz: Lehrer haben nicht „nur“ zu erziehen und zu unterrichten, sondern auch zu beraten und zu betreuen. (Schule als Beschwichtigungszentrum angesichts einer Schülerzukunft im Rahmen struktureller Arbeitslosigkeit.)
- H. Holzapfel 1992: Lebensraum Schule notwendig, weil „die Schule ihre Funktion als Lernraum überhaupt nicht mehr ausfüllen kann, wenn sie nicht auch Lebensraum wird“ ... alltägliche Unterrichtsarbeit ja, aber auch „das Gehäuse Unterrichtsschule durchbrechen“, „Staatspädagogik (?) und Reformpädagogik annähern“. (Zit. n. K.-H. Braun. - Bei Pestalozzi ging es noch um die Sozialisation ins Gebirgsdorf. Aber der war immerhin noch vom Elend gerührt.)
- von Hentig 1993: Schule neu denken (Für wen? Für die Klientel der Landerziehungsheime?)
- Bildungskommission NRW 1995: Zukunft der Bildung - Schule der Zukunft ... Das „Haus des Lernens“ für 14,80 DM/384 S. (Die Kienbaum-Studie kostete 100 DM.)
- Preis der Bertelsmann-Stiftung für schulische Innovation 1996: Der Lehrer als Diener.
- Bundesbildungsminister Rüttgers in „Bericht aus Bonn“ (Sept. 1996): Ich habe mit dem Sponsoring in Schulen keine Probleme.

Ich bin ein Städter, und ich verweigere meine Schüler der elitären Unverbindlichkeit der Wagenscheinschen kollektiven Komunion mit jenem „geistigen Reich, in welchem die mathematischen Wahrheiten bestehen“. (Vgl. Urspr. Verstehen und exaktes Denken, S. 103)

Literatur:

Becker, Gerold: Das Exemplarische im Mathematikunterricht. Diss. Aachen 1971.

Berg, Hans Christoph (Hrsg.): Martin Wagenschein - Naturphänomene sehen und verstehen. Stuttgart 1980.

Bildungskommission NRW: Zukunft der Bildung - Schule der Zukunft. Neuwied 1995.

Braun, Karl-Heinz: Die Unterrichtsschule am Ende ihrer Epoche - Diskursethische Reflexionen zum neuen Hessischen Schulgesetz. In: Neue Sammlung, 33.1 (1993), S. 71-99.

von Hentig, Hartmut: Die Schule neu denken. München (2. Aufl.:) 1993.

Hopf, Diether: Mathematikunterricht. Stuttgart 1980.

Köhler, Hartmut: Bildung und Mathematik in der gefährdeten Welt. Buxheim 1993 (Diss. Wien über Freudenthals und Wittenbergs Didaktik 1981)

Köhnlein, Walter: Die Pädagogik Martin Wagenscheins. Diss. Erlangen 1973.

Lenné, Helge: Analyse der Mathematididaktik in Deutschland. Stuttgart 1969 (2. Aufl. 1975)

Muckenfuß, Heinz: Grundpositionen Wageschenins - kritisch hinterfragt. In: MNU 49.8 (1996), S. 455-462.

Schubring, Gert: Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik. Stuttgart 1978 (Diss. Bielefeld)

Toeplitz, Otto: Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzun gegenüber der Infinitesimalrechnung der höheren Schulen. In: Jahresberichte der DMV , Band 36 (1927), S. 90-100.

Volk, Dieter: Didaktik und Mathematikunterricht. Weinheim 1980.

Vollrath, Hans-Joachim: Anstöße - Gedanken zu Martin Wagenschein. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 10.4 (1989), S. 349-363.

Wagenschein, Martin: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken. Stuttgart 1965.

Wagenschein, Martin: Verstehen lehren. Weinheim (5. erw. Aufl.:) 1975.

Wagenschein, Martin: Erinnerungen für morgen - Eine pädagogische Autobiographie. Weinheim 1983.

Weierstrass, Karl: Über die sokratische Lehrmethode und deren Anwendbarkeit beim Schulunterrichte. (2. Staatsarbeit 1841) In: Jahresbericht ü.d. Königl. Progymnasium in Dt. Crone 1844/45. (Zitiert nach K.W.: Mathematische Werke, Band III, Abhandlungen III. Berlin: Mayer und Müller 1903, S. 315-329.)

Wilhelmi, Jutta: Wer bleibt, bleibt lange. In: ZEIT-Punkte, Heft 2, 1996, S. 80-81.

Wittenberg, Alexander Israel: Bildung und Mathematik. Stuttgart 1963.

Wittmann, Erich Christian: Themenkreismethode und lokales Ordnen. In: Der Mathematikunterricht, 20.1 (1974), S. 5-18.